62
Я 73

А. ЯРИВ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

QUANTUM ELECTRONICS

SECOND EDITION

AMNON YARIV

California Institute of Technology

John Wiley and Sons, Inc., 1975,
New York London Sydney Toronto

А. ЯРИВ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Перевод с английского под редакцией **Я. И. Ханина**

Москва «Советское радио» 1980

УДК 621.378.1

Ярив А.

Я72 Квантовая электроника: Пер. с англ. / Под ред. Я. И. Ханина. — 2-е изд. — М.: Сов. радио, 1980. — Пер. изд.: Yariv A. Quantum electronics, США, 1975. — 488 с., ил.

В пер. 2 р. 70 к.

Книга посвящена наиболее важным вопросам квантовой электроники: оптическому излучению, физике процессов в лазерах, нелинейной оптике. По сравнению с первым изданием (1973 г.) в книге появились новые разделы, в которых излагается теория лазеров: полупроводниковых, с двойной гетероструктурой, на красителях, с распределенной обратной связью и др.

Предназначена для научных работников и специалистов, занимающихся разработкой и применением квантовых приборов, а также для студентов физических и инженерных специальностей.

Я $\frac{30407\text{-}023}{046(01)\text{-}80}$ 38-79 2403000000

ББК 32.86
6Ф4

Редакция литературы по электронной технике

© By John Wiley and Sons, Inc., 1975.
© Перевод на русский язык.
Издательство «Советское радио», 1980 г.

Предисловие редактора перевода

Имя Амнона Ярива уже знакомо советскому читателю. Перевод первого издания его книги «Квантовая электроника и нелинейная оптика» на русский язык вышел в свет в 1973 г. Настоящий перевод сделан со второго английского издания этой книги. От первого издания он отличается главным образом тем, что автор отказался от намерения охватить всю квантовую электронику и сосредоточил свое внимание на физике лазеров и нелинейной оптике, существенно переработав соответствующие главы. Специальным главам предпослано изложение сведений из тех дисциплин, которые составляют основу квантовой электроники.

По своему замыслу, содержанию и характеру изложения книга А. Ярива — учебное пособие, предназначенное для студентов физических и инженерных специальностей. Ее можно отнести к числу лучших в мировой литературе пособий по квантовой электронике. Она, несомненно, будет полезной не только студентам, но и специалистам, уже работающим в данной области.

В изложении материала можно заметить некоторую несбалансированность: автор явно отдает предпочтение тем разделам, которые наиболее близки его собственным научным интересам, иногда ограничиваясь беглым изложением вопросов, имеющих более общий характер. Именно этим обстоятельством была вызвана необходимость в многочисленных примечаниях и расширении списка приведенной литературы.

Написано дополнение к книге, освещающее современные взгляды на природу незатухающих пульсаций излучения твердотельных лазеров. Вместе с тем оказалось возможным заметно сократить первые четыре главы книги, оставив лишь тот материал, который органически связан с дальнейшим изложением. Исключены также два приложения, посвященные соотношениям Крамерса — Кронига и телесному углу, приходящемуся на одну моду черного излучения. Указанные главы и приложения не претерпели во втором издании книги никакого изменения по сравнению с первым, и читатель при необходимости может найти их полный перевод на русский язык в упомянутом издании 1973 г.

Перевод гл. 1—3 выполнен А. И. Соколовым, гл. 4 — Л. Т. Тер-Мартиросяном, гл. 5, 8 и приложений 1, 2 — А. И. Дятловым, гл. 6, 7 и 19 — М. Г. Резниковым, гл. 9, 11 и 15 — И. И. Маториным, гл. 10 и 14 — В. П. Новиковым; гл. 12 и 13 — П. А. Хандохиным, гл. 16—18 и приложений 3 и 4 — А. П. Александровым.

Я. И. Ханин.

Предисловие автора к русскому переводу

Мне очень приятно, что моя книга переведена на русский язык. Я считаю честью для себя то, что книгой будут пользоваться русские ученые, добившиеся значительных успехов в этой области.

Пользуюсь удобным случаем, чтобы добавить в форме репринтов два новых раздела, которые я включил бы и в английский текст, если бы писал его сейчас. Первый из этих разделов касается применения оператора временной эволюции в нелинейной оптике. Второй относится к новой ветви нелинейной оптики — «обращенной во времени» или «фазово-сопряженной» оптике[1]. Эта область вызывает в настоящее время большой интерес у исследователей как в СССР, так и в Соединенных Штатах и служит прекрасной демонстрацией законов нелинейной оптики.

Амнон Ярив.

Пасадена, Калифорния, США, 1978.

---

[1] В оригинале Time — Reversed or Phase—Conjugate. В отечественной литературе, как правило, используется термин «обращение волнового фронта». — *Прим. ред.*

Настоящий учебник знакомит с основными принципами квантовой электроники, включая теорию лазера, а также с различными оптическими явлениями и устройствами, обязанными своим происхождением интенсивным и когерентным оптическим полям, которые стали достижимыми благодаря лазерам.

Наибольшее внимание уделено фундаментальным вопросам. Однако делается попытка перебросить мостик от теории к практике. С этой целью приводится множество численных примеров, отражающих реальную ситуацию.

Примерно половина данного издания — это новый материал. Основные изменения заключаются в следующем.

1. Добавлены разделы, посвященные распространению гауссовых пучков в линзоподобных средах и оптических резонаторах, формализму матрицы плотности применительно к задачам взаимодействия света с веществом, теории лазеров, применению метода Ван дер Поля для анализа шумов в лазерах, лазерам на красителях, усилению на колебательно-вращательных переходах, лазерам с двойной гетероструктурой, синхронизации мод в лазерах с однородным уширением линии усиления, модуляции добротности, насыщающимся усилителям и усилению спонтанного излучения, акустооптическим взаимодействиям, самоиндуцированной прозрачности, фотонному эхо, спонтанной параметрической флуоресценции, лазерам с распределенной обратной связью, связанным модам диэлектрических волноводов.

2. Исключены главы, касающиеся микроволновых мазеров, магнетизма, магнитного резонанса и микроволновых параметрических генераторов.

3. Используется только система единиц СИ.

Книга предназначена, главным образом, для студентов, специализирующихся в области физики и прикладной физики. К последней категории обычно относят студентов радиотехнических и материаловедческих факультетов.

Студенты Калифорнийского технологического института, слушающие лекции, которые положены в основу данной книги, имеют подготовку в объеме годичного повышеного курса квантовой механики и курса электродинамики. Эти лекционные курсы наиболее успевающими студентами посещаются на третьем, а большинством — на четвертом году обучения[1]. Несмотря на то, что в книгу включена значительная часть необходимого вспомогательного ма-

[1] В оригинале: senior year; first year of graduate school. Прим. ред.

териала, предполагается, то читатель достаточно близко знаком с указанными предметами.

Книга может рассматриваться как основное пособие по годичному курсу квантовой электроники или же по следующим семестровым курсам: лазеры (гл. 5—13); нелинейная оптика[1] (гл. 14 в части, относящейся к акустооптике, 15—18); квазиоптика[2] (гл. 5—7, 14, 19).

Первый из этих курсов существенно опирается на квантовую механику, во втором к квантовой механике имеет отношение только гл. 15, тогда как в третьем она вообще не используется. Электродинамическая подготовка необходима для всех трех курсов.

Я приношу извинения тем из коллег, чьи работы не упомянуты или не нашли должного отражения в книге. Поскольку это прежде всего учебник, материал для него отбирался скорее из педагогических, нежели из приоритетных соображений.

Я благодарен Рут Стрэттон и Диане Рапчак за перепечатку рукописи и исправление опечаток в ней, Пауле Самазан — за помощь при составлении списка литературы.

Выражаю благодарность доктору Джеку Комли, который внес существенный вклад в написание глав 15 и 18, и мистеру Х. Йену, взявшему на себя труд по перепроверке всех результатов и контролю за внутренней согласованностью текста.

Амнон Ярив.

---

[1] В оригинале: Nonlinear Optical Effects and Stimulated Scattering Phenomena. — *Прим. ред.*

[2] В оригинале: Optical Modes and Propagation Phenomena. — *Прим. ред.*

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОСТУЛАТЫ И ТЕОРЕМЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В этой главе рассматриваются некоторые основные постулаты и теоремы квантовой механики, которые являются общими и не зависят от вида изучаемой системы.

1.1. Уравнение Шредингера

В квантовой механике поведение частицы описывается волновой функцией $\psi(\mathbf{r}, t)$, которая является решением уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}, t)\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{1.1.1}$$

где $U(\mathbf{r}, t)$ — потенциальная энергия частицы; $\hbar = h/2\pi$, h — постоянная Планка.

Если принять во внимание, что импульсу частицы $\mathbf{p}$ в квантовой механике соответствует дифференциальный оператор $-i\hbar\nabla$, т. е.

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla, \tag{1.1.2}$$

то оператор в левой части (1.1.1) можно рассматривать как квантовый аналог суммы кинетической и потенциальной энергии частицы:

$$\mathscr{E} \to -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.1.3}$$

Статистическая интерпретация волновой функции. Рассмотрим очень большое число одинаковых независимых систем, каждая из которых представляет собой частицу в поле с потенциальной функцией $U(\mathbf{r}, t)$. Движение частицы в любой из этих систем описывается одной и той же волновой функцией $\psi(\mathbf{r}, t)$. Измерив в момент времени t координаты всех частиц и подсчитав относительное число частиц, находящихся в окрестности dv точки $\mathbf{r}$, получим априорную вероятность $P(\mathbf{r}, t)\,dv$ обнаружения частицы при измерении внутри dv в момент t. В квантовой механике плотность вероятности $P(\mathbf{r}, t)$ равна

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\,\psi(\mathbf{r}, t), \tag{1.1.4}$$

где значок * означает комплексное сопряжение.

В конце параграфа будет показано, что усредненное в соответствии с этой статистической гипотезой движение частицы удовлетворяет классическим уравнениям; это является сильным аргументом в пользу статистической трактовки волновой функции. Разумеется, главным судьей в решении вопроса о справедливости такой интерпретации функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ является соответствие результатов, полученных на ее основе, экспериментальным данным.

Первое условие, следующее из статистической интерпретации $\psi(\mathbf{r}, t)$, состоит в том, что полная вероятность обнаружения частицы где-нибудь в пространстве должна быть конечной и постоянной:

$$\int\limits_{\substack{\text{все}\\\text{пространство}}} P(\mathbf{r}, t)\,dv = \int\limits_{\substack{\text{все}\\\text{пространство}}} \psi^*(\mathbf{r}, t)\,\psi(\mathbf{r}, t)\,dv = \text{const}. \tag{1.1.5}$$

Обеспечив выполнение (1.1.5), мы можем выбрать величину нормировочной постоянной. Вероятностная трактовка вынуждает выбрать эту постоянную равной единице, так как где-нибудь в пространстве частица будет обнаружена при измерении с достоверностью

$$\int P(\mathbf{r}, t)\, dv = \int_V \psi^* \psi dv = 1. \tag{1.1.6}$$

Среднее значение. В соответствии с приведенным перед формулой (1.1.4) описанием процесса измерения среднее значение наблюдаемой физической величины надо понимать как среднее по ансамблю. С другой стороны, это же среднее можно определить как математическое ожидание результата единичного измерения.

Среднее значение радиуса-вектора, определяющего положение частицы, дается выражением

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int \psi^* \mathbf{r} \psi dv \tag{1.1.7}$$

Среднее значение произвольного оператора $\hat{F}$, зависящего от координат, импульса, энергии и времени,

$$\langle F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathscr{E}, t) \rangle = \int \psi^* \hat{F}\left(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, t\right) \psi dv. \tag{1.1.8}$$

Ниже показано, что, выбрав (1.1.8) для вычисления $\langle F \rangle$, получим средние значения физических величин, совпадающие с их классическими аналогами. Доказательства сильно упростятся, если учесть, что все рассматриваемые операторы эрмитовы.

Эрмитовы операторы. Оператор $\hat{F}^+$ называется эрмитово-сопряженным оператору $\hat{F}$, если

$$\int f^* \hat{F} g dv = \int g (\hat{F}^+ f)^* dv, \tag{1.1.9}$$

где f и g — две любые скалярные функции[1].

Если $\hat{F}^+ = \hat{F}$, т. е.

$$\int f^* \hat{F} g dv = \int g (\hat{F} f)^* dv, \tag{1.1.10}$$

то оператор $\hat{F}$ называют эрмитовым или самосопряженным.

Скорость изменения средних значений во времени. В дополнение к полученным результатам можно вывести весьма общее и очень полезное соотношение для скорости изменения среднего значения во времени

$$\frac{d\langle F \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int \psi^* \hat{F} \psi dv = \int \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \hat{F} \psi)\, dv =$$

$$= \int \left[\psi^* \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \psi + \hat{F} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{F} \psi \right] dv.$$

Определяя оператор Гамильтона как

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U, \tag{1.1.11}$$

получим согласно (1.1.1)

$$\hat{\mathscr{H}} \psi = i\hbar \partial\psi / \partial t.$$

[1] Это выражение совпадает с принятым в математике определением, см., например, [1].

Выражая отсюда производные $\partial\psi/\partial t$ и $\partial\psi^*/\partial t$, имеем

$$\frac{d\langle F\rangle}{dt}=\int\left[\psi^*\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\psi-\frac{i}{\hbar}\psi^*\hat{F}\hat{\mathcal{H}}\psi+\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}\psi)^*\hat{F}\psi\right]dv=$$

$$=\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle+\frac{i}{\hbar}\int(\psi^*\hat{\mathcal{H}}\hat{F}\psi-\psi^*\hat{F}\hat{\mathcal{H}}\psi)\,dv=\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle+\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{\mathcal{H}},\hat{F}]\rangle, \tag{1.1.12}$$

где использовано вытекающее из эрмитовости $\hat{\mathcal{H}}$ соотношение

$$\int(\hat{\mathcal{H}}\psi)^*\hat{F}\psi dv=\int\psi^*\hat{\mathcal{H}}\hat{F}\psi dv.$$

Теорема Эренфеста. Эта теорема утверждает, что классические уравнения движения одной частицы

$$m\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{p},\quad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\nabla U \tag{1.1.13}$$

удовлетворятся, если все векторы в (1.1.13) заменить на средние значения соответствующих квантовомеханических операторов:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt}=\frac{\langle p_x\rangle}{m};\quad \frac{d\langle p_x\rangle}{dt}=-\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle. \tag{1.1.14}$$

1.2. Уравнение Шредингера, не содержащее времени

Обращаясь к уравнению Шредингера, содержащему время,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{dt}, \tag{1.2.1}$$

представим его решение как $\psi(\mathbf{r},\ t)=u(\mathbf{r})\,g(t)$. Уравнение (1.2.1) примет вид

$$\frac{1}{u}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2u+Uu\right)=\frac{i\hbar}{g}\frac{dg}{dt}. \tag{1.2.2}$$

Если потенциальная функция $U(\mathbf{r})$ не зависит от времени явно, то можно разделить уравнение (1.2.2) на два уравнения с помощью постоянной разделения $\mathscr{E}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2u(\mathbf{r})+U(\mathbf{r})\,u(\mathbf{r})=\mathscr{E}u(\mathbf{r}), \tag{1.2.3}$$

$$i\hbar\frac{dg(t)}{dt}=\mathscr{E}g(t). \tag{1.2.4}$$

Решение (1.2.4) имеет вид

$$g(t)=g(0)\exp\left(-i\frac{\mathscr{E}}{\hbar}t\right).$$

Уравнение (1.2.3) называют уравнением Шредингера, не содержащим времени. Его решения $u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})$ являются собственными функциями оператора энергии. Собственные значения оператора энергии образуют множество (дискретное или непрерывное) допустимых значений $\mathscr{E}$ и определяются граничными условиями для $u(\mathbf{r})$ или требованиями, налагаемыми на поведение $u(\mathbf{r})$ на бесконечности. Положим, что система функций $u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})$ есть полная система, и получим несколько общих результатов, касающихся этих волновых функций.

Ортонормальность волновых функций. Прежде всего покажем, что любые две функции из системы функций $u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})$, соответствующие разным значениям $\mathscr{E}$, ортогональны, т. е.

$$\int u^*_{\mathscr{E}'}(\mathbf{r})\, u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})\, dv = 0, \quad \mathscr{E} \neq \mathscr{E}'.$$

Будем исходить из уравнения (1.2.3)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u_{\mathscr{E}} + U u_{\mathscr{E}} = \mathscr{E} u_{\mathscr{E}}.$$

Запишем аналогичное уравнение для $u^*_{\mathscr{E}'}$, умножим первое уравнение на $u^*_{\mathscr{E}'}$, второе — на $u_{\mathscr{E}}$ и вычтем одно из другого. В результате получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(u^*_{\mathscr{E}'}\nabla^2 u_{\mathscr{E}} - u_{\mathscr{E}}\nabla^2 u^*_{\mathscr{E}'}) + U(u_{\mathscr{E}} u^*_{\mathscr{E}'} - u^*_{\mathscr{E}'} u_{\mathscr{E}}) = (\mathscr{E} - \mathscr{E}')\, u_{\mathscr{E}} u^*_{\mathscr{E}'}.$$

Мы воспользовались тем, что собственные значения эрмитова оператора вещественны и, следовательно, $\mathscr{E}'^* = \mathscr{E}'$.

Проинтегрируем полученное уравнение по объему V и воспользуемся теоремой Грина:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_A (u^*_{\mathscr{E}'}\nabla u_{\mathscr{E}} - u_{\mathscr{E}}\nabla u^*_{\mathscr{E}'})\, n da = (\mathscr{E} - \mathscr{E}')\int u^*_{\mathscr{E}'} u_{\mathscr{E}}\, dv.$$

Поскольку требуется выполнение соотношения (1.1.5), интеграл в левой части должен обращаться в нуль, благодаря чему

$$\int u^*_{\mathscr{E}'}(\mathbf{r})\, u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})\, dv = 0, \qquad \mathscr{E} \neq \mathscr{E}'. \tag{1.2.5}$$

Нормировка $\psi(\mathbf{r}, t)$ вытекает из условий $g(0)g^*(0) = 1$ и

$$\int |u_{\mathscr{E}}|^2\, dv = 1, \tag{1.2.6}$$

так что $u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}) \exp(\mathscr{E}t/i\hbar)$ есть частное (нормированное) решение уравнения Шредингера со временем.

Физический смысл $\mathscr{E}$. Постоянная разделения $\mathscr{E}$ в соответствии с изложенным имеет простой математический смысл: это есть собственное значение не содержащего времени уравнения Шредингера (1.2.3). Рассмотрим случай, когда волновая функция представляет собой частное решение вида

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathscr{E}t/\hbar). \tag{1.2.7}$$

Среднее значение оператора полной энергии, который был назван оператором Гамильтона или гамильтонианом, равно

$$\left\langle \mathscr{H} \right\rangle = \left\langle -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U \right\rangle = \left\langle ih\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \mathscr{E}. \tag{1.2.8}$$

Здесь использованы соотношения (1.2.3) и (1.2.4). Таким образом, $\mathscr{E}$ является средним значением оператора полной энергии $\mathscr{H}$, если потенциальная функция U не зависит от времени.

Некоторые математические свойства волновых функций. Так как функции $u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})$ образуют полную ортонормальную систему, их можно использовать для разложения в ряд произвольной функции $G(\mathbf{r})$:

$$G(\mathbf{r}) = \sum_{\mathscr{E}} g_{\mathscr{E}}\, u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}). \tag{1.2.9}$$

Используя условие ортонормальности, получаем

$$g_{\mathscr{E}} = \int G(\mathbf{r}')\, u^*_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}')\, dv';$$

$$G(\mathbf{r}) = \sum_{\mathscr{E}} \left[\int u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}')\, G(\mathbf{r}')\, dv' \right] u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}) =$$

$$= \int dv'\, G(\mathbf{r}') \sum_{\mathscr{E}} u^*_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}')\, u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}'), \qquad (1.2.10)$$

где интегралы берутся по всему пространству.

Напишем соотношение

$$G(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dv, \qquad (1.2.11)$$

из которого заключаем, что

$$\sum_{\mathscr{E}} u^*_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}')\, u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (1.2.12)$$

и, следовательно,

$$\int_{V'} \sum_{\mathscr{E}} u^*_{\mathscr{E}}(\mathbf{r}')\, u_{\mathscr{E}}(\mathbf{r})\, dv' = \begin{cases} 1, & \text{если точка } \mathbf{r} \text{ внутри } V', \\ 0, & \text{если точка } \mathbf{r} \text{ вне } V'. \end{cases} \qquad (1.2.13)$$

Основные постулаты квантовой механики. В абстрактной формулировке квантовой механики физическому состоянию системы соответствует волновая функция (комплексный вектор состояния). Совокупностью $u_{\mathscr{E}}$, например, исчерпываются все возможные состояния системы в энергетическом представлении. Процесс измерения вносит возмущение и, вообще говоря, меняет состояние системы. С точки зрения квантовой механики процесс измерения физической величины (энергии, импульса и т. п.) соответствует тому, что на волновую функцию действует оператор, сопоставляемый наблюдаемой физической величине.

Предположим, что система находится в состоянии $u_{\mathscr{E}}$ и, следовательно, ее энергия равна $\mathscr{E}$. Измерению другой физической величины, F, соответствует действие линейного оператора $\hat{F}$ на волновую функцию $u_{\mathscr{E}}$. Если $u_{\mathscr{E}}$ не относится к числу собственных функций оператора $\hat{F}$, действие последнего приведет к изменению состояния системы и она больше не будет обладать определенной энергией. Если, однако, $u_{\mathscr{E}}$ является собственной функцией $\hat{F}$, состояние системы останется неизменным и можно одновременно точно определить как энергию, так и физическую величину, которой сопоставляется оператор $\hat{F}$.

Необходимым и достаточным условием того, что два линейных оператора, в нашем случае $\hat{\mathscr{H}}$ и $\hat{F}$, имеют общую систему собственных функций, является их коммутативность. Чтобы доказать достаточность этого условия, положим $\hat{\mathscr{H}}\hat{F} = \hat{F}\hat{\mathscr{H}}$. Отсюда $\hat{F}\hat{\mathscr{H}}u_{\mathscr{E}} = \hat{\mathscr{H}}\hat{F}u_{\mathscr{E}} = \hat{F}\mathscr{E}u_{\mathscr{E}} = \mathscr{E}\hat{F}u_{\mathscr{E}}$. Функция $\hat{F}u_{\mathscr{E}}$ является, следовательно, собственной функцией оператора $\hat{\mathscr{H}}$, соответствующей собственному значению $\mathscr{E}$. Если существует только одна собственная функция с собственным значением $\mathscr{E}$, то $\hat{F}u_{\mathscr{E}} = Cu_{\mathscr{E}}$, где C — постоянная. Если же собственному значению $\mathscr{E}$ соответствует более чем одна функция $u_{\mathscr{E}}$ (т. е. энергетический спектр вырожден), то всегда можно взять линейные комбинации функций $u_{\mathscr{E}}$, которые ортогональны и являются также собственными функциями оператора $\hat{F}$.

Итак, необходимым и достаточным условием того, чтобы две физические величины могли быть одновременно точно измерены, является коммутативность соответствующих операторов.

Пусть теперь операторы $\hat{\mathcal{H}}$ и $\hat{F}$ не коммутируют. Выясним, следуя Борну, что достигается в результате измерения в этом случае.

Разложим волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$ в ряд по собственным функциям v_n оператора $\hat{F}$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Sigma C_n(t)\, v_n(\mathbf{r}), \quad \text{где} \quad F v_n(r) = f_n a_n. \tag{1.2.14}$$

Собственные значения f_n образуют множество значений физической величины F, которые можно получить при измерении. Вероятность того, что при измерении в момент времени t будет получено значение f_n, равна $|c_n(t)|^2$. Отсюда

$$\langle F(t)\rangle = \sum_n f_n |c_n(t)|^2. \tag{1.2.15}$$

Используя соотношение

$$c_n = \int v_n^*(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}, t)\, dv,$$

получаем

$$\langle F(t)\rangle = \sum_n f_n \int \psi^*(\mathbf{r}, t)\, v_n(\mathbf{r}')\, dv' \int \psi(\mathbf{r}, t)\, v_n^*(\mathbf{r})\, dv =$$

$$= \int dv'\, \psi^*(\mathbf{r}', t)\, \hat{F}' \int dv \psi(\mathbf{r}, t) \sum_n v_n^*(\mathbf{r})\, v_n(\mathbf{r}') = \int \psi^*(\mathbf{r}', t)\, \hat{F}'(\mathbf{r}', t)\, dv'.$$

Здесь оператор $\hat{F}'$ действует на функции от $\mathbf{r}'$; использовано свойство собственных функций $\Sigma v_n^*(\mathbf{r})\, v_n(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Формула для среднего значения (1.2.15) приводит к тем же результатам, что и установленное ранее соотношение (1.1.8).

Принцип неопределенности. Установив, что существуют пары физических величин, которые не могут быть точно измерены одновременно, найдем теперь величину этой неопределенности.

Примером такой пары могут служить координата и импульс частицы, так как оператор импульса, $-i\hbar\partial/\partial x$, не коммутирует с x. Известно, что неопределенности координаты и импульса характеризуются соответствующими среднеквадратичными отклонениями от среднего:

$$\langle \Delta x^2\rangle = \int \psi^* (x - \langle x\rangle)^2 \psi dv,$$

$$\langle \Delta p_x^2\rangle = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x\rangle\right)^2 \psi dv. \tag{1.2.16}$$

При $\langle x\rangle = \langle p_x\rangle = 0$ (это будет выполняться, если $\psi(x)$ — четная функция) для произведения неопределенностей имеем

$$\langle \Delta p_x^2\rangle \langle \Delta x^2\rangle = -\hbar^2 \int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dv \int \psi^* x^2 \psi dv.$$

В силу эрмитовости оператора id/dx (или просто в результате интегрирования по частям) получим

$$\int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dv = -\int \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dv$$

и, следовательно,

$$\langle \Delta p_x^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle = \hbar^2 \int \frac{\partial \psi^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dv \int \psi^* x^2 \psi dv, \qquad (1.2.17)$$

Воспользовавшись неравенством Шварца

$$\int ff^* dv \int gg^* dv \geqslant \left[\frac{1}{2} \left(\int fg^* dv + \int gf^* dv \right) \right]^2 \qquad (1.2.18)$$

для функций $f = \partial\psi/\partial x$, $g = x\psi$, приходим к соотношению

$$\langle \Delta p_x^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle \geqslant \frac{\hbar^2}{4} \left[\int \frac{\partial \psi}{\partial x} x\psi^* dv + \int x\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dv \right]^2 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left[\int x \frac{\partial}{\partial x} (\psi\psi^*) dv \right]^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Выражение в квадратных скобках равно -1 и это можно показать интегрированием по частям.

Определяя Δx как $\langle \Delta x^2 \rangle^{1/2}$ (и аналогично Δp_x), окончательно находим

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar/2.$$

Приведем примеры других пар канонически сопряженных физических величин, подчиняющихся принципу неопределенности[1]:

$$\Delta \mathscr{E} \Delta t \geqslant \hbar/2; \quad \Delta \Phi_z \Delta J_z \geqslant \hbar/2; \quad \Delta n \Delta \varphi \geqslant 1, \qquad (1.2.19)$$

где $\mathscr{E}$ и t — энергия системы и время; Φ_z и J_z — угол поворота и момент импульса системы относительно произвольной оси; n и φ — число квантов и фаза колебаний гармонического осциллятора [3].

1.3. Гайзенберговские уравнения движения

В § 1.1 получено уравнение движения для среднего значения призвольной физической величины B:

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial B}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{\mathscr{H}}, \hat{B}] \rangle, \qquad (1.3.1)$$

где $\langle B \rangle = \int \psi^* \hat{B} \psi dv$ и ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathscr{H}} \psi. \qquad (1.3.2)$$

Считая, что $\hat{\mathscr{H}}$ не зависит от времени явно, можно формально записать решение последнего уравнения в виде[2]

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\hat{\mathscr{H}}t/\hbar)\, \psi(\mathbf{r}, 0), \qquad (1.3.3)$$

---

[1] Соотношение неопределенностей для энергии и времени $\Delta\mathscr{E}\, \Delta t \geqslant \hbar/2$ имеет существенно другой смысл по сравнению с соотношением неопределенностей например, для координаты и импульса. Здесь $\Delta\mathscr{E}$ есть разность двух точно измеренных значений энергии системы в два различных момента времени, разделенных промежутком Δt. Соотношение (1.2.19) относится к измерению в один и тот же момент времени и показывает, что x и p_x вообще не могут одновременно иметь строго определенных значений. Подробнее по этому вопросу см [2, с. 185] — *Прим. пер.*

[2] Оператор $\exp(-i\hat{\mathscr{H}}t/\hbar)$ определен как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\hat{\mathscr{H}}t}{\hbar} \right)^n.$$

так что $\langle B \rangle$ равно

$$\langle B \rangle = \int \left[e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \psi(\mathbf{r}, 0) \right]^* \hat{B} \left[e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \psi(\mathbf{r}, 0) \right] dv =$$

$$= \int \psi^*(\mathbf{r}, 0)\, e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \hat{B} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \psi(\mathbf{r}, 0)\, dv =$$

$$= \int \psi^*(\mathbf{r}, 0)\, \hat{B}_{\text{н}}(t)\, \psi(\mathbf{r}, 0)\, dv. \qquad (1.3.4)$$

Правомерность перестановки оператора $\exp(-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar)$ направо от функции $\psi(\mathbf{r}, 0)$ в (1.3.3) может быть доказана путем разложения этого оператора в степенной ряд и рассмотрения каждой степени $\hat{\mathcal{H}}$ как эрмитова оператора.

Оператор $\hat{B}_{\text{н}}(t)$ определяется последним уравнением как

$$\hat{B}_{\text{н}}(t) = \exp(i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar)\, \hat{B} \exp(-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar) \qquad (1.3.5)$$

и называется оператором $\hat{B}$ в гайзенберговском представлении.

Как следует из (1.3.4), средние значения физических величин в гайзенберговском представлении вычисляются с использованием волновых функций, взятых при фиксированном значении времени ($t = 0$), т. е. стационарных волновых функций. Операторы, однако, изменяются во времени в соответствии с (1.3.5). Для вычисления $\langle B \rangle$, следовательно, необходимо знать $\hat{B}_{\text{н}}(t)$. Дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию оператора $\hat{B}_{\text{н}}(t)$ можно вывести прямо из (1.3.5):

$$\frac{d\hat{B}_{\text{н}}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left(\hat{\mathcal{H}} e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \hat{B} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} - e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \hat{B} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \hat{\mathcal{H}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{н}} = \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{н}} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{B}_{\text{н}}(t)]. \qquad (1.3.6)$$

Эта формулировка особенно полезна при рассмотрении взаимодействия систем с квантованными бозонными полями.

Глава 2

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Эта глава посвящена решению одной из задач на собственные значения. Будут найдены собственные значения оператора энергии и соответствующие собственные функции для гармонического осциллятора.

2.1. Четность

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\, u(r) = \mathcal{E} u(r)$$

и заменим аргумент волновой функции и гамильтониана $\mathbf{r}$ на $-\mathbf{r}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u(-\mathbf{r}) + U(-\mathbf{r})\, u(-\mathbf{r}) = \mathcal{E} u(-r).$$

Если $U(\mathbf{r}) = U(-\mathbf{r})$, то $u(-r)$ также будет решением уравнения Шредингера с собственным значением $\mathscr{E}$. Можно сконструировать два новых решения:

$$u_e(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}), \quad u_0(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) = u(-\mathbf{r}),$$

где u_e — четная функция r, а u_0 — нечетная. Функции u_e и u_0 соответствуют одному и тому же собственному значению $\mathscr{E}$. Если спектр невырожден, то все четыре функции должны быть пропорциональны. Возможны два варианта: 1) $u(\mathbf{r})$ пропорциональна $u_e(\mathbf{r})$, а $u_0(\mathbf{r}) = 0$; 2) $u(\mathbf{r})$ пропорциональна $u_0(\mathbf{r})$, а $u_e(\mathbf{r}) = 0$. Собственная функция $u(\mathbf{r})$, таким образом, может быть четной или нечетной, т. е. $u(-\mathbf{r}) = \pm u(\mathbf{r})$.

Если собственное значение $\mathscr{E}$ принадлежит вырожденному спектру и ему соответствует n собственных функций, то всегда можно образовать n линейно независимых суперпозиций этих функций, которые будут иметь определенную четность. Необходимо заметить, что собственные функции обладают определенной четностью лишь тогда, когда $U(\mathbf{r}) = U(-\mathbf{r})$, т. е. потенциальное поле является симметричным относительно инверсии координат. Существуют случаи, например, при потенциальном поле нецентросимметричного кристалла, когда это условие не выполняется, так что волновые функции не являются ни четными, ни нечетными.

2.2. Гармонический осциллятор

Гармонический осциллятор состоит из массы m, на которую действует возвращающая сила, пропорциональная смещению этой массы относительно некоторой точки (эта точка взята за начало координат). Собственные значения в этой задаче определяются требованиями, налагаемыми на поведение волновой функции на бесконечности. Можно показать, что некоторые другие задачи квантовой механики, такие, например, как описание электромагнитного излучения в полости или распространения звуковых волн в твердом теле и жидкости, формально эквивалентны задаче о гармоническом осцилляторе, и их рассмотрение в следующих главах будет базироваться на изложенном здесь материале.

Волновое уравнение для одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{Kx^2}{2}\right) u = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2 u = \mathscr{E}u. \qquad (2.2.1)$$

Введя новые обозначения

$$\xi = \alpha x, \quad \alpha^4 = mK/\hbar^2 = (m\omega/\hbar)^2, \quad \omega^2 = K/m, \quad \lambda = 2\mathscr{E}/\hbar\omega,$$

запишем уравнение (2.2.1) в более компактной форме

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\, u = 0. \qquad (2.2.2)$$

При $\xi^2 \gg \lambda$ переменная $u(\xi)$ ведет себя как $\exp(-\xi^2/2)$, поэтому естественно искать решение в виде

$$u(\xi) = H(\xi) \exp(-\xi^2/2), \qquad (2.2.3)$$

где $H(\xi)$ — полином конечной степени от ξ.

Подставляя (2.2.3) в (2.2.2), приходим к уравнению

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH}{d\xi} + (\lambda - 1)\, H = 0. \qquad (2.2.4)$$

В соответствии с замечанием относительно характера функции $H(\xi)$ положим

$$H(\xi) = \xi^s (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots). \qquad (2.2.5)$$

Подставив (2.2.5) в (2.2.4) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях ξ, получим

$$
\begin{aligned}
&s(s-1)\,a_0 = 0,\\
&(s+1)\,s a_1 = 0,\\
&(s+2)(s+1)\,a_2 - (2s+1-\lambda)\,a_0 = 0. \qquad (2.2.6)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(s+\nu+2)(s+\nu+1)\,a_{\nu+2} - (2s+2\nu+1-\lambda)\,a_\nu = 0.
\end{aligned}
$$

Так как $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения (2.2.6) следует, что $s = 0$ или $s = 1$. Из второго уравнения получаем, что либо $s = 0$, либо $a_1 = 0$, либо s и a_1 равны нулю одновременно. Последнее уравнение показывает, как можно определить коэффициент $a_{\nu+2}$, зная a_ν.

Первый случай, который надо рассмотреть, это $s = 0$. При $a_0 \neq 0$ единственным способом сделать последовательность коэффициентов a_ν с четными ν конечной является наложение условия на λ:

$$\lambda = 2\nu + 1 \qquad (2.2.7)$$

Поскольку ν четно, λ может принимать значения 1, 5, 9 ... Этот выбор λ, как ясно показывает последнее из уравнений (2.2.6), не ограничит, однако, последовательности a_ν с нечетными ν. Единственный способ гарантировать конечное число членов в $H(\xi)$ — положить $a_1 = 0$. Ту же аргументацию можно применить и к случаю $s = 1$; при этом опять отличны от нуля только коэффициенты с четными ν и $a_1 = 0$. Величина λ принимает последовательность значений

$$\lambda = 2\nu + 3 = 3,\ 7,\ 11,\ \ldots \qquad (2.2.8)$$

и соответствующий полином $H(\xi)$ нечетен (поскольку четный полином умножается в этом случае на ξ). Объединив условия (2.2.7) и (2.2.8), получим допустимые значения $\lambda = 2n+1$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Вспоминая, что $\lambda = 2\mathscr{E}/\hbar\omega$, приходим к соотношению

$$\mathscr{E}_n = \hbar\omega\,(n + 1/2), \qquad (2.2.9)$$

в котором $\mathscr{E}_n$ — энергия n-го собственного состояния.

Из (2.2.9) видно, что даже в низшем энергетическом состоянии при $n = 0$ гармонический осциллятор обладает конечной энергией $\hbar\omega/2$. Наименьшая энергия классического гармонического осциллятора равна нулю. Это отличие является проявлением принципа неопределенности. Классический гармонический осциллятор может иметь нулевую энергию потому, что возможно одновременное равенство нулю координаты и импульса. Соотношение неопределенностей исключает такую возможность в квантовой механике. Распределение неопределенности между p_x и x, минимизирующее полную энергию $\mathscr{E}$ без нарушения соотношения неопределенностей, приводит к $\mathscr{E}_0 \approx \hbar\omega$. Для того, чтобы показать это, представим энергию в виде

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p_x^2}{m} + K\Delta x^2\right).$$

Полагая $\Delta p_x \Delta x = h/2$ и минимизируя по Δp_x энергию

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{K\hbar^2}{4\Delta p_x^2} + \frac{\Delta p_x^2}{m}\right),$$

получаем $\mathscr{E}_{\min} = \hbar\omega/2$.

Отсюда следует, что волновая функция $u_0(x)$ состояния с наименьшей энергией есть волновой пакет с минимальной неопределенностью, т. е. гауссова функция. Этот вывод полностью совпадает с (2.2.3), откуда $u_0(x) \propto H_0(\alpha x)\exp(-{}^1/_2\,\alpha^2 x^2)$, причем $H_0(\alpha x) = a_0$.

Полиномы Эрмита. Решениями уравнения (2.2.4), которые соответствуют различным значениям $\lambda = 2n + 1$, являются полиномы порядка n. Полиномы представляют собой четные функции при четных n и нечетные — при нечетных n. Положив $\lambda = 2n + 1$, можно привести дифференциальное уравнение для полиномов $H_n(\xi)$, которые называются полиномами Эрмита, к виду

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n}{d\xi} + 2n H_n = 0 . \qquad (2.2.10)$$

Удобным способом определения этих полиномов является разложение функции $\exp(-s^2 + 2s\xi)$ в степенной ряд:

$$G(\xi, s) = e^{\xi^2 - (s-\xi)^2} = e^{-s^2 + 2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n . \qquad (2.2.11)$$

Доказательство того, что $H_n(\xi)$, определенные соотношением (2.2.11), удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.2.10), несложно и оставляется читателю в качестве упражнения.

Для того, чтобы получить полиномы Эрмита в явном виде, заметим, что в силу (2.2.11)

$$H_n(\xi) = \left[\frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{\xi^2 - (s-\xi)^2}\right]_{s=0} = e^{\xi^2} (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-(s-\xi)^2}\right]_{s=0} =$$

$$= e^{\xi^2} (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} . \qquad (2.2.12)$$

Приведем первые три полинома, получив их из (2.2.12):

$$H_0(\xi) = 1;\ H_1(\xi) = 2\xi;\ H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 . \qquad (2.2.13)$$

Эта частная последовательность полиномов соответствует выбору $a_0 = 1$ в уравнении (2.2.5), она очень широко используется.

Волновые функции. Волновая функция гармонического осциллятора, как это следует из (2.2.3), равна

$$u_n(x) = N_n \exp(-1/2\, \alpha^2 x^2) H_n(\alpha x) . \qquad (2.2.14)$$

Нормировочная постоянная N_n определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n u_n^* dx = N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_n^2(\alpha x)\, dx = \frac{N_n^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\, d\xi = 1 .$$

Вычислять N_n наиболее удобно с помощью производящей функции. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 + 2s\xi - t^2 + 2t\xi - \xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n!\, m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi . \qquad (2.2.15)$$

Заменив определенный интеграл слева в (2.2.15) его значением, равным $\sqrt{\pi} \exp(2st)$, получим

$$\sqrt{\pi}\, e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!} = \sum_n \sum_m \frac{s^n t^m}{n!\, m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi .$$

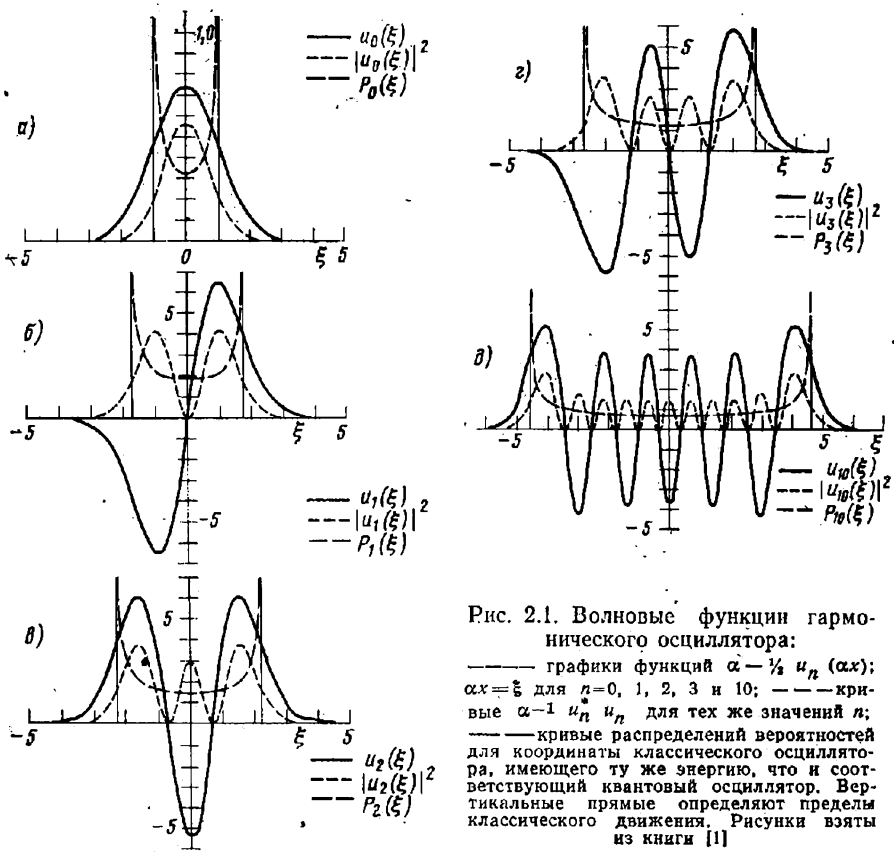


Рис. 2.1. Волновые функции гармонического осциллятора:

——— графики функций $\alpha - ½\ u_n\ (\alpha x)$; $\alpha x = \xi$ для n=0, 1, 2, 3 и 10; — — — кривые $\alpha^{-1}\ u_n^*\ u_n$ для тех же значений n; ——— кривые распределений вероятностей для координаты классического осциллятора, имеющего ту же энергию, что и соответствующий квантовый осциллятор. Вертикальные прямые определяют пределы классического движения. Рисунки взяты из книги [1]

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $s^n t^m$ с обеих сторон и найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)\, H_m(\xi)\, e^{-\xi^2}\, d\xi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \sqrt{\pi}\ n!\, 2^n, & m \neq n. \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

Отсюда получим для N_n:

$$N_n = \sqrt{\alpha/\sqrt{\pi}\ n!\, 2^n}. \qquad (2.2.17)$$

Таким образом, нормированная волновая функция равна

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\ n!\, 2^n}}\ H_n(\alpha x)\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ \alpha^2 x^2\right). \qquad (2.2.18)$$

Графики нескольких первых функций $u_n(x)$ приведены на рис. 2.1.

Применим далее производящую функцию для вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*\ \frac{\partial u_m}{\partial x}\, dx.$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, s)\, e^{-\xi^2/2} \frac{\partial}{\partial \xi} [G(\xi, t)\, e^{-\xi^2/2}]\, d\xi, \qquad (2.2.19)$$

который согласно (2.2.11) равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2+2s\xi} e^{-\xi^2/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (e^{-\xi^2/2+2t\xi-t^2})\, d\xi =$$

$$= \sum_n \sum_m \frac{s^n t^m}{n!\, m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2} \frac{\partial}{\partial \xi} [H_m(\xi)\, e^{-\xi^2/2}]\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)} e^{2\xi(s+1)} e^{-\xi^2} (-\xi + 2t)\, d\xi. \qquad (2.2.20)$$

Последний интеграл заменим суммой значений двух образующих его определенных интегралов (той же кратности)

$$-\sqrt{\pi}\,(s+t)\, e^{2st} + \sqrt{\pi}\, 2t\, e^{2st} = \sqrt{\pi}\,(t-s)\, e^{2st} =$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{s^n t^{n+1} - s^{n+1} t^n}{n!}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $s^n t^m$ в последнем равенстве и в (2.2.20), а также используя (2.2.18), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^* \frac{du_m}{dx}\, dx = \begin{cases} \alpha \sqrt{(n+1)/2}, & m = n+1, \\ -\alpha \sqrt{n/2}, & m = n-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \qquad (2.2.21)$$

Соотношения (2.2.21) можно использовать при вычислении других полезных интегралов, включающих u_n и u_m.

Обратимся к выражению, которое справедливо для любой пары одночастичных собственных функций гамильтониана:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x u_j^*(\mathbf{r})\, u_i(\mathbf{r})\, dv = \frac{\hbar^2}{m(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_j)} \int_{-\infty}^{\infty} u_j^* \frac{\partial u_i}{\partial x}\, dv. \qquad (2.2.22)$$

Прямая подстановка в (2.2.21) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)\, x u_m(x)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n+1}; & m = n+1, \\ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n}; & m = n-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \qquad (2.2.23)$$

Операторы рождения и уничтожения. Рассмотрим операторы $\hat{a}^+$ и определяемые как[1)]

$$\hat{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2}\,\hbar\alpha}\hat{p}_x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.2.24}$$

$$\hat{a}^+ = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2}\,\hbar\alpha}\hat{p}_x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.2.25}$$

Из определения и соотношений (2.2.21) и (2.2.22) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n \hat{a}\, u_m\, dx = \begin{cases} \sqrt{n+1} & m = n+1, \\ 0 & m \neq n+1; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n\, \hat{a}^+ u_m\, dx = \begin{cases} \sqrt{n}, & m = n-1, \\ 0 & m \neq n-1. \end{cases} \tag{2.2.26}$$

Равенства (2.2.26) согласуются с операторными уравнениями

$$\hat{a}^+ u_n = \sqrt{n+1}\, u_{n+1}; \quad \hat{a} u_n = \sqrt{n}\, u_{n-1}. \tag{2.2.27}$$

Чтобы убедиться в правильности (2.2.27), необходимо лишь доказать, что функции $\hat{a}^+ u_n$ и $\hat{a} u_n$ удовлетворяют уравнению Шредингера с собственными значениями $\mathscr{E}_{n+1}$ и $\mathscr{E}_{n-1}$ соответственно. Это можно рассматривать как упражнение.

Об операторах $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ обычно говорят как об операторах рождения и уничтожения. Такие названия объясняются тем, что согласно (2.2.27) действие оператора $\hat{a}^+$ (или $\hat{a}$) на волновую функцию u_n, соответствующую состоянию с n квантами энергии $\hbar\omega$, переводит ее в новую волновую функцию состояния с $n+1$ (или $n-1$) квантами, «рождая» (или «уничтожая») один квант.

Коммутатор $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ равен

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{i}{\hbar\alpha\sqrt{2}}\hat{p}_x\right), \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\hat{x} - \frac{i}{\hbar\alpha\sqrt{2}}\hat{p}_x\right)\right] =$$

$$= -\frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}_x] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}_x, \hat{x}].$$

Используя коммутационное соотношение $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$, получим

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \tag{2.2.28}$$

С помощью (2.2.24) и (2.2.25) можно выразить $\hat{x}$ и $\hat{p}_x$ через $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$:

$$\hat{x} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(\hat{a}^+ + \hat{a}); \quad \hat{p}_x = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a}). \tag{2.2.29}$$

Подставив (2.2.29) в гамильтониан

$$\hat{\mathscr{H}} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$$

и использовав обозначения $\alpha^4 = mK/\hbar^2$ и $\omega = \sqrt{K/m}$, приходим к соотношению

$$\hat{\mathscr{H}} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\,\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}).$$

[1)] Операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ сопряжены по Эрмиту, но поскольку $\hat{a}^+ \neq \hat{a}$, они не являются эрмитовыми. — *Прим. пер.*

Поскольку $[\hat{a},\ \hat{a}^+]=1$, то

$$\hat{\mathcal{H}}=\hbar\omega\,(\hat{a}^+\hat{a}+1/2). \tag{2.2.30}$$

Это наиболее используемая форма гамильтониана гармонического осциллятора, и именно она будет встречаться в дальнейшем.

Оператор $\hat{a}^+\hat{a}$ коммутирует с $\hat{\mathcal{H}}$, и его собственные значения равны числу квантов n[1]. Это легко показать с помощью уравнений (2.2.27):

$$\hat{a}^+\hat{a}\,u_n=\hat{a}^+\sqrt{n}\,u_{n-1}=nu_n.$$

Так что $\hat{\mathcal{H}}u_n=\hbar\omega\,(n+1/2)$ в полном согласии с (2.2.29).

Глава 3

МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В предыдущих главах собственные значения и собственные функции уравнения Шредингера отыскивались как решения дифференциального уравнения. Собственные функции и собственные значения эрмитовых операторов можно также находить и матричными методами. Матричная формулировка формально эквивалентна описанию на языке дифференциальных уравнений.

3.1. Некоторые основные свойства матриц

Полагаем, что читателю известны основные определения и правила действий над матрицами. Поэтому обзор положений алгебры матриц будет весьма кратким.

Матричный элемент произведения матриц A и B по определению равен

$$(AB)_{kl}=\sum_m A_{km}B_{ml}$$

и для трех матриц

$$(ABC)_{kl}=\sum_m\sum_n A_{km}B_{mn}C_{nl}. \tag{3.1.1}$$

Единичная матрица определяется как матрица, умножение которой на произвольную матрицу B не изменяет последней:

$$BI=IB=B, \tag{3.1.2}$$

отсюда следует, что $I_{kl}=\delta_{kl}$.

Матрица B^{-1}, обратная к B, есть матрица, удовлетворяющая условиям

$$B^{-1}B=BB^{-1}=I. \tag{3.1.3}$$

Матрица, обратная к произведению матриц, равна произведению обратных матриц, взятых в обратном порядке:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}. \tag{3.1.4}$$

---

[1] Оператор $\hat{n}=\hat{a}^+\hat{a}$ часто называют оператором числа частиц (квантов). — *Прим. пер.*

Элемент матрицы A^{-1} связан с элементами матрицы A соотношением

$$A^{-1}_{kl} = \frac{\text{алгебраическое дополнение элемента } A_{lk}}{\text{определитель матрицы } A}. \qquad (3.1.5)$$

Заметим, что порядок индексов k и l по обе стороны знака равенства различен.

Матрица, эрмитово-сопряженная к матрице A, обозначается как A^+ и определяется соотношениями

$$A^+_{lk} = A^*_{kl}. \qquad (3.1.6)$$

Матрица называется *эрмитовой* или самосопряженной, если она равна своей эрмитово-сопряженной, т. е. когда

$$A^+ = A. \qquad (3.1.7)$$

Используя (3.1.6), можно записать равенство (3.1.7) следующим образом:

$$A^+_{kl} = A_{kl} = A^*_{lk}, \qquad (3.1.8)$$

так что для эрмитовой матрицы замена строк столбцами (транспонирование) эквивалентна замене всех элементов их комплексно-сопряженными. Понятие эрмитовости применимо, следовательно, лишь к квадратным матрицам. Отсюда также следует, что диагональные элементы A_{kk} эрмитовой матрицы вещественны.

Унитарной называется матрица, для которой эрмитово-сопряженная и обратная матрицы совпадают:

$$A^+ = A^{-1}. \qquad (3.1.9)$$

Из (3.1.9) следует, что для унитарной матрицы выполняются соотношения $AA^+ = A^+A = I$, которые в компонентах принимают вид

$$(AA^+)_{kl} = \sum_n A_{kn} A^+_{nl} = \sum_n A_{kn} A^*_{ln} = \delta_{kl}, \qquad (3.1.10)$$

$$(A^+ A)_{kl} = \sum_n A^+_{kn} A_{nl} = \sum_n A^*_{nk} A_{nl} = \delta_{kl}.$$

Здесь использовано равенство (3.1.6).

3.2. Матричное представление операторов

В матричной формулировке каждый оператор задается соответствующей матрицей. Элементы матрицы, соответствующей оператору $\hat{A}$, определяются соотношением

$$A_{km} = \int u^*_k (\mathbf{r})\, \hat{A} u_m (\mathbf{r})\, dv, \qquad (3.2.1)$$

где $u_m(\mathbf{r})$ — произвольная полная ортонормальная система функций. Представление A_{km} оператора $\hat{A}$, следовательно, не единственно и зависит от выбора системы функций $u_m(\mathbf{r})$. Оператор $\hat{A}$ может иметь и другие представления. Напишем представление A' того же оператора $\hat{A}$ в системе функций v_n:

$$A'_{km} = \int v^*_k \hat{A} v_m\, dv. \qquad (3.2.2)$$

Матрица унитарного преобразования. Разложим произвольную функцию из системы v_n по функциям u_k:

$$v_n (\mathbf{r}) = \sum_k S_{kn} u_k (\mathbf{r}). \qquad (3.2.3)$$

Из ортонормальности систем функций u_k и v_n следует, что

$$S_{kn} = \int u^*_k v_n\, dv. \qquad (3.2.4)$$

Набор чисел S_{kn} можно представить себе как матрицу, которую будем называть *матрицей преобразования* от базиса v_n к базису u_k. Матрица S, определяемая соотношениями (3.2.4), есть *унитарная* матрица. Убедимся в этом, показав, что $SS^+ = I$, где I — единичная матрица:

$$(SS^+)_{kl} = \sum_n S_{kn} S^+_{nl} = \sum_n S_{kn} S^*_{ln} =$$

$$= \sum_n \int u^*_k (\mathrm{r})\, v_n (\mathrm{r})\, dv \int u_l (\mathrm{r}')\, v^*_n (\mathrm{r}')\, dv' =$$

$$= \int dv u^*_k (\mathrm{r}) \int u_l (\mathrm{r}') \sum_n v_n (\mathrm{r})\, v^*_n (\mathrm{r}')\, dv' = \int dv u^*_k (\mathrm{r}) \int u_l (\mathrm{r}')\, \delta (\mathrm{r} - \mathrm{r}')\, dv' =$$

$$= \int u^*_k (\mathrm{r})\, u_l (\mathrm{r})\, dv = \delta_{kl}.$$

3.3. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому представлению

В § 3.2 рассмотрено два произвольных представления оператора $\hat{A}$: одно в базисе v_n, другое в базисе u_k:

$$A_{kl} = \int u^*_k \hat{A} u_l\, dv; \quad A'_{kl} = \int v^*_k \hat{A} v_l\, dv; \quad u_k = \Sigma S^*_{kn}\, v_n. \tag{3.3.1}$$

Матрица A выражается через матрицу A' следующим образом:

$$A = SA'\, S^{-1} = SA'\, S^+, \tag{3.3.2}$$

где S — матрица унитарного преобразования, определяемая последним из уравнений (3.3.1).

Доказательство справедливости равенств (3.3.2) можно получить, заменяя u^*_k и u_l в первом из равенств (3.3.1) их разложениями (3.2.5):

$$A_{kl} = \int u^*_k \hat{A} u_l\, dv = \int \left(\sum_n S_{kn} v^*_n \right) \hat{A} \left(\sum_m S^*_{lm} v_m \right) dv =$$

$$= \sum_n \sum_m S_{kn} \int v^*_n \hat{A} v_m\, dv S^*_{lm} = \sum_n \sum_m S_{kn}\, A'_{nm}\, S^+_{ml} = (SA'\, S^+)_{kl}.$$

Если матрица A' эрмитова, то матрица A эрмитова тоже. Другими словами, свойство эрмитовости инвариантно относительно унитарного преобразования. Докажем это, показав что $A_{kl} = A^*_{lk}$ для матрицы A, фигурирующей в (3.3.2):

$$A_{kl} = \sum_{m,n} S_{km} A'_{mn} S^+_{nl} = \sum_{m,n} S_{km} (A'_{mn})^* S^*_{ln}, \quad A_{lk} = \sum_{m,n} S_{lm} A'_{mn} S^*_{kn}.$$

Здесь используется соотношение $A'_{mn} = (A'_{nm})^*$. Взяв комплексно-сопряженное от последнего равенства и поменяв местами m и n, получим

$$(A_{lk})^* = \sum_{mn} S^*_{ln} (A'_{nm})\, S_{km} = A_{kl},$$

что и требовалось доказать.

Главное следствие из полученного результата: *собственные значения эрмитовой матрицы вещественны.*

3.4. Определение собственных функций и собственных значений оператора матричным методом

Отыскание собственных функций и собственных значений произвольного эрмитова оператора A сводится к решению уравнения

$$\hat{A}u_n = A_n u_n. \tag{3.4.1}$$

В качестве примера задачи на собственные значения, которая уже решена, можно указать уравнение (2.2.1). Собственные функции u_n даются выражением (2.2.18), собственные значения в соответствии с (2.2.9) равны $\mathscr{E}_n = \hbar\omega\,(n + 1/2)$.

Задачу на собственные значения (3.4.1) можно решать и по-другому: с использованием рассмотренного матричного метода. Матричное представление оператора $\hat{A}$ в базисе собственных функций u_n приводит к диагональной матрице с элементами, равными собственным значениям A_n:

$$A_{kl} = \int u_k^* \hat{A} u_l \, dv = A_l \int u_k^* u_l \, dv = A_l \delta_{kl}.$$

Следовательно, если известно представление A' оператора $\hat{A}$ в базисе v_n, то можно найти его собственные значения и собственные функции. Эта процедура сводится к определению матрицы S, диагонализирующей A':

$$A_{kl} = (SA'\,S^+)_{kl} = A_k \delta_{kl}.$$

Диагональные элементы A_k суть собственные значения $\hat{A}$. Собственные функции равны

$$u_k(\mathrm{r}) = \sum_n S_{kn}^* v_n(\mathrm{r}). \tag{3.4.2}$$

Если требуется определить только собственные значения $\hat{A}$, то нет нужды находить матрицу преобразования, S. Собственные значения будут решениями алгебраического уравнения

$$\det[A'_{ml} - A_k \delta_{ml}] = 0. \tag{3.4.3}$$

Чтобы убедиться в том, что диагонализация матрицы и решение уравнения (3.4.1) приводят к одним и тем же величинам собственных значений, рассмотрим матричные элементы оператора $\hat{A}$ в базисе u_n. Используя (3.2.1), получаем

$$A_{mn} = \int u_n^* \hat{A} u_m \, dv = A_n \delta_{nm},$$

так что матрица A диагональна и ее элементы равны собственным значениям A_n. Так как матрицы A и A' получаются одна из другой с помощью унитарного преобразования, они имеют одни и те же собственные значения.

3.5. Переходы в системе под влиянием возмущений. Ширина спектральной линии

Речь пойдет о квантовых системах, гамильтониан которых зависит от времени явно. Это имеет место, например, когда система взаимодействует с монохроматическим полем излучения, т. е. возмущение является гармоническим, или когда гамильтониан изменяется скачком — включение постоянного во времени возмущения. Рассмотрим обе эти ситуации и покажем, что в обоих случаях возмущение вызывает переходы между стационарными состояниями невозмущенного гамильтониана.

Представим полный гамильтониан системы в виде

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}'(t), \tag{3.5.1}$$

где $\hat{\mathscr{H}}_0$ — невозмущенный гамильтониан и

$$\hat{\mathscr{H}}_0 u_n = \mathscr{E}_n u_n, \tag{3.5.2}$$

а $\hat{\mathscr{H}}'(t)$ — оператор возмущения. Решение $\psi(t)$ волнового уравнения

$$i\hbar\partial\psi/\partial t = \hat{\mathscr{H}}\psi \tag{3.5.3}$$

можно разложить в ряд по полной ортонормальной системе функций u_n, удовлетворяющих уравнению (3.5.2):

$$\psi(t) = \sum_n a_n(t)\, u_n \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}_n t}{\hbar}\right). \tag{3.5.4}$$

Коэффициенты разложения представлены в виде $a_n(t)\exp(-i\mathscr{E}_n t/\hbar)$. Если $\hat{\mathscr{H}}'(t)$ обращается в нуль, то $a_n(t)$ становятся постоянными.
Подставив (3.5.4) в (3.5.3), получим

$$\sum_n u_n \left[a_n\left(-\frac{i\mathscr{E}_n}{\hbar}\right) e^{-i\mathscr{E}_n t/\hbar} + \dot{a}_n e^{-i\mathscr{E}_n t/\hbar}\right] =$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_n a_n (\hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}')\, u_n e^{-i\mathscr{E}_n t/\hbar},$$

что после умножения на u_k^* и интегрирования приводит к уравнению

$$\dot{a}_k = -\frac{i}{\hbar}\sum_n a_n \mathscr{H}'_{kn} e^{i\omega_{kn} t}, \tag{3.5.5}$$

где $$\omega_{kn} = (\mathscr{E}_k - \mathscr{E}_n)/\hbar.$$

До сих пор анализ был точным и решение уравнения (3.5.5) полностью эквивалентно решению волнового уравнения. Далее введем параметр λ, описывающий «включение» ($\lambda = 1$) и «выключение» ($\lambda = 0$) возмущения. Теперь необходимо взять возмущение в виде $\lambda\mathscr{H}'$ и полный гамильтониан запишется как $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \lambda\hat{\mathscr{H}}$.

Разложив a_n в степенной ряд $a_n^{(0)} + \lambda a_n^{(1)} + \lambda^2 a_n^{(2)} + \ldots$ и подставив эти разложения в (3.5.5), получим

$$\dot{a}_k^{(0)} + \lambda\dot{a}_k^{(1)} + \lambda^2\dot{a}_k^{(2)} + \ldots =$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_n (a_n^{(0)} + \lambda a_n^{(1)} + \lambda^2 a_n^{(2)} + \ldots)\,\lambda\mathscr{H}'_{kn} e^{i\omega_{kn} t}.$$

Если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ слева и справа, возникает система уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{a}_k^{(0)} = 0,\\
&\dot{a}_k^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\sum_n a_n^{(0)}\mathscr{H}'_{kn}(t)\, e^{i\omega_{kn} t},\\
&\dot{a}_k^{(2)} = -\frac{i}{\hbar}\sum_n a_n^{(1)}\mathscr{H}'_{kn}(t)\, e^{i\omega_{kn} t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{a}_k^{(s)} = -\frac{i}{\hbar}\sum_n a_n^{(s-1)}\mathscr{H}'_{kn}(t)\, e^{i\omega_{kn} t}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.6}$$

Решения уравнений нулевого порядка, $a_k^{(0)} = \text{const}$, являются начальными условиями для нашей задачи. Выберем их в виде $a_m^{(0)} = 1$, $a_{n\neq m}^{(0)} = 0$, так что при $t = 0$ система находится в собственном m-м состоянии невозмущенного гамильтониана. В этом случае второе из уравнений (3.5.6) записывается как

$$\dot{a}_k^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}'_{km}\, e^{i\omega_{km}t}. \qquad (3.5.7)$$

Поскольку при $t = 0$ система находилась в m-м состоянии, то $|a_k(t)|^2$ можно рассматривать как вероятность того, что к моменту времени t система перейдет в k-е состояние невозмущенного гамильтониана.

Гармоническое возмущение. Рассмотрим частный случай — возмущение, гармонически изменяющееся во времени:

$$\mathcal{H}'(t) = \begin{cases} \hat{\mathcal{H}}' \exp(-i\omega t) + (\hat{\mathcal{H}}')^+ \exp(i\omega t), & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Выбор $\hat{\mathcal{H}}'(t)$ в виде двух эрмитово-сопряженных слагаемых обеспечивает эрмитовость этого оператора. Подстановка $\hat{\mathcal{H}}'(t)$ в (3.5.7) и интегрирование приводят к

$$a_k^{(1)}(t) = \int_0^t \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\mathcal{H}'_{km}(t')\, e^{i\omega_{km}t'}\, dt' =$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left[\mathcal{H}'_{km}\frac{e^{i(\omega_{km}-\omega)t}-1}{\omega_{km}-\omega} + \mathcal{H}'^{*}_{km}\frac{e^{i(\omega_{km}+\omega)t}-1}{\omega_{km}+\omega}\right]. \qquad (3.5.8)$$

Далее ограничимся случаем, когда ω приблизительно равно $|\omega_{km}|$, т. е. $\hbar\omega \approx |\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_m|$. Вероятность перехода из состояния m в состояние k при этом условии равна

$$|a_k^{(1)}|^2 = \frac{4|\mathcal{H}'_{km}|^2}{\hbar^2}\left\{\frac{\sin^2[1/2(\omega_{km}-\omega)t]}{(\omega_{km}-\omega)^2} + \frac{\sin^2[1/2(\omega_{km}+\omega)t]}{(\omega_{km}+\omega)^2}\right\}, \qquad (3.5.9)$$

где опущены перекрестные члены, так как в практически интересном случае $\omega_{km} \approx \pm\omega$ их роль невелика. Первый член правой части (3.5.9) является доминирующим при $\mathcal{E}_k > \mathcal{E}_m$ и $\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_m \approx \hbar\omega$, тогда как второй член играет главную роль при $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_k \approx \hbar\omega$. Гармоническое возмущение может, следовательно, вызвать переходы как вверх так и вниз по энергии между состояниями m и k, разность энергий которых $\approx\hbar\omega$.

Вычислим вероятность перехода из состояния m в группу близко расположенных состояний k, где $\mathcal{E}_k > \mathcal{E}_m$. Обозначим спектральную плотность конечных состояний через $\rho(\omega)$. Используя только первое слагаемое в (3.5.9), находим

$$|a_k^{(1)}|^2 = \frac{4}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{H}'_{km}|^2\frac{\sin^2[1/2(\omega_{km}-\omega)t]}{(\omega_{km}-\omega)^2}\rho(\omega_{km})\,d\omega_{km}. \qquad (3.5.10)$$

Если $|\mathcal{H}'_{km}|^2$ не является функцией конечного состояния, эту величину можно вынести за знак интеграла. Кроме того, положим время t достаточно большим, чтобы ширина $\Delta(\omega_{km}-\omega) \approx 2\pi/t$ функции $\sin^2[0{,}5(\omega_{km}-\omega)t]/(\omega_{km}-\omega)^2$ была много меньше характерного интервала изменения функции $\rho(\omega)$. При

этих условиях $\rho(\omega)$ можно также вынести за знак интеграла. Воспользовавшись равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(xt/2)}{x^2}\,dx = \frac{\pi t}{2}, \tag{3.5.11}$$

получим

$$|a_k^{(1)}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2}|\mathcal{H}'_{km}|^2 \rho(\omega)\, t. \tag{3.5.12}$$

Вероятность перехода в единицу времени из состояния m в континуум состояний вблизи k равна

$$W_{m\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}'_{km}|^2 \rho(\mathscr{E}_k), \tag{3.5.13}$$

где $\rho(\mathscr{E})d\mathscr{E} = \rho(\omega)d\omega$ — число состояний в интервале $d\mathscr{E}$ с центром в точке $\mathscr{E}$. Это выражение, часто называемое «золотым правилом», занимает центральное место в теории квантовых переходов.

Условие малости $2\pi/t$ по сравнению с характерным интервалом изменения плотности состояний $\rho(\omega)$ позволяет считать, что

$$\frac{\sin^2[{}^1/_2(\omega_{km}-\omega)t]}{(\omega_{km}-\omega)^2} \to \frac{\pi t}{2}\delta(\omega_{km}-\omega).$$

Воспользовавшись последним соотношением, преобразуем (3.5.9) к виду

$$|a_k^{(1)}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2}|\mathcal{H}'_{km}|^2 t\delta(\omega_{km}-\omega) = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}'_{km}|^2 t\delta(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_m-\hbar\omega)$$

или

$$W_{m\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}'_{km}|^2 \delta(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_m-\hbar\omega). \tag{3.5.14}$$

Последнее соотношение определяет вероятность перехода из состояния m в *одно* из состояний k. Формула (3.5.14) особенно полезна в тех случаях, когда нужно принять в расчет специфические особенности функции плотности конечных состояний.

Учитывая оба слагаемых в (3.5.9), можно получить выражение для вероятности переходов как с повышением, так и с понижением энергии:

$$W_{m\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}'_{km}|^2 \delta(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_m-\hbar\omega) + \\ + \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}'_{km}|^2 \delta(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_m+\hbar\omega). \tag{3.5.15}$$

В качестве примера рассмотрим вероятность перехода $W_{m\to k}$ за единицу времени. При этом для определенности будем считать $\mathscr{E}_k > \mathscr{E}_m$. Пусть положение уровня $\mathscr{E}_k$ точно не определено (уровень «размыт»), поэтому можно описать его лишь с помощью плотности вероятности $f(\mathscr{E}_k)$. Тогда $f(\mathscr{E}_k)d\mathscr{E}_k$ дает вероятность того, что энергия уровня заключена между $\mathscr{E}_k$ и $\mathscr{E}_k + d\mathscr{E}_k$ и, следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(\mathscr{E}_k)\,d\mathscr{E}_k = 1.$$

Вероятность перехода, таким образом, равна

$$W_{m\to k}=\frac{2\pi}{\hbar}\,|\mathscr{H}'_{km}|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_m-\hbar\omega)\,f(\mathscr{E}_k)\,d\mathscr{E}_k=\frac{2\pi}{\hbar}\,|\mathscr{H}'_{km}|^2 f(\mathscr{E}_m+\hbar\omega). \tag{3.5.16}$$

Функцию $f(\mathscr{E})$ можно заменить соответствующей функцией в пространстве частот $g(\nu)=2\pi\hbar f(\mathscr{E})$, удовлетворяющей нормировочному соотношению $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\nu)d\nu=1$, и преобразовать (3.5.16) к виду

$$W_{m\to k}=\frac{1}{\hbar^2}\,|\mathscr{H}'_{km}|^2\,g(\nu_m+\nu), \tag{3.5.17}$$

где $g(\nu)$ — нормированная функция формы линии. Последняя формула описывает зависимость вероятности перехода от частоты возмущения, ν. «Размытие» перехода и необходимость вероятностного описания с помощью функции формы линии, $g(\nu)$, могут быть вызваны различными причинами.

Рассмотрим два типичных механизма уширения линии.

1) Энергетические уровни атома или иона в кристалле зависят от локальных электрических полей, создаваемых соседними ионами. Кристаллическое поле сдвигает уровни $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{E}_k$, поэтому разность $\mathscr{E}_n-\mathscr{E}_k$ меняется от одной ячейки кристаллической решетки к другой, следуя флуктуациям кристаллического поля.

2) Если излучающий атом движется и компонента скорости атома в направлении наблюдателя равна v, то частота излучения изменится на величину доплеровского сдвига $\Delta\nu=(v/c)\,\nu$. Это приводит к тому, что ширина линии излучения (или поглощения) газа увеличивается до значения $\Delta\nu_D\sim(v/c)\sqrt{kT/m}$, где T — температура; c — скорость света; m — масса атома. Если распределение по скоростям является максвелловским, то форма линии представляет собой гауссову кривую.

Указанные два вида уширения относятся к классу *неоднородных уширений*. Уширение линии из-за конечного времени жизни системы в состояниях m и k относится к другому классу. Оно является следствием принципа неопределенностей, согласно которому $\Delta(\mathscr{E}_m-\mathscr{E}_k)\approx\hbar(\tau_m^{-1}+\tau_k^{-1})$, τ_m и τ_k — времена жизни уровней. Такое уширение называют *однородным*. Основное различие между этими двумя классами состоит в том, что однородное уширение линии может наблюдаться у отдельно взятого атома, в то время как неоднородное уширение характерно для ансамбля атомов, каждый из которых имеет собственную, немного отличную от других резонансную частоту. Подробно эти вопросы обсуждаются в гл. 8.

Пределы применимости «золотого правила» При выводе соотношений (3.5.13) и (3.5.15) использованы два условия. Первое условие состоит в том, чтобы $2\pi/t$ было меньше характерного интервала, на котором заметно меняется плотность $\rho(\omega)$. Второе — это просто условие пригодности первого приближения теории возмущений, $|a_k^{(1)}(t)|^2\ll 1$; в иных случаях необходимо учитывать члены высших порядков. Это второе условие можно представить, используя (3.5.9), в виде $|\mathscr{H}'_{km}|/\hbar\ll 1/t$. Физический смысл этого условия таков: результаты, даваемые теорией возмущений в первом приближении, справедливы только для промежутков времени настолько малых, что вероятность перехода из начального состояния много меньше единицы.

Комбинируя оба условия, получаем пределы применимости формул (3.5.13) и (3.5.15):

$$|\mathscr{H}'_{km}|/\hbar\ll 1/t\ll\Delta\nu\,. \tag{3.5.18}$$

Случаи, когда (3.5.18) не выполняются, должны рассматриваться отдельно, и некоторые из них приведены в гл. 15.

Возмущение в виде ступенчатой функции. Весьма интересен случай возмущения, имеющего форму ступенчатой функции

$$\hat{\mathcal{H}}'(t)=0,\ t<0;\ \hat{\mathcal{H}}'(t)=\hat{\mathcal{H}}',\ t>0. \tag{3.5.19}$$

Используя второе уравнение (3.5.6) при $a_n(0)=\delta_{mn}$ и повторяя все преобразования, ведущие к (3.5.14), получаем

$$W_{m\to k}=\frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}'_{km}|^2\,\delta(\mathcal{E}_m-\mathcal{E}_k)=\frac{1}{\hbar^2}|\mathcal{H}'_{km}|^2\,\delta(\nu_m-\nu_k)\cdot \tag{3.5.20}$$

Таким образом, переходы имеют место только между состояниями с одной и той же энергией. На практике этот подход часто применяется, когда гамильтониан содержит член, показывающий взаимодействие между различными частями физической системы. С помощью (3.5.20) можно вычислить скорость обмена энергией двух подсистем за счет взаимодействия $\hat{\mathcal{H}}'$ при постоянстве полной энергии системы в целом.

3.6. Матрица плотности

При изучении квантовомеханических систем приходится иметь дело с двумя типами неопределенностей. Неопределенности первого типа (см. § 1.2) имеют чисто квантовую природу; вероятностная интерпретация волновой функции, в конечном счете, является следствием принципа неопределенности. Неопределенности второго типа возникают, когда нет достаточной информации для определения квантовомеханического состояния системы, т. е. ее волновой функции. Для решения задач, в которых имеется оба типа неопределенностей, используется матрица плотности или статистический оператор, как его еще называют[1].

Метод матрицы плотности позволяет вычислять средние значения физических величин, если точная волновая функция системы неизвестна. Для начала рассмотрим квантовомеханическую систему в состоянии $\psi(\mathbf{r}, t)$ и воспользуемся разложением

$$\psi(\mathbf{r}, t)=\sum_n c_n(t)\,u_n(\mathbf{r}), \tag{3.6.1}$$

где

$$c_n(t)=\int u_n^*(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}, t)\,dv \tag{3.6.2}$$

и $u_n(\mathbf{r})$ — произвольная ортонормальная система функций. Пусть $\hat{F}$ есть оператор, соответствующий некоторой физической величине. Среднее значение F равно

$$\langle F\rangle=\int\psi^*(\mathbf{r}, t)\,\hat{F}\psi(\mathbf{r}, t)\,dv=\sum_{m,n}c_m^*(t)\int u_m^*(\mathbf{r})\,\hat{F}u_n(\mathbf{r})\,dv\,c_n(t). \tag{3.6.3}$$

С помощью (3.2.1) получим

$$\langle F\rangle=\sum_{m,n}c_m^*F_{mn}c_n. \tag{3.6.4}$$

Теперь предположим, что точное состояние системы неизвестно. Отражением этого является неопределенность коэффициентов c_m в разложении $\psi(\mathbf{r}, t)$. Допустим, однако, что имеются все сведения, необходимые для вычисления среднего по ансамблю значения $\overline{c_m^*c_n}$. Это среднее будет обозначаться чертой

[1] В зависимости от того, описываются состояния волновой функцией или нет, различают чистые и смешанные состояния. — *Прим. ред.*

над буквой. Таким образом, среднее значение можно найти с помощью соотношения

$$\langle \bar{F} \rangle = \sum_{m,n} \overline{c_m^* c_n} F_{mn}. \tag{3.6.5}$$

Удобно ввести обозначение

$$\rho_{nm} = \overline{c_m^* c_n}. \tag{3.6.6}$$

Матрица, составленная из величин ρ_{mn}, и есть матрица плотности. Перепишем выражение для $\langle \bar{F} \rangle$, используя (3.1.1):

$$\langle \bar{F} \rangle = \sum_n \langle \hat{\rho} \hat{F} \rangle_{nn}. \tag{3.6.7}$$

Сумма диагональных элементов называется следом матрицы и обозначается знаком Sp, отсюда

$$\langle \bar{F} \rangle = \mathrm{Sp}\,(\hat{\rho} \hat{F}). \tag{3.6.8}$$

Из (3.6.6) следует, что $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$, т. е. матрица ρ эрмитова. Другое важное соотношение

$$\mathrm{Sp}\,\rho = \sum_m \overline{c_m^* c_n} = 1$$

следует прямо из условия нормировки волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$.

3.7. Среднее по ансамблю

Усреднение, которое было обозначено чертой, называется усреднением по ансамблю. Физически процедуру усреднения по ансамблю можно интерпретировать следующим образом. Приготовляется ансамбль из N систем (N велико), причем все системы одинаковы в той мере, в какой об этом можно судить на основании имеющейся неполной информации. Состояние системы может изменяться со временем. Пусть система с номером s характеризуется волновой функцией

$$\psi_s(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n^{(s)}(t)\, u_n(\mathbf{r}), \tag{3.7.1}$$

где $s = 1, 2, \ldots, N$. Среднее по ансамблю вычисляется по следующей формуле:

$$\rho_{nm}(t) = \overline{c_m^*(t)\, c_n(t)} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} c_m^{(s)*}(t)\, c_n^{(s)}(t). \tag{3.7.2}$$

Таким образом, среднее по ансамблю — это среднее по всем N системам.

В такой трактовке матрица плотности характеризует вероятностные свойства ансамбля. Диагональный элемент ρ_{nn} дает вероятность обнаружить какую-либо из систем, образующих ансамбль, в состоянии $u_n(\mathbf{r})$. Недиагональный элемент, ρ_{nm}, равен среднему по ансамблю от $c_m^*(t) c_n(t)$ и, как будет показано в гл. 8, характеризует излучательные свойства ансамбля.

3.8. Эволюция матрицы плотности во времени

Волновая функция физической системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\hat{\mathcal{H}} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \partial \psi(\mathbf{r}, t)/\partial t. \tag{3.8.1}$$

Подставив сюда разложение (3.6.1) для $\psi(\mathbf{r}, t)$.

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} u_n(\mathbf{r}) = \sum_n c_n(t) \hat{\mathcal{H}} u_n(\mathbf{r}) \tag{3.8.2}$$

и вычислив скалярное произведение обеих частей этого уравнения на функцию $u_m(\mathbf{r})$, получим

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_m(t) = \sum_n c_n(t) \mathcal{H}_{mn}. \tag{3.8.3}$$

Но согласно (3.6.6)

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = c_n \overline{\frac{\partial c_m^*}{\partial t}} + \overline{C_m^* \frac{\partial c_n^*}{\partial t}}. \tag{3.8.4}$$

Используя (3.8.2) и эрмитовость оператора $\hat{\mathcal{H}}$, можно привести (3.8.4) к виду

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{\mathcal{H}}]. \tag{8.3.5}$$

Более подробное изложение свойств матрицы плотности и методов ее вычисления для конкретных физических систем можно найти в литературе [1—4].

Формализм матрицы плотности будет использован в гл. 8 и 15 для описания взаимодействия двухуровневой системы с полем излучения, а в приложении 2 — для описания нелинейных оптических процессов.

Глава 4

КОЛЕБАНИЯ РЕШЕТКИ И ИХ КВАНТОВАНИЕ

Колебания решетки рассматриваются в этой главе по следующим причинам: 1) спектр колебаний решетки и формализм их описания необходимы для объяснения некоторых механизмов релаксации; 2) формализм квантования поля колебаний решетки служит моделью для квантования других бозонных полей; 3) этот формализм использован в гл. 18 при изучении мандельштам-бриллюэновского рассеяния света.

4.1. Колебания однородной линии

Рассмотрим одномерную задачу об однородной линии с плотностью массы ρ (кг/м). Обозначим смещение точки x от положения равновесия через $u(x, t)$. Пусть сила в точке x пропорциональна напряжению du/dx:

$$F = c\partial u/\partial x, \tag{4.1.1}$$

что соответствует закону Гука. На элемент Δx линии действует полная сила

$$F(x+\Delta x)-F(x)=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x,$$

и уравнение движения имеет вид

$$c\partial^2 u/\partial x^2 = \rho\partial^2 u/\partial t^2. \qquad (4.1.2)$$

Предполагая решение в виде $\exp[i(\omega t \pm kx)]$, находим

$$u = u_0 \exp[i(\omega t \pm kx)]; \quad k=\omega/v_s, \quad v_s=\sqrt{c/\rho}. \qquad (4.1.3)$$

Следовательно, в линии могут распространяться волны с фазовой скоростью $v_s = \sqrt{c/\rho}$. Дисперсионное уравнение имеет вид $\omega = kv_s$. Поскольку v_s — постоянная, дисперсия в линии отсутствует.

Общим решением (4.1.2) является суперпозиция частных решений, его можно записать как

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\omega)\, e^{i\omega(t-x/v_s)}\, d\omega. \qquad (4.1.4)$$

4.2. Волны в цепочке из одинаковых атомов

Чтобы приблизить изучаемую модель к реальной ситуации, рассмотрим цепочку частиц с массами M, расположенных на расстоянии a друг от друга и соединенных невесомыми пружинами с коэффициентом упругости β, как показано на рис. 4.1. Обозначив смещение n-го атома из положения равновесия через q_n, запишем уравнение его движения:

$$M\ddot{q}_n = \beta(q_{n+1}-q_n)-\beta(q_n-q_{n-1})=\beta(q_{n+1}+q_{n-1}-2q_n). \qquad (4.2.1)$$

По аналогии с однородной линией предположим, что основное гармоническое решение представляет собой волну с эффективной постоянной распространения k, соответствующей фазовому сдвигу ka между синусоидальными колебаниями двух соседних частиц,

$$q_{k,n} = \xi_k \exp[i(\omega t + kna)]. \qquad (4.2.2)$$

Подставим это выражение в (4.2.1):

$$-\omega^2 M = \beta(e^{ika}+e^{-ika}-2)=\beta(e^{ika/2}-e^{-ika/2})^2.$$

Волнам, распространяющимся во встречных направлениях, соответствуют разные знаки постоянной распространения k. При этом дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega = \sqrt{\frac{4\beta}{M}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| = \sqrt{\frac{\beta}{M}}\sqrt{2[1-\cos(ka)]}. \qquad (4.2.3)$$

Эта зависимость изображена на рис. 4.2.

Возьмем теперь $q_{k,n}$ для одной из волн и увеличим k на $l\,(2\pi/a)$, где l — целое число. Из уравнения (4.2.3) получим $\omega\,(k + l2\pi/a) = \omega\,(k)$. Используя это, с помощью (4.2.2) находим

$$q_{(k+l\,2\pi/a),\,n} = \xi_k \exp\left[i\,(\omega t + kna)\right] \exp\left(i2\pi nl\right) = q_{k,\,n},$$

так что всем возможным волнам соответствуют значения k в интервале $2\pi/a$. Обычно принимают — $\pi/a \leqslant k \leqslant \pi/a$, как показано на рис. 4.2. Этот интервал называется первой зоной Бриллюэна. Фазовая скорость при $ka \ll 1$ равна

$$v_\phi = \sqrt{\beta/M}\,a. \tag{4.2.4}$$

Эта величина совпадает с фазовой скоростью v_s для однородной линии, если произвести замену $\rho \to M/a$ и $c \to \beta a$. Условие $ka \ll 1$ означает, что длина акустической волны $\lambda = 2\pi/k$ много больше, чем расстояние между атомами a и, следовательно, при исследовании волновых процессов цепочку можно рассматривать как однородную линию.

Групповая скорость выражается формулой

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{\beta}{M}}\,a\cos\left(\frac{ka}{2}\right), \tag{4.2.5}$$

поэтому на краях первой зоны Бриллюэна $v_{\text{гр}} = 0$. Наличие частоты отсечки и равенство нулю групповой скорости, когда сдвиг фаз на периоде структуры (в нашем случае ka) равен π, является общим свойством всех периодических структур без потерь. Этот момент подробно обсужден Бриллюэном [1]. Самое существенное различие между однородной линией и дискретной цепочкой состоит в том, что в последней существует верхний предел по частоте, равный в соответствии с (4.2.3) $\omega_m = 2\sqrt{\beta/M}$. Как следует из (4.2.4) эта частота равна $2v_s/a$. Принимая типичные значения $v_s = 3 \cdot 10^3$ м/с (в твердом теле) а $a = 3 \cdot 10^{-10}$ м, находим $f_m = \omega_m/2\pi \approx 3 \cdot 10^{12}$ Гц, что соответствует длине электромагнитной волны 0,1 мм. Таким образом, если в акустических экспериментах использовать частоты микроволнового диапазона, то еще будет выполняться условие отсутствия дисперсии $ka \ll 1$.

Спектр колебаний цепочки. Частное решение (4.2.2) называется акустической модой.

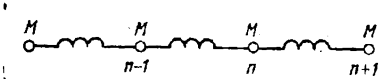


Рис. 4.1. Цепочка из одинаковых атомов

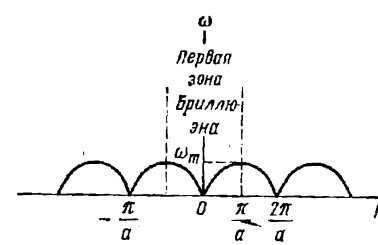


Рис. 4.2. Дисперсионная кривая дискретной цепочки атомов

Число независимых мод дискретной цепочки должно быть равным числу частиц в цепочке. Разрешенные значения можно определить, рассматривая граничные условия. Один из возможных вариантов граничных условий состоит в том, что если в цепочке N атомов, то первый и последний атомы жестко закреплены. Другой — в том, что движение любого атома повторяется через каждые N атомов. Оба эти условия приводят к одинаковым результатам; для определенности условимся пользоваться периодическими граничными условиями[1)].

Движение n-го атома можно записать в соответствии с (4.2.2) в виде

$$q_n(t) = \sum_k \xi_k e^{i(\omega t + kna)}. \tag{4.2.6}$$

Периодическое граничное условие $q_{n+N} = q_n$ удовлетворяется при

$$k = 2m\pi/Na, \tag{4.2.7}$$

где m — целое число; в этом можно убедиться подстановкой в (4.2.6). Таким образом, расстояние между соседними модами в k пространстве одинаково и равно $\Delta k = 2\pi/Na$. Поскольку изменение k ограничено первой зоной Бриллюэна $-\pi/a \leqslant k \leqslant \pi/a$, полное число мод $2\pi/a\Delta k = N$, как и следовало ожидать.

4.3. Цепочка из атомов двух сортов

Решетки большинства кристаллов содержат различные сорта атомов. Ионный кристалл NaCl, например, представляет собой кубическую решетку, в которой соседние узлы заняты попеременно ионами Na^+ и Cl^-. В качестве приближения рассмотрим цепочку, в которой каждый атом массы M расположен рядом с атомами массы m. Пусть M-атомы занимают нечетные узлы решетки, а m-атомы — четные узлы. Используя обозначения § 4.2, запишем уравнения движения двух соседних атомов в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_{2n} &= \beta(q_{2n+1} + q_{2n-1} - 2q_{2n}), \\ M\ddot{q}_{2n+1} &= \beta(q_{2n+2} + q_{2n} - 2q_{2n+1}). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Предполагая решения в виде

$$q_{2n,k} = \xi_k e^{i(\omega t + 2nka)}, \quad q_{2n+1,k} = \eta_k e^{i[\omega t + (2n+1)ka]}, \tag{4.3.2}$$

подставим (4.3.2) в (4.3.1):

$$\begin{aligned} -\omega^2 m\xi_k &= \beta\eta_k[\exp(ika) + \exp(-ika)] - 2\beta\xi_k, \\ -\omega^2 M\eta_k &= \beta\xi_k[\exp(ika) + \exp(-ika)] - 2\beta\eta_k. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

[1)] Эти условия принято называть условиями цикличности Борна—Кармана, см., например, [7, с. 55]. — *Прим. пер.*

Характеристическое уравнение, обеспечивающее нетривиальные решения для ξ и η,

$$(2\beta - m\omega^2)(2\beta - M\omega^2) - 4\beta^2 \cos^2(ka) = 0 \qquad (4.3.4)$$

определяет

$$\omega^2 = \beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \beta\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(ka)}{Mm}}, \qquad (4.3.5)$$

Анализ (4.3.5) показывает, что каждому данному k соответствуют две частоты. При $ka \ll 1$ с точностью до первого порядка по ka имеем

$$\omega^2 = \beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\left[1 - \frac{2(ka)^2}{Mm(1/m+1/M)^2}\right],$$

откуда при $ka \ll 1$

$$\omega_1 = \sqrt{2\beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}, \quad \omega_2 = ka\sqrt{\frac{2\beta}{M+m}}. \qquad (4.3.6)$$

При $ka = \pi/2$

$$\omega_1 = \sqrt{2\beta/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{2\beta/M}. \qquad (4.3.7)$$

Верхняя ветвь дисперсионной кривой называется оптической. Ее наибольшая частота равна $\sqrt{2\beta\,(1/m + 1/M)}$ и принимает это значение при $ka = 0$, а наименьшая частота равна $\sqrt{2\beta/m}$ при $m < M$ или $\sqrt{2\beta/M}$ при $m > M$ и принимает это значение при $ka = \pi/2$. Нижняя ветвь соответствует распространению волн в цепочке одинаковых атомов и называется акустической. При низких частотах ($ka \ll 1$) дисперсия в этой ветви отсутствует, а фазовая скорость равна в соответствии с (4.3.6) скорости звука, $a\sqrt{2\beta/(M+m)}$. Наибольшая частота акустической ветви равна меньшей из величин $\sqrt{2\beta/m}$ и $\sqrt{2\beta/M}$ и принимает это значение при $ka = \pi/2$.

Акустическая (*1*) и оптическая (*2*) ветви изображены на рис. 4.3 для случая $m < M$. Акустической ветви при $ka \ll 1$ соответствуют равные по амплитуде и почти синфазные отклонения соседних атомов. Оптической ветви соответствуют противофазные движения атомов с амплитудами, обратно пропорциональными массам атомов. Колебания решетки можно возбудить электромагнитной волной такой же частоты и длины,

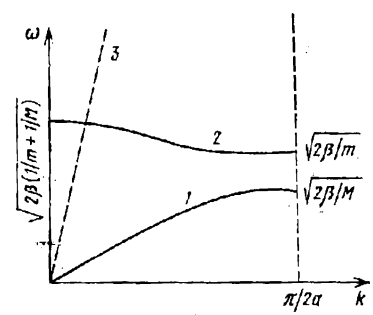


Рис. 4.3. Дисперсионные кривые одномерного кристалла, содержащего два сорта атомов с массами m и M ($m<M$):
1 — акустическая ветвь; *2* — оптическая ветвь; *3* — закон дисперсии для света в кристалле

т. е. с такой же фазовой скоростью. Равенство фазовых скоростей иллюстрируется точкой пересечения кривых $\omega(k)$ для электромагнитной и звуковой волн (рис. 4.3). Так как фазовая скорость света [наклон графика зависимости $\omega(k)$] приблизительно в 10^5 раз больше, чем фазовая скорость акустической волны, пересечение с оптической ветвью возможно только при $ka \approx 0$.

Моды акустической ветви не взаимодействуют с электромагнитным излучением в силу указанного различия фазовых скоростей. В экспериментах с акустической модой возбуждаются колебания атомов поверхности или слоя толщиной меньше длины волны звука, так как при этом не требуется равенства фазовых скоростей [2].

4.4. Решеточные суммы[1)]

В § 4.2 найдено смещение произвольной точки решетки в момент времени t и представлено в виде

$$q_n(t) = \sum_k \xi_k(t)\, e^{ikna},$$

где $k = 2m\pi/Na$, тогда как $m = -N/2 + 1;\ -N/2 + 2,\ \ldots\ N/2$. Это частный вид разложения в ряд Фурье функции q_n с периодом $n = N$. Поскольку «координатная» переменная n (точнее, an) ограничена совокупностью N точек, сумма содержит только N членов.

Перепишем выражение для q_n, введя нормированную переменную Q_k:

$$q_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k Q_k(t)\, e^{ikna}. \qquad (4.4.1)$$

Поскольку система функций $\exp(ikna)$ полна и ортогональна, по ней можно разложить произвольную функцию, заданную на N узлах решетки. Эти функции обладают, как и (1.2.11), следующим свойством:

$$\sum_k e^{ik(s-n)a} = N\delta_{s,n} \qquad (4.4.2)$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^{N} q_s = e^{-iksa}. \qquad (4.4.3)$$

В правильности этого выражения можно убедиться, подставив его в (4.4.1) и используя (4.4.2).

[1)] В физике твердого тела принято называть решеточными суммами выражения, определяющие полную электростатическую энергию системы ионов, см., например, [7, с. 54]. Здесь же имеются в виду просто некоторые вспомогательные суммы по узлам решетки или нормальным колебаниям. — *Прим. ред.*

Другая решеточная сумма, которая будет нужна в следующем параграфе, имеет вид

$$\sum_{r=1}^{N} e^{i(k-k')ra} = N\delta_{k,k'}. \qquad (4.4.4)$$

4.5. Квантование акустической ветви колебаний решетки [3—5]

Покажем, что ансамбль из N колебаний в цепочке из N одинаковых атомов формально эквивалентен N независимым гармоническим осциллятором.

Гамильтониан (одномерного) кристалла представляет собой сумму операторов кинетической и потенциальной энергий отдельных атомов:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\left[\frac{\hat{p}_r^2}{m} + \beta(q_{r+1}-q_r)^2\right], \qquad (4.5.1)$$

где β — эффективный коэффициент упругости. Обратимся сначала к кинетической энергии. Разложение $\hat{p}_r$ в ряд по колебаниям решетки, как и (4.4.1), дает

$$\hat{p}_r = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \hat{P}_k e^{-ikra}\left(\hat{P}_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_r \hat{p}_r e^{ikra}\right), \qquad (4.5.2)$$

откуда

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{\hat{p}_r^2}{2m} = \frac{1}{2mN}\sum_{k,k',r}\hat{P}_k\hat{P}_{k'}e^{-i(k+k')ra} =$$

$$= \frac{1}{2mN}\sum_{k,k'}\hat{P}_k\hat{P}_{k'}N\delta_{k,-k'} = \frac{1}{2m}\sum_k \hat{P}_k\hat{P}_{-k}.$$

Напомним, что P_k — оператор, полученный из $\hat{p}_r$ преобразованием Фурье. Поскольку операторы $\hat{p}_r$ и $\hat{q}_r$ эрмитовы, из (4.4.1) следует:

$$\hat{Q}_{-k} = \hat{Q}_k^+, \quad \hat{P}_{-k} = \hat{P}_k^+ . \qquad (4.5.3)$$

Потенциальную энергию

$$\frac{\beta}{2}\sum_r(\hat{q}_{r+1}-\hat{q}_r)^2 = \frac{\beta}{2}\sum_r(\hat{q}_{r+1}^2 + \hat{q}_r^2 - 2\hat{q}_{r+1}\hat{q}_r)$$

с помощью (4.4.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{\beta}{2N}\sum_{k,k'}\left\{\hat{Q}_k\hat{Q}_{k'}\left[e^{i(k+k')a} - e^{ika} - e^{ik'a} + 1\right]\sum_r e^{i(k+k')ra}\right\}.$$

Заменив сумму по r на $N\delta_{k,-k'}$ в соответствии с (4.4.4), получим

$$\beta \sum_k \hat{Q}_k \hat{Q}_{-k} [1 - \cos(ka)]. \tag{4.5.4}$$

Таким образом, полный гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \frac{1}{2m} \hat{P}_k \hat{P}_{-k} + \beta \hat{Q}_k \hat{Q}_{-k} [1 - \cos(ka)]. \tag{4.5.5}$$

С помощью (4.4.1) и (4.5.2) найдем коммутатор

$$[\hat{P}_k, \hat{Q}_k] = \frac{1}{N} \left[\sum_s \hat{p}_s e^{ik' sa}, \sum_r q_r e^{-ikra} \right] = -i\hbar\delta_{k,k'}, \tag{4.5.6}$$

используя для этого также (4.4.4) и правило коммутации $[\hat{p}_s, \hat{q}_r] = -i\hbar\delta_{r,s}$. Гамильтониан (4.5.5) по виду напоминает сумму гамильтонианов отдельных осцилляторов, но отличается от нее наличием смешанных членов с индексами k и $-k$. Чтобы избавиться от них, введем операторы рождения и уничтожения, определяемые в соответствии с выражениями (2.2.24), (2.2.25) равенствами

$$\hat{a}_k^+ = \frac{\alpha\sqrt{g_k}}{\sqrt{2}} \hat{Q}_{-k} - \frac{i}{\sqrt{2g_k}\hbar\alpha} \hat{P}_k, \quad \hat{a}_k = \frac{\alpha\sqrt{g_k}}{\sqrt{2}} \hat{Q}_k + \frac{i}{\sqrt{2g_k}\hbar\alpha} \hat{P}_{-k}, \tag{4.5.7}$$

где $\alpha^4 = m\beta/\hbar^2$; $g_k = \sqrt{2[1 - \cos(ka)}$.

Уравнения (4.5.7) согласуются с (4.5.3). Разрешив их относительно $\hat{P}_k$ и $\hat{Q}_k$, получим

$$\hat{P}^+_{-k} = \hat{P}_k = \frac{i\hbar\alpha\sqrt{g_k}}{\sqrt{2}} (\hat{a}_k^+ - \hat{a}_{-k}),$$

$$\hat{P}_k^+ = \hat{P}_{-k} = \frac{i\hbar\alpha\sqrt{g_k}}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+_{-k} - \hat{a}_k); \tag{4.5.8}$$

$$\hat{Q}_k^+ = \hat{Q}_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2g_k}\alpha} (\hat{a}_k^+ + \hat{a}_{-k}),$$

$$\hat{Q}^+_{-k} = \hat{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{2g_k}\alpha} (\hat{a}^+_{-k} + \hat{a}_k). \tag{4.5.9}$$

Операторы $\hat{a}_k$ и $\hat{a}_k^+$ удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^+] = -\frac{i}{2\hbar} [\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] + \frac{i}{2\hbar} [\hat{P}_{-k}, \hat{Q}_{-k'}] = \delta_{k,k'}. \tag{4.5.10}$$

Подставим полученные выражения для $\hat{P}_k$ и $\hat{Q}_k$ в k-й член суммы (4.5.5):

$$\hat{\mathcal{H}}_k = \frac{1}{2m}\hat{P}_k\hat{P}_{-k} + \beta\hat{Q}_k\hat{Q}_{-k}[1-\cos(ka)] =$$

$$= -\frac{\hbar^2\alpha^2 g_k}{4m}(\hat{a}_k^+ - \hat{a}_{-k})(\hat{a}_{-k}^+ - \hat{a}_k) +$$

$$+\frac{\beta}{2\alpha^2 g_k}(\hat{a}_k^+ + \hat{a}_{-k})(\hat{a}_{-k}^+ + \hat{a}_k)[1-\cos(ak)].$$

Раскроем скобки, используя соотношения $\alpha^2 = \sqrt{m\beta}/\hbar$; $g_k = \sqrt{2[1-\cos(ka)]}$; $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta_{k,k'}$ и дисперсионное уравнение (4.2.3): $\omega_k = \sqrt{\beta/m}\sqrt{2[1-\cos(ka)]} = g_k\sqrt{\beta/m}$. После преобразований получим

$$\hat{\mathcal{H}}_k = \frac{\hbar}{2}\omega_k(\hat{a}_k^+\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^+\hat{a}_{-k} + 1). \qquad (4.5.11)$$

Полный гамильтониан равен

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hat{\mathcal{H}}_k = \sum_k \hbar\omega_k\left(\hat{a}_k^+\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right), \qquad (4.5.12)$$

где при суммировании k пробегает симметрично и положительные, и отрицательные значения.

Сравнивая (4.5.12) с гамильтонианом гармонического осциллятора (2.2.30) и используя (4.5.10), заметим, что одномерный кристалл эквивалентен в квантовомеханическом смысле N независимым гармоническим осцилляторам[1]. Гармонический осциллятор характеризуется собственными функциями u_{n_k}, зависящими от $\hat{Q}_k$. Эти функции по прямой аналогии с (2.2.27) удовлетворяют соотношениям

$$\hat{a}_k^+ u_{n_k} = \sqrt{n_k+1}\, u_{n_k+1}, \quad \hat{a}_k u_{n_k} = \sqrt{n_k}\, u_{n_k-1},$$
$$\hat{a}_k^+\hat{a}_k u_{n_k} = n_k u_{n_k}, \qquad (4.5.13)$$

причем n_k, число квантов (фононов) в k-й моде, лежит в пределах от 0 до ∞. Волновая функция всего кристалла представляет собой произведение волновых функций отдельных мод:

$$\Phi = u_{n_1}u_{n_2}\ldots u_{n_N} = \prod_{k=1}^{N} u_{n_k}. \qquad (4.5.14)$$

---

[1] Представление энергии колебательной системы в виде суммы энергий отдельных мод возможно и в классической механике при использовании так называемой формы нормальных колебаний, см., например, [8, с. 17]). — *Прим. ред.*

Соответствующую ей полную энергию кристалла найдем с помощью (4.5.12) и (4.5.13):

$$\mathscr{E} = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2}\right).$$

Явная зависимость от времени операторов рождения и уничтожения в гайзенберговском представлении дается уравнением

$$\frac{d\hat{a}_j}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathscr{H}}, \hat{a}_j\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right), \hat{a}_j\right].$$

Неисчезающим является только член с $k = j$; поэтому

$$\frac{d\hat{a}_j}{dt} = i\omega_j\left[\hat{a}_j^+ \hat{a}_j, \hat{a}_j\right] = -i\omega_j \hat{a}_j,$$

откуда

$$\hat{a}_j(t) = a_j(0)\exp(-i\omega_j t), \quad \hat{a}_j^+(t) = \hat{a}_j^+(0)\exp(i\omega_j t). \quad (4.5.15)$$

Движение n-го атома на языке операторов рождения и уничтожения описывается следующим образом:

$$\hat{q}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \hat{Q}_k(t)\,e^{ikna} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_k \left(\hat{Q}_k e^{ikna} + \hat{Q}_{-k} e^{-ikna}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_k \left(\hat{Q}_k e^{ikna} + \hat{Q}_k^+ e^{-ikna}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2g_k}\,\alpha}\left(\hat{a}_k^+ e^{-ikna} + \hat{a}_k e^{ikna}\right). \quad (4.5.16)$$

Здесь использованы соотношения (4.5.3), (4.5.8) и (4.5.9). Индекс суммирования k пробегает как положительные, так и отрицательные значения. Используя формулы (4.5.15), получаем

$$\hat{q}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2g_k}\,\alpha}\left[\hat{a}_k^+(0)\,e^{i(\omega_k t - kna)} + \right.$$

$$\left. + \hat{a}_k(0)\,e^{-i(\omega_k t - kna)}\right]. \quad (4.5.17)$$

Глава 5

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ИХ КВАНТОВАНИЕ

В этой главе даны основы теории электромагнитного поля, используемые в книге. Изложены следующие вопросы: 1) распространение плоских волн в однородных изотропных средах (этот материал используется при рассмотрении эффектов электрооптики, магни-

тооптики и фотоупругости); 2) сохранение и диссипация энергии; 3) разложение электромагнитного поля по модам резонатора (данный материал используется затем в гл. 9 при выводе условий генерации лазера, в гл. 13 при анализе шумов лазера); 4) квантование электромагнитного поля, что составляет основу теории спонтанного излучения.

5.1. Перенос энергии электромагнитного поля, ее сохранение и поглощение

Выведем формулы, выражающие законы переноса энергии, ее диссипации и сохранения при распространении электромагнитного излучения в материальных средах. Исходными являются уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t, \tag{5.1.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \tag{5.1.2}$$

и материальные уравнения, связывающие векторы поляризации и намагниченности с векторами индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{5.1.3}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{5.1.4}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока, А/м^2; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ — векторы электрического и магнитного поля соответственно; $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — векторы электрической и магнитной индукции; $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ — поляризация и намагниченность среды (дипольный момент единицы объема); ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума.

За подробным обсуждением уравнений Максвелла читателю следует обратиться к любому учебнику по теории электромагнитного поля, например [1, 4].

С учетом (5.1.3) и (5.1.4) уравнения (5.1.1) и (5.1.2) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}), \tag{5.1.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \tag{5.1.6}$$

Умножая (5.1.5) скалярно на $\mathbf{E}$ и используя соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

получаем

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{5.1.7}$$

Умножим (5.1.6) скалярно на **H**

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}) - \mu_0\mathbf{H}\frac{\partial M}{\partial t}. \qquad (5.1.8)$$

Вычитая (5.1.8) из (5.1.7) и используя векторное тождество

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}, \qquad (5.1.9)$$

приходим к уравнению

$$-\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\mu_0}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\right) + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}. \qquad (5.1.10)$$

Интегрируя (5.1.10) по произвольному объему V и применяя теорему Гаусса (см. [1,4]) $\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dv = \int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,da$, где $\mathbf{A}$ — произвольное векторное поле; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, ограничивающей объем V; dv и da — элементарные объем и площадь соответственно, получаем

$$-\int_V \mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dv = \int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathbf{n}\,da = \int_V \left[\mathbf{E}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\mathbf{E}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0}{2}\mathbf{H}\mathbf{H}\right) + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}\right] dv. \qquad (5.1.11)$$

Равенство (5.1.11) выражает суть теоремы Пойнтинга, а вектор называют обычно вектором Пойнтинга. В теории электромагнитного поля левая часть (5.1.11), т. е.

$$-\int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathbf{n}\,da,$$

интерпретируется как полная мощность, втекающая в объем, ограниченный поверхностью S. Первый член в правой части — это мощность, расходуемая на движение зарядов (иначе говоря, поглощаемая сторонними токами). Второй и третий члены соответствуют скорости возрастания запасенной в вакууме энергии $\mathscr{E}_{\text{вак}}$, где

$$\mathscr{E}_{\text{вак}} = \int_V \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{\mu_0}{2}\mathbf{H}\mathbf{H}\right) dv. \qquad (5.1.12)$$

Особый интерес для дальнейшего представляет предпоследний член $\mathbf{E}\partial\mathbf{P}/\partial t$ — это мощность, расходуемая на изменение поляризации среды. К этому вопросу вернемся в гл. 8 при рассмотрении взаимодействия излучения с атомными системами.

Дипольное поглощение в случае гармонических полей. В соответствии с предыдущим разделом средняя мощность в единице объема, расходуемая на изменение поляризации среды, равна

$$\overline{\frac{\text{Мощность}}{\text{Объем}}} = \overline{\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}, \tag{5.1.13}$$

где горизонтальная черта обозначает усреднение по времени. Для простоты предположим, что векторы $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ параллельны и меняются во времени по гармоническому закону

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\,[E \exp(i\omega t)], \tag{5.1.14}$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathrm{Re}\,[P \exp(i\omega t)], \tag{5.1.15}$$

причем, E и P — комплексные амплитуды.

Восприимчивость χ_e определяется соотношением

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E \tag{5.1.16}$$

и оказывается, таким образом, комплексным числом. Подставляя выражения (5.1.14) и (5.1.15) в (5.1.13) и пользуясь (5.1.16), получаем

$$\overline{\frac{\text{Мощность}}{\text{Объем}}} = \overline{\mathrm{Re}\,(Ee^{i\omega t})\,\mathrm{Re}\,(i\omega P e^{i\omega t})} = {}^1/_2\,\mathrm{Re}\,(i\omega\varepsilon_0\chi_e EE^*) =$$

$$= (\omega/2)\,\varepsilon_0 |E|^2 \mathrm{Re}\,(i\chi_e). \tag{5.1.17}$$

Так как χ_e — комплексная величина, ее можно записать в виде

$$\chi_e = \chi_e' - i\chi_e'' \tag{5.1.18}$$

и, подставив в (5.1.17), получить

$$\overline{\frac{\text{Мощность}}{\text{объем}}} = \frac{\omega\varepsilon_0\chi_e''}{2}|E|^2. \tag{5.1.19}$$

В качестве упражнения (см. задачу 5.8) предлагается показать что для анизотропных сред, в которых комплексные амплитуды компонент поля и поляризации связаны соотношением

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j, \tag{5.1.20}$$

из равенства (5.1.13) следует формула

$$\overline{\frac{\text{Мощность}}{\text{Объем}}} = \frac{\omega}{2}\varepsilon_0 \sum_{ij} \mathrm{Re}\,(i\chi_{ij} E_i^* E_j). \tag{5.1.21}$$

5.2. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах

Знание законов распространения электромагнитных волн в анизотропных средах необходимо при решении многих задач. Такие из них, как, например: электрооптическая, магнитооптическая

и акустооптическая модуляция, фазовый синхронизм при нелинейных оптических взаимодействиях — будут рассмотрены ниже.

В анизотропной среде (далее это будет кристалл) электрическое поле и обусловленная им поляризация в общем случае не параллельны. Следовательно, векторы электрической индукции **D** и электрического поля **E** связаны между собой тензором ε_{kl}[1]: $D_k = \varepsilon_{kl} E_l$. Индексы обозначают декартовы координаты ($k, l = x, y, z$), фиксированные относительно осей кристалла, а по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Записав плотность электрической энергии, как и в случае изотропной среды, в виде

$$w_e = {}^1/_2 \mathbf{E}\mathbf{D} = {}^1/_2 E_k \varepsilon_{kl} E_l, \tag{5.2.2}$$

получим

$$\dot{w}_e = \frac{\varepsilon_{kl}}{2} (\dot{E}_k E_l + E_k \dot{E}_l). \tag{5.2.3}$$

В соответствии с теоремой Пойнтинга (§ 5.1) полная мощность, втекающая в единичный объем, равна

$$-\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}.$$

Пользуясь (5.2.1), можно записать это равенство в виде

$$-\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}. \tag{5.2.4}$$

Если вектор Пойнтинга соответствует потоку энергии в анизотропной среде так же, как это было в изотропной, то первый член в правой части (5.2.4) должен равняться $\dot{w}_e$ и, следовательно, совпадает с (5.2.3). Переписывая $E_k \varepsilon_{kl} E_l$ как $w_e = 1/2\ (\varepsilon_{kl} E_k E_l + \varepsilon_{kl} E_k \dot{E}_l)$ и сравнивая с (5.2.3), находим, что $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, и тензор диэлектрической проницаемости ε_{ik} имеет в общем случае только шесть независимых компонент. Основываясь на выражениях (5.2.1) и (5.2.2), плотность электрической энергии можно представить как

$$2w_e = \varepsilon_{xx} E_x^2 + \varepsilon_{yy} E_y^2 + \varepsilon_{zz} E_z^2 + 2\varepsilon_{yz} E_y E_z + 2\varepsilon_{xz} E_x E_z + 2\varepsilon_{xy} E_x E_y. \tag{5.2.5}$$

Преобразование к главным осям диагонализирует тензор ε_{kl}, в результате чего равенство (5.2.5) принимает вид

$$2w_e = \varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2. \tag{5.2.6}$$

Индексы x, y, z относятся теперь к новой системе координат, оси которой называют *главными диэлектрическими осями*. Далее используется только эта система координат, поэтому сохраним обозначения x, y, z.

---

[1]) Предполагается, что дисперсия отсутствует, т. е. мгновенные значения D_k и E_l связаны между собой единственной константой. Это пренебрежение дисперсией справедливо, когда в интересующем нас диапазоне частот среда не имеет потерь.

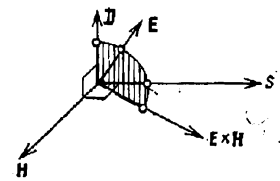


Рис. 5.1. Относительная ориентация векторов и направления распространения в анизотропном кристалле
Векторы D, E, S, и E×H лежат в одной плоскости

В системе координат, связанной с главными диэлектрическими осями, тензор ε_{kl} диагонален, так что

$$\begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix}. \tag{5.2.7}$$

Подставляя (5.2.7) в (5.2.6), получаем равенство

$$2w_e = \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z}, \tag{5.2.8}$$

из которого следует, что поверхности постоянной энергии (w_e) в пространстве D_x, D_y, D_z имеют форму эллипсоидов.

Предположим, что в кристалле распространяется монохроматическая плоская волна, характеризуемая фазовым множителем

$$\exp\{i\omega[t - (n/c)(\mathbf{rs})]\}. \tag{5.2.9}$$

Ей соответствует волновой вектор $\mathbf{k} = (\omega n/c)\,\mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ — единичный вектор нормали к волновому фронту (плоскости постоянной фазы). Фазовая скорость выражается формулой

$$\mathbf{v}_\Phi = c\mathbf{s}/n, \tag{5.2.10}$$

в которой c — скорость света в вакууме; n — показатель преломления. Для плоской монохроматической волны можно формально заменить оператор ∇ множителем $-(i\omega n/c)\,\mathbf{s}$, благодаря чему уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = (\partial\mathbf{D}/\partial t)$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(\partial\mathbf{B}/\partial t)$ преобразуются в

$$\mathbf{D} = -(n/c)\,\mathbf{s}\times\mathbf{H}, \tag{5.2.11}$$

$$\mathbf{H} = (n/\mu c)\,\mathbf{s}\times\mathbf{E}. \tag{5.2.12}$$

На основании этих уравнений можно заключить, что вектор $\mathbf{D}$ перпендикулярен $\mathbf{H}$ и оба вектора перпендикулярны $\mathbf{s}$. Следовательно, направление потока энергии, задаваемое вектором Пойнтинга $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, не коллинеарно направлению распространения фазы $\mathbf{s}$. Векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ показаны на рис. 5.1.

Используя (5.2.11), (5.2.12) и векторное тождество $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, получим выражение

$$\mathbf{D} = -\frac{n^2}{c^2\mu}\,\mathbf{s}\times\mathbf{s}\times\mathbf{H} = \frac{n^2}{c^2\mu}[\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})] = \frac{n^2}{c^2\mu}\mathbf{E}_{\text{поперечн}} \tag{5.2.13}$$

и, поскольку $\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} = 0$, $n^2/(c^2\mu) = n^2\varepsilon_0$, то

$$D^2 = n^2/(c^2\mu)\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = n^2\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}.$$

Подставляя соотношения $D_k = \varepsilon_k E_k$, $\varepsilon' \equiv \varepsilon_k/\varepsilon_0$ в уравнение (5.2.13) и решив его относительно E_k, получим

$$E_k = \frac{n^2 s_k (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})}{n^2 - \varepsilon'_k}, \quad k = x, y, z, \tag{5.2.14}$$

а после умножения на s_k и суммирования по k —

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \sum_{k=x,\,y,\,z} \frac{n^2 s_k^2}{n^2 - \varepsilon'_k}.$$

Последнее равенство можно записать как

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \varepsilon'_x} + \frac{s_y^2}{n^2 - \varepsilon'_y} + \frac{s_z^2}{n^2 - \varepsilon'_z} = \frac{1}{n^2}. \tag{5.2.15}$$

Уравнение (5.2.15), называемое уравнением Френеля, квадратично относительно n^2 (см. задачу 5.9). Два его решения $\pm n_1$ и $\pm n_2$ (знаки $\pm$ соответствуют разным знакам фазовой скорости) — это показатели преломления двух плоских волн, которые могут независимо распространяться в кристалле. Чтобы закончить решение задачи, подставим значение n^2 в уравнение (5.2.14). Три уравнения, получающиеся при подстановке значений $k = x, y, z$, можно решить относительно E_x, E_y и E_z, после чего из уравнений (5.2.11) и (5.2.12) находятся $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$.

Из (5.2.14) следует, что

$$\left(\frac{E_k^{1,2}}{E_l^{1,2}}\right) = \frac{s_k\,[(n^2)^{1,2} - \varepsilon'_l]}{s_l\,[(n^2)^{1,2} - \varepsilon'_k]},$$

где верхние индексы (1, 2) соответствуют двум независимым решениям. В непоглощающих и неусиливающих средах значения $(n^2)^{1,2}$, а значит и отношение $E_k^{1,2}/E_l^{1,2}$ действительны, так что оба решения линейно-поляризованы.

Итак, в произвольном направлении $\mathbf{s}$ могут распространяться только две независимые плоские, линейно-поляризованные волны с фазовыми скоростями $\pm (c/n_1)$ и $\pm (c/n_2)$, где n_1^2 и n_2^2 — два решения уравнения Френеля (5.2.15).

На практике значения показателя преломления $(n^2)^{1,2}$ и направления векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ находят не при помощи указанной процедуры, а другим, формально эквивалентным, методом эллипсоида показателя преломления.

5.3. Эллипсоид показателя преломления

Поверхности постоянной плотности энергии w_e в D-пространстве согласно (5.2.8) описываются уравнением

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x'} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y'} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z'} = 2w_e\varepsilon_0,$$

где ε_x', ε_y', ε_z' — относительные главные значения диэлектрической проницаемости. Если обозначить вектор $\mathbf{D}/\sqrt{2w_e\varepsilon_0}$ посредством $\mathbf{r}$ и определить главные показатели преломления формулой $n_k^2 \equiv \varepsilon_k'$ ($k = x, y, z$), последнее уравнение перепишется в виде

$$x^2/n_x^2 + y^2/n_y^2 + z^2/n_z^2 = 1. \qquad (5.3.1)$$

Это уравнение эллипсоида с главными осями, параллельными направлениям x, y, и z и имеющими длины $2n_x$, $2n_y$, $2n_z$. Данный эллипсоид называют *эллипсоидом показателя преломления* или, иногда, *оптической индикатриссой*. Он используется, главным образом, для нахождения двух значений показателя преломления и соответствующих им направлений вектора $\mathbf{D}$, относящихся к двум нормальным плоским волнам, которые распространяются вдоль произвольного направления в кристалле. Это выполняется в следующем порядке. Находится эллиптическое сечение индикатриссы (5.3.1) плоскостью, проходящей через центр эллипсоида нормально к направлению распространений. Длины осей полученного эллипса равны $2n_1$ и $2n_2$, где $n_{1,2}$ — решения уравнения (5.2.15). Эти оси параллельны двум допустимым направлениям $\mathbf{D}_{1,2}$ векторов индукции.

Покажем, следуя Борну и Вольфу [2], эквивалентность данного метода и метода, изложенного в предыдущем разделе. Для этого нужно найти экстремумы $(r^2)^{1,2}$ на эллипсе пересечения и показать, что они совпадают с решениями $(n^2)^{1,2}$ уравнения (5.2.15) и что радиусы-векторы экстремумов параллельны векторам $\mathbf{D}_{1,2}$.

Эллипс пересечения определен двумя поверхностями:

а) эллипсоидом показателей преломления

$$x^2/\varepsilon_x' + y^2/\varepsilon_y' + z^2/\varepsilon_z' = 1, \qquad (5.3.2)$$

б) плоскостью, нормальной к $\mathbf{s}$,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = xs_x + ys_y + zs_z = 0. \qquad (5.3.3)$$

Главные полуоси эллипса определяются с помощью экстремума выражения

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (5.3.4)$$

при условии выполнения (5.3.2) и (5.3.3). Задача решается методом множителей Лагранжа. Построим функцию $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(xs_x + ys_y + zs_z) + \\ + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\varepsilon_x'} + \frac{y^2}{\varepsilon_y'} + \frac{z^2}{\varepsilon_z'} - 1\right), \qquad (5.3.5)$$

в которой λ_1 и λ_2 — неопределенные коэффициенты. Затем найдем значения x, y, z в экстремумах r^2 и отношение λ_1/λ_2 из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0, \tag{5.3.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=0. \tag{5.3.7}$$

Из (5.3.6) получаем

$$k+\frac{\lambda_1}{2}s_k+\frac{\lambda_2}{\varepsilon_k'}k=0, \qquad k=x, y, z. \tag{5.3.8}$$

Уравнения (5.3.7) совпадают с условиями (5.3.2) и (5.3.3). Умножая уравнения (5.3.8) на k и складывая их, используя при этом (5.3.2) и (5.3.3), получаем

$$r^2+\lambda_2=0. \tag{5.3.9}$$

Умножая (5.3.8) на s_k, складывая их опять с учетом (5.3.2) и (5.3.3) и помня, что $s^2=1$, получаем

$$\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x'}+\frac{ys_y}{\varepsilon_y'}+\frac{zs_z}{\varepsilon_z'}\right)=0. \tag{5.3.10}$$

Исключая с помощью (5.3.9), (5.3.10) коэффициенты λ_1 и λ_2 из уравнений (5.3.8), приходим к

$$x\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon_x'}\right)+s_x r^2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x'}+\frac{ys_y}{\varepsilon_y'}+\frac{zs_z}{\varepsilon_z'}\right)=0 \tag{5.3.11}$$

и к двум аналогичным уравнениям, в которых место x занимает y и z соответственно.

Если в уравнении (5.3.11) использовать подстановку

$$\mathbf{r}\to\mathbf{D}/\sqrt{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\varepsilon_0)}, \tag{5.3.12}$$

такую же, как в (5.3.1), то $r^2\to D^2/(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\,\varepsilon_0=n^2$, $x/\varepsilon_x\to$ $\to E_x/\sqrt{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\,\varepsilon_0}$. Тогда уравнение (5.3.11) принимает вид

$$\varepsilon_x E_x=\varepsilon_0 n^2\,[E_x-s_x\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})],$$

идентичный (5.2.13). Поскольку $r^2\to n^2$, то полуоси (экстремумы эллиптического сечения) равны значениям $n_{1,2}$, т. е. показателям преломления для двух распространяющихся волн. Кроме того, поскольку радиусы-векторы $\mathbf{r}$ экстремальных точек эллипса удовлетворяют (5.3.12), они параллельны векторам $\mathbf{D}_{1,2}$. Тем самым установлена формальная эквивалентность метода эллипсоида показателей преломления и решения уравнений Максвелла для распространения электромагнитных волн в анизотропных кристаллах.

5.4. Распространение электромагнитных волн в одноосных кристаллах

В одноосных кристаллах, т. е. кристаллах с вращательной симметрией относительно одной оси, уравнение эллипсоида показателей преломления (5.3.1) упрощается и принимает вид

$$x^2/n_0^2 + y^2/n_0^2 + z^2/n_e^2 = 1, \qquad (5.4.1)$$

где в соответствии с договоренностью ось симметрии, которая называется оптической осью, направлена вдоль z. Величину n_0 называют показателем преломления для обыкновенного луча, а n_e — показателем преломления для необыкновенного луча. Если $n_e < n_0$, кристалл относят к категории оптически отрицательных, в случае же $n_e > n_0$ кристалл положителен.

На рис. 5.2 изображен эллипсоид показателей преломления для положительного одноосного кристалла. Направление распространения указывает вектор **s**. Так как в этом случае эллипсоид инвариантен по отношению к повороту вокруг оси z, без потери общности можно считать, что вектор **s** лежит в плоскости y—z и не имеет x-компоненты.

Как и в § 5.3, прежде всего найдем перссечение эллипсоида показателей преломления с плоскостью, проходящей через начало координат нормально к вектору **s**. Плоскость этого эллиптического сечения на рисунке заштрихована. Длина полуоси OA равна показателю преломления $n_e(\theta)$ для необыкновенного луча, вектор индукции которого $\mathbf{D}_e(0)$ параллелен OA. Обыкновенный луч поляризован (т. е. имеет направление **D**) вдоль OB и для него показатель преломления равен n_0.

Из рис. 5.2 видно, что направление поляризации обыкновенного луча не меняется при изменении угла θ между направлением его распространения **s** и оптической осью, а показатель преломления всегда равен n_0. Напротив, направление вектора $\mathbf{D}_e$ зависит от θ. Показатель преломления меняется от $n_e(\theta) = n_0$ при $\theta = 0°$ до $n_e(\theta) = n_e$ при $\theta = 90°$. Показатель преломления $n_e(\theta)$ необыкновенного луча равен OA и, как видно из рисунка, определяется по формуле

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_0^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}. \qquad (5.4.2)$$

Трехмерные поверхности, определяющие показатели преломления $n_e(\theta, \varphi)$ и $n_0(\theta, \varphi)$ в зависимости от направления (θ, φ) волновой нормали, называются нормальными поверхностями. Они могут быть построены указанными выше методами, если известен эллипсоид показателей преломления. В случае одноосного кристалла азимутальный угол φ излишен, так как нормальные поверхности принимают форму эллипсоидов вращения вокруг оптической оси z. Кривые пересечения этих эллипсоидов плоскостью s—z показаны на рис. 5.3 для положительного одноосного кристалла $(n_e > n_0)$.

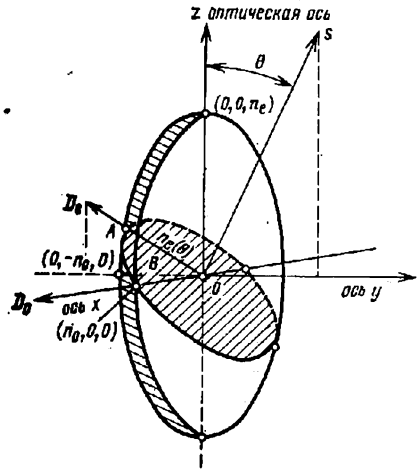
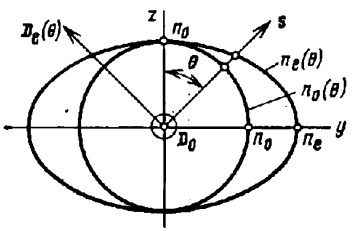


Рис. 5.2. Нахождение показателей преломления и возможных направлений поляризации для заданного направления s распространения волны. Рисунок соответствует одноосному кристаллу, в котором $n_x = n_y = n_0$, $n_z = n_e$

Рис. 5.3. Пересечение плоскости s—z с нормальными поверхностями для положительного одноосного кристалла ($n_e > n_0$)



Внешняя кривая $n_e(\theta)$ есть решение уравнения (5.4.2). Кривые на рис. 5.3 одновременно дают информацию о двух показателях преломления и двух ориентациях вектора индукции. Вектор индукции $\mathbf{D}_e(\theta)$ лежит в плоскости s—z, а для обыкновенного луча вектор индукции ортогонален этой плоскости.

5.5. Разложение электромагнитного поля по модам резонатора

Поле в резонаторе описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \tag{5.5.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Ограничимся случаем однородной и изотропной среды без зарядов. Тогда

$$\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{5.5.2}$$

где ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Рассмотрим электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в объеме V, ограниченном идеально проводящей поверхностью S. На ней должны обращаться в нуль: касательная компонента вектора $\mathbf{E}$, т. е. $-\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, а также нормальная компонента вектора $\mathbf{H}$, т. е. $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\,\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S). Разложим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в ряды по системам ортогональ-

ных векторных полей $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$. Эти системы полей, впервые введенные Слэтером [3], удовлетворяют уравнениям

$$k_a \mathbf{E}_a = \operatorname{rot} \mathbf{H}_a, \tag{5.5.3}$$

$$k_a \mathbf{H}_a = \operatorname{rot} \mathbf{E}_a. \tag{5.5.4}$$

где k_a будем пока считать постоянной величиной. Касательная составляющая вектора $\mathbf{E}_a$ вдоль S равна нулю:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a = 0 \text{ на } S. \tag{5.5.5}$$

Возьмем ротор от обеих частей (5.5.3) и (5.5.4) и воспользуемся векторным тождеством

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Это приводит к известным волновым уравнениям

$$\Delta \mathbf{E}_a + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0, \quad \Delta \mathbf{H}_a + k_a^2 \mathbf{H}_a = 0. \tag{5.5.6}$$

Из уравнений (5.5.3), (5.5.4) и условия (5.5.5) следует, что нормальная составляющая $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_a$ равна нулю на S. Чтобы это доказать, рассмотрим на поверхности S произвольный замкнутый контур C, охватывающий элемент поверхности S', и интеграл

$$\oint_C \mathbf{E}_a \, d\mathbf{l} = \oint_C (-\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \, d\mathbf{l} + \oint_C (\mathbf{n}\mathbf{E}_a) \, \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l} = 0, \tag{5.5.7}$$

где поле $\mathbf{E}_a$ представлено в виде суммы касательного $-\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}_a$ и нормального $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a)\,\mathbf{n}$ к поверхности S компонентов. Первый член в правой части (5.5.7) равен нулю вследствие (5.5.5), а второй член равен нулю из-за ортогональности векторов $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$.

Преобразуем левую часть (5.5.7), воспользовавшись теоремой Стокса

$$\oint_C \mathbf{E}_a \, d\mathbf{l} = \int_{S'} (\operatorname{rot} \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{n}) \, da = k_a \int_{S'} (\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{n}) \, da = 0.$$

Поскольку контур C выбран произвольно, то

$$\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S. \tag{5.5.8}$$

Покажем теперь, что функции $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$ ортогональны в смысле

$$\int_V \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b \, dv = 0, \; a \neq b; \quad \int_V \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b \, dv = 0, \; a \neq b. \tag{5.5.9}$$

Ограничимся доказательством ортогональности функций $\mathbf{E}_a$ (полагая, что ортогональность функций $\mathbf{H}_a$ докажет читатель). Для этого воспользуемся тождеством $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Положим сначала $\mathbf{A} = \mathbf{E}_b$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{E}_a$, затем $\mathbf{A} = \mathbf{E}_a$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{E}_b$; вычтем второе равенство из первого:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}_b \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_a) - \operatorname{div}(\mathbf{E}_a \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_b) = \operatorname{rot} \mathbf{E}_a \times$$
$$\times \operatorname{rot} \mathbf{E}_b - \mathbf{E}_b \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_a - \operatorname{rot} \mathbf{E}_b \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_a +$$
$$+ \mathbf{E}_a \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_b.$$

Из уравнения (5.5.4) имеем $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_a = k_a H_a$ и $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_a = k_a^2 \mathbf{E}_a$, подставим это в последнее равенство

$$k_a \operatorname{div}(\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a) - k_b \operatorname{div}(\mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_b) = (k_b^2 - k_a^2)\,\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b$$

и воспользуемся теоремой Гаусса

$$\int_S [k_a \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a) - k_b \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_b \times \mathbf{B}_b)]\,da = (k_b^2 - k_a^2)\int \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b\,dv.$$

Обратившись к граничному условию (5.5.5) и векторному тождеству $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, можно показать, что левая часть полученного равенства обращается в нуль. Следовательно, для случая $k_a \neq k_b$ ортогональность функций E_a доказана. Если $k_a = k_b$, т. е. $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{E}_b$ являются вырожденными собственными функциями, можно составить из них такие линейные комбинации, чтобы условие ортогональности выполнялось.

Выберем функции $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$ так, чтобы они удовлетворяли условиям нормировки

$$\int_V (\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b)\,dv = \delta_{ab}, \quad \int_V (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b)\,dv = \delta_{ab}. \tag{5.5.10}$$

Эти условия будут использоваться на протяжении всей книги.

Поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в резонаторе разложим в ряды

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\sum_a \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, p_a(t)\,\mathbf{E}_a(\mathbf{r}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\omega_a q_a(t)\,\mathbf{H}_a(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

где $\omega_a = k_a/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Подстановка (5.5.11) в первое уравнение Максвелла (5.5.1) с учетом (5.5.3) и (5.5.4) дает

$$p_a = \dot{q}_a, \tag{5.5.12}$$

$$\omega_a^2 q_a = -\dot{p}_a. \tag{5.5.13}$$

Исключив q_a из полученных уравнений, получим

$$\ddot{p}_a + \omega_a^2 p_a = 0. \tag{5.5.14}$$

Отсюда следует, что $k_a(\mu\varepsilon)^{-1/2} = \omega_a$ — круговая частота колебаний a-й моды.

5.6. Квантование поля

Покажем, что электромагнитное поле внутри резонатора формально можно рассматривать как ансамбль независимых гармонических осцилляторов. Такой подход близок рассмотренному в гл. 4 квантованию колебаний решетки. Чтобы выявить указанное сходство, умножим скалярно первое из уравнений (5.5.11) на $\mathbf{E}_b$ и

проинтегрируем затем по объему резонатора. С учетом (5.5.10) получаем

$$p_b(t) = -\sqrt{\varepsilon}\int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\cdot\mathbf{E}_b(\mathbf{r})\,dv. \tag{5.6.1}$$

Это аналогично второму из уравнений (4.5.2). Из (5.6.1) и соотношения

$$q_b(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\omega_b}\int_V \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\cdot\mathbf{H}_b(\mathbf{r})\,dv \tag{5.6.2}$$

следует, что классическое электромагнитное поле может быть описано либо векторными полями $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, либо динамическими переменными $p_a(t)$ и $q_a(t)$. Полная энергия (гамильтониан) поля выражается формулой

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int_V (\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} + \varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,dv. \tag{5.6.3}$$

Подставляя сюда вместо $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ их разложения (5.5.11), получаем,

$$\mathcal{H} = \sum_a \frac{1}{2}(p_a^2 + \omega_a^2 q_a^2), \tag{5.6.4}$$

т. е. сумму гамильтонианов гармонических осцилляторов, подобных (2.2.1). Динамические переменные p_l и q_a являются канонически-сопряженными. В этом можно убедиться, рассмотрев уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_a} = -\omega_a^2 q_a,\quad \dot{q}_a = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_a} = p_a. \tag{5.6.5}$$

Они эквивалентны уравнениям (5.5.12) и (5.5.13), полученным непосредственно из уравнений Максвелла.

При квантовании электромагнитного поля предполагается, что p_a и q_a формально эквивалентны импульсу и координате квантового гармонического осциллятора. Операторы этих динамических переменных удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{p}_a, \hat{p}_b] = [\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0,\quad [\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\hbar\delta_{ab}. \tag{5.6.6}$$

Подобно тому, как это было сделано в гл. 2, введем операторы рождения $\hat{a}_l^+$ и уничтожения $\hat{a}_l$

$$\begin{aligned}\hat{a}_l^+ &= \left(\frac{1}{2\hbar\omega_l}\right)^{1/2}[\omega_l\hat{q}_l(t) - i\hat{p}_l(t)],\\ \hat{a}_l &= \left(\frac{1}{2\hbar\omega_l}\right)^{1/2}[\omega_l\hat{q}_l(t) + i\hat{p}_l(t)].\end{aligned} \tag{5.6.7}$$

Коммутационные соотношения для них следуют непосредственно из (5.6.6)

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_m] = [\hat{a}_l^+, \hat{a}_m^+] = 0,\quad [\hat{a}_l, \hat{a}_m^+] = \delta_{lm}. \tag{5.6.8}$$

Решая (5.6.7) относительно $\hat{p}_l$ и $\hat{q}_l$, находим

$$\hat{p}_l(t) = i(\hbar\omega_l/2)^{1/2}\left[a_l^+(t) - \hat{a}_l(t)\right],$$
$$\hat{q}_l(t) = (\hbar/2\omega_l)^{1/2}\left[a_l^+(t) + \hat{a}_l(t)\right]. \qquad (5.6.9)$$

Гамильтониан можно выразить через операторы рождения и уничтожения, подставив (5.6.9) в (5.6.4) и заменив $\hat{a}_l\hat{a}_l^+$ на $\hat{a}_l^+\hat{a}_l + 1$ в соответствии с (5.6.8). Это приводит к выражению

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_l \hbar\omega_l\left[\hat{a}_l^+\,\hat{a}_l + 1/2\right]. \qquad (5.6.10)$$

которое совпадает с (4.5.12), полученным при квантовании колебаний решетки.

Использование идентичных операторов при квантовании электромагнитного поля и в теории гармонического осциллятора позволяет сделать вывод, что стационарные в квантовомеханическом смысле состояния электромагнитного поля выражаются волновой функцией Ф, представляющей собой произведение собственных функций гамильтонианов $\hbar\omega_l(\hat{a}_l^+\hat{a}_l + 1/2)$,

$$\Phi = u_{n_1}u_{n_2}\ldots = \prod_{l=1}^{\infty} u_{n_l}, \qquad (5.6.11)$$

причем

$$\hat{a}_l^+\,u_{n_l} = \sqrt{n_l+1}\,u_{n_l+1},\ \hat{a}_l\,u_{n_l} = \sqrt{n_l}\,u_{n_l-1},\ \hat{a}_l^+\hat{a}_l\,u_{n_l} = n_l u_{n_l}. \qquad (5.6.12)$$

Среднее значение физической величины, сопоставляемой оператору $a_l^+a_l$, равно

$$\langle\Phi|\hat{a}_l^+\,\hat{a}_l|\Phi\rangle = \langle n_l|\hat{a}_l^+\,\hat{a}_l|n_l\rangle = n_l, \qquad (5.6.13)$$

т. е. числу квантов в l-й моде резонатора.

Квантование плоских волн. Выше речь шла о резонаторе произвольной формы. Для дальнейшего полезно знать вид операторов поля в частном случае одномерного резонатора. Разумеется, устройства с бесконечным поперечным сечением практически не реализуемы, однако волны, очень близкие к плоским, могут распространяться в оптических резонаторах с вогнутыми зеркалами.

Для определенности рассмотрим l-ю моду резонатора, объем которого равен V, а длина в направлении оси z равна L. Пусть векторы электрического и магнитного полей направлены вдоль осей y и x соответственно. Уравнениям (5.5.3), (5.5.4) и (5.5.9) удовлетворяют собственные функции

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) = \mathbf{j}\sqrt{\frac{2}{V}}\sin(k_l z),\ \mathbf{H}_l(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}\sqrt{\frac{2}{V}}\cos(k_l z), \qquad (5.6.14)$$

где l — целое число; $k_l = \pi l/L$. Поля соответствующих мод даются выражениями

$$\hat{E}_{ly}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{2}{V\varepsilon}}\,\hat{p}_l(t)\sin k_l z,$$

$$\hat{H}_{lx}(\mathbf{r}, t) = -\omega_l\sqrt{\frac{2}{V\mu}}\,\hat{q}_l(t)\cos k_l z,$$

или, если воспользоваться (5.6.9),

$$\hat{E}_{ly} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\varepsilon}}\,(\hat{a}_l^+ - \hat{a}_l)\sin k_l z,$$

$$\hat{H}_{lx} = -\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\mu}}\,(\hat{a}_l^+ + \hat{a}_l)\cos k_l z. \qquad (5.6.15)$$

Эти выражения найдут применение в гл. 8 при рассмотрении спонтанных и индуцированных переходов.

5.7. Плотность состояний и излучение абсолютно черного тела

Число мод с резонансными частотами в пределах от ω до $\omega + d\omega$ зависит в общем случае от геометрии резонатора. Если, однако, характерные размеры его велики по сравнению с длинами волн рассматриваемого излучения, эта зависимость становится несущественной и плотность мод состояний не зависит от формы резонатора. Ограничившись именно этим случаем, выберем резонатор в виде куба со сторонами, равными L. Зависимость поля произвольной моды от координат выражается функцией $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Пользуясь периодическими граничными условиями с периодом L по каждой из декартовых координат, получаем следующие ограничения на компоненты вектора $\mathbf{k}$:

$$k_x = 2\pi l/L, \quad k_y = 2\pi m/L, \quad k_z = 2\pi n/L, \qquad (5.7.1)$$

где l, m, n — целые числа.

Основываясь на уравнениях Максвелла, можно получить

$$(\varepsilon/\varepsilon_0)\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Из соотношений (5.7.1) вытекает, что каждой моде соответствует объем $dk_x dk_y dk_z = (2\pi/L)^3$ в $\mathbf{k}$-пространстве. Число мод N_k, модуль волнового числа которых лежит в пределах от 0 до k, легко найти, поделив полный объем шара в $\mathbf{k}$-пространстве $(4/3)\pi k^3$ на объем $(2\pi/L)^3$, приходящийся на одну моду, и умножив результат на 2, так как каждому значению $\mathbf{k}$ отвечают два направления поляризации поля. В результате имеем $N_k = k^3L^3/(3\pi^2)$, или в соответствии с соотношением $k = \omega n/c$, где $n = (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}$ — показатель преломления,

$$N_\omega/V = \omega^3 n^3/(3\pi^2 c^3). \qquad (5.7.2)$$

Это есть число мод с частотами от 0 до ω, приходящееся на единицу объема резонатора. Спектральная плотность состояний $p(\omega)$ равна

$$p(\omega) = \frac{1}{V}\frac{dN_\omega}{d\omega} = \frac{\omega^2 n^3}{\pi^2 c^3}. \qquad (5.7.3)$$

Если поле находится в термодинамическом равновесии со стенками резонатора при температуре T, среднюю энергию $\mathscr{E}$ моды можно найти точно так же, как это было сделано для мод решетки [см. (4.6.3)]:

$$\mathscr{E} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \qquad (5.7.4)$$

Спектральная плотность черного (равновесного) излучения равна

$$\rho(\omega) = p(\omega)\,\mathscr{E} = \frac{\hbar\omega^3 n^3}{\pi^2 c^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}\right).$$

Интеграл от $\rho(\omega)$ по всем частотам расходится из-за слагаемого 1/2, что неприемлемо с методической точки зрения и противоречит опыту. Парадокс разрешается, если учесть, что 1/2 соответствует энергии нулевых колебаний $\hbar\omega/2$ радиационного осциллятора. Это наименьшая энергия, которой может обладать осциллятор; она не участвует в обмене энергией и, следовательно, не проявляется при измерениях. Поэтому с точки зрения термодинамики выражение для энергии черного излучения в интервале частот $d\omega$ можно записать в виде

$$\rho(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3 n^3\,d\omega}{\pi^2 c^3}\left(\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right). \qquad (5.7.5)$$

Задачи.

5.1. Какова явная зависимость от времени операторов $a_l^+(t)$ и $a_l(t)$ в представлении Гайзенберга?

5.2. Покажите, что энергия, приходящаяся на одну моду, не зависит от времени, т. е. $\langle a_l^+(t)\, a_l(t)\rangle = \text{const}$.

5.3. Пусть в подпространстве двух мод резонатора, обозначаемых индексами *1* и *2*, задан полный гамильтониан

$$\mathscr{H} = \hbar\omega_1\left(a_1^+ a_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(a_2^+ a_2 + \frac{1}{2}\right) -$$
$$-\hbar K\,(a_1^+ a_2^+ e^{-i(\omega t+\varphi)} + a_1 a_2 e^{i(\omega t+\varphi)}),$$

где K — вещественная постоянная и $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Получите выражения для $a_1^+(t)$, $a_1(t)$, $a_2^+(t)$, $a_2(t)$ в представлении Гайзенберга.

У к а з а н и е: целесообразно ввести новые переменные, определяемые соотношениями

$$a_j^+(t) = A_j^+(t)\,e^{i\omega_j t}, \quad a_j(t) = A_j(t)\,e^{-i\omega_j t}.$$

Ответ:

$$a_1(t) = e^{-i\omega_1 t}(a_{10}\,\mathrm{ch}\,Kt + ia_{20}^{+}e^{-i\varphi}\,\mathrm{sh}\,Kt),$$
$$a_2(t) = e^{-i\omega_2 t}(a_{20}\,\mathrm{ch}\,Kt + ia_{10}\,e^{-i\varphi}\,\mathrm{sh}\,Kt).$$

5.4. Покажите, что уравнения движения (5.6.5) справедливы и для квантовомеханических операторов импульса и координаты, если оператор Гамильтониана дается формулой (5.6.4).

5.5. Повторите вывод формулы (5.7.3), используя разложение по стоячим, а не по бегущим волнам.

5.6. Выведите подробно формулы (5.6.15).

5.7. Проведите квантование колебательного процесса в простом электрическом LC-контуре с индуктивностью L и емкостью C, включенными параллельно. Определите, в частности: *а*) какие величины играют в этой задаче роль канонически-сопряженных переменных p и q? *б*) Каков вид гамильтониана, выраженного через операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ или через операторы $\hat{a}^{+}$ и $\hat{a}$?

Указание: следует получить

$$a^{+} = \sqrt{\frac{C}{2\hbar\omega}}\left[U(t) - i\sqrt{\frac{L}{C}}\,I(t)\right],$$
$$a = \sqrt{\frac{C}{2\hbar\omega}}\left[U(t) + i\sqrt{\frac{L}{C}}\,I(t)\right],$$

где $I(t)$ и $U(t)$ — ток и напряжение в контуре.

5.8. Выведите формулу (5.1.21).

5.9. Покажите, что (5.2.15) — квадратное уравнение относительно n^2.

5.10. Определите направление потока энергии $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ в волне, распространяющейся в направлении $\mathbf{S}$ в одноосном кристалле, если *а*) волна обыкновенная, *б*) волна необыкновенная.

Глава 6

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ В ОДНОРОДНЫХ И ЛИНЗОПОДОБНЫХ СРЕДАХ

Глава начинается с рассмотрения хода лучей в различных оптических элементах: однородных и изотропных средах, тонких линзах, диэлектрических пластинах, системах зеркал, средах с квадратичным законом изменения показателя преломления и усиления. Так как, по определению, луч нормален к волновому фронту, траекторию луча можно установить, проследив за эволюцией комплексной волны. Как будет показано, прохождение луча через оптический элемент (отражение от элемента) описывается простой квадратной

матрицей второго порядка. Более того, с помощью подобных матриц удается описать преобразование гауссовых пучков, тех самых, которые излучаются лазерами и существуют в резонаторах со сферическими зеркалами.

Вторая половина главы посвящена теории гауссовых пучков. Знание свойств гауссовых пучков и смежных вопросов, касающихся оптических резонаторов, является необходимой предпосылкой успешной работы в области квантовой электроники.

6.1. Линзовый волновод

Рассмотрим прохождение параксиального луча[1)] (рис. 6.1) через тонкую линзу с фокусным расстоянием f. За ось z примем ось цилиндрической симметрии. Расстояние по радиусу от оси до луча обозначим через r, а угол наклона луча dr/dz — через r'. Тогда выходные ($r_{\text{вых}}$, $r'_{\text{вых}}$) и входные ($r_{\text{вх}}$, $r'_{\text{вх}}$) параметры луча можно связать уравнениями

$$r_{\text{вых}} = r_{\text{вх}}, \quad r'_{\text{вых}} = r'_{\text{вх}} - r_{\text{вых}}/f, \tag{6.1.1}$$

первое из которых следует из определения тонкой линзы, а второе — из рассмотрения хода неотклоненного центрального луча с углом наклона, равным $r'_{\text{вх}}$ (рис. 6.1).

Сопоставляя лучу в каждой точке одностолбцовую матрицу

$$\tilde{r}(z) = \begin{vmatrix} r(z) \\ r'(z) \end{vmatrix},$$

можно, используя правила матричного перемножения, переписать (6.1.1) в виде [1.3]

$$\begin{vmatrix} r_{\text{вых}} \\ r'_{\text{вых}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_{\text{вх}} \\ r'_{\text{вх}} \end{vmatrix}, \tag{6.1.2}$$

где фокусное расстояние f положительно ($f > 0$) для собирающей линзы и отрицательно ($f < 0$) для рассеивающей линзы. Лучевые матрицы различных оптических элементов приведены в табл. 6.1.

В качестве примера рассмотрим прохождение луча через плоский слой однородной среды толщины d и расположенную за ним тонкую линзу с фокусным расстоянием f, что соответствует прохождению участка между плоскостями n и $n+1$ (рис. 6.2). Поскольку

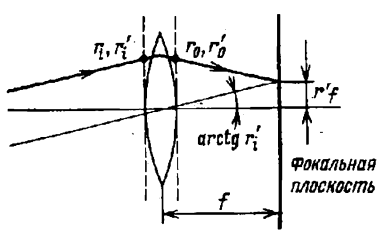
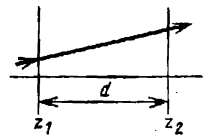
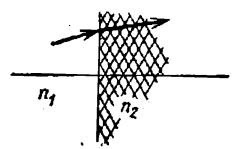
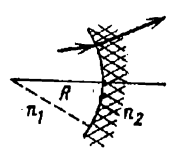
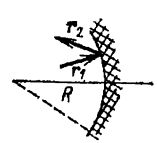
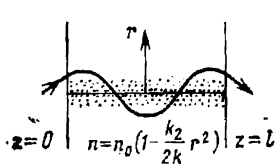


Рис. 6.1. Прохождение луча через тонкую линзу

[1)] Параксиальным называется луч, угловое отклонение которого от цилиндрической оси настолько мало, что синус и тангенс угла могут быть аппроксимированы самим углом.

Таблица 6.1

Лучевые матрицы некоторых оптических элементов и сред

Плоский слой толщиной d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Тонкая линза с фокусным расстоянием f ($f > 0$ для собирающей, $f < 0$ для рассеивающей линзы)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Плоская граница раздела диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Сферическая граница раздела диэлектриков. Радиус кривизны R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Сферическое зеркало с радиусом кривизны R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Среда с квадратичным профилем показателя преломления		$\begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\, l\right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\, l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\, l\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\, l\right) \end{bmatrix}$

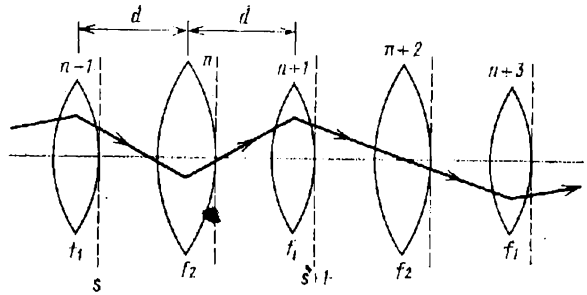


Рис. 6.2. Прохождение луча через бипериодическую последовательность линз

действие плоского слоя сводится к увеличению расстояния от оси до луча, r, на величину dr', то, используя (6.1.2), можно связать выходной, $(n+1)$-й, и входной, n-й, лучи соотношением

$$\begin{vmatrix} r_{\text{вых}} \\ r'_{\text{вых}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d \\ -1/f & (1-d/f) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_{\text{вх}} \\ r'_{\text{вх}} \end{vmatrix}. \qquad (6.1.3)$$

Эта матрица соответствует произведению приведенных в табл. 6.1 матриц тонкой линзы и плоского однородного слоя.

Рассмотрим теперь прохождение луча через систему периодически повторяющихся пар линз, расположенных на расстоянии d друг от друга и имеющих фокусные расстояния f_1 и f_2 (рис. 6.2). Как будет показано в следующей главе, эта задача формально эквивалентна распространению гауссова пучка в оптическом резонаторе с зеркалами, расположенными на расстоянии d друг от друга и имеющими радиусы кривизны $R_1 = 2f_1$ и $R_2 = 2f_2$.

Отрезок между плоскостями $n-1$ и $n+1$ можно выбрать в качестве элементарной ячейки периодической последовательности линз. Ограничимся параметрами луча в плоскостях $n-1$, $n+1$, $n+3$, ..., которые переобозначим через s, $s+1$, $s+2$, ..., так что $\Delta s = 2\Delta n$. Тогда из (6.1.3) получим

$$\begin{vmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d \\ -1/f_1 & (1-d/f_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d \\ -1/f_2 & (1-d/f_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_s \\ r'_s \end{vmatrix} \qquad (6.1.4)$$

или эквивалентную систему уравнений

$$r_{s+1} = Ar_s + Br'_s, \quad r'_{s+1} = Cr_s + Dr'_s, \qquad (6.1.5)$$

где A, B, C и D — элементы матрицы, являющейся произведением двух квадратных матриц из (6.1.4):

$$A = 1 - d/f_2, \quad B = d(2 - d/f_2), \qquad (6.1.6)$$
$$C = -[1/f_1 + (1 - d/f_1)/f_2],$$
$$D = -[d/f_1 - (1 - d/f_1)(1 - d/f_2)].$$

Из первого уравнения (6.1.5) имеем

$$r'_s = (r_{s+1} - Ar_s)/B \qquad (6.1.7)$$

и, следовательно,

$$r'_{s+1} = (r_{s+2} - Ar_{s+1})/B. \qquad (6.1.8)$$

Подстановка выражений для r'_s из (6.1.7) и второго из уравнений (6.1.5) в равенство (6.1.8) приводит к разностному уравнению

$$r_{s+2} - (A + D) r_{s+1} + (AD - BC) r_s = 0, \qquad (6.1.9)$$

описывающему ход лучей в линзовом волноводе. Используя (6.1.6), можно показать, что $AD - BC = 1$. Теперь перепишем (6.1.9) в виде

$$r_{s+2} - 2br_{s+1} + r_s = 0, \qquad (6.1.10)$$

где

$$b = \frac{1}{2}(A + D) = (1 - d/f_2 - d/f_1 + d^2/2f_1 f_2). \qquad (6.1.11)$$

Дифференциальным аналогом разностного уравнения (6.1.10) является $r'' + Kr = 0$, имеющее решение $r(z) = r(0) \exp[\pm i\sqrt{K}z]$. Будем искать поэтому решение уравнения (6.1.10) в виде

$$r_s = r_0 \exp(is\theta). \qquad (6.1.12)$$

Подстановка в (6.1.12) в (6.1.10) приводит к уравнению

$$e^{2i\theta} - 2be^{i\theta} + 1 = 0$$

и, следовательно,

$$e^{\pm i\theta} = b \pm i\sqrt{1 - b^2} = e^{\pm i\theta}, \qquad (6.1.13)$$

поэтому $\cos 0 = b = \frac{1}{2}(A + D)$.

Общее решение может быть представлено линейной суперпозицией решений вида $\exp(is\theta)$ и $\exp(-is\theta)$ или, что то же,

$$r_s = r_{\max} \sin(s\theta + \delta), \qquad (6.1.14)$$

где $r_{\max} = r_0/\sin\delta$ и δ можно выразить с помощью (6.1.8), через параметры луча r_0 и r'_0 [5].

Условие устойчивости (локализации) луча заключается в том, что θ — действительная величина, поскольку в этом случае координата r_s луча, рассматриваемая как функция номера сечения s, колеблется в пределах от $-r_{\max}$ до $r_{\max}$. Согласно (6.1.13) необходимое и достаточное условие действительности величины θ имеет вид

$$|b| \leqslant 1. \qquad (6.1.15)$$

Используя (6.1.11), перепишем (6.1.15) через параметры системы линз

$$-1 \leqslant 1 - d/f_1 - d/f_2 + d^2/2 f_1 f_2 \leqslant 1$$

или

$$0 \leqslant (1 - d/2f_1)(1 - d/2f_2) \leqslant 1. \qquad (6.1.16)$$

Если условие устойчивости $|b| \leqslant 1$ нарушено, решением (6.1.10) будет

$$r_s = A \exp(\alpha^+ s) + B \exp(\alpha^- s), \qquad (6.1.17)$$

где $\exp(\alpha^\pm) = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$, и поскольку модуль либо $\exp(\alpha^+)$, либо $\exp(\alpha^-)$ превышает единицу, радиальная координата луча будет возрастать с расстоянием s.

6.2. Волновод, образованный одинаковыми линзами

Наиболее простой линзовый волновод состоит из одинаковых линз, т. е. $f_1 = f_2 = f$.

Такая система анализируется значительно проще, чем биериодическая последовательность линз. Причина заключается в том, что в данном случае элементарная ячейка (наименьший элемент, трансляция которого воссоздает всю последовательность) содержит только одну линзу. Матрица (A, B, C, D) для элементарной ячейки совпадает с квадратной матрицей из уравнения (6.1.3). Повторив рассуждения предыдущего параграфа, получим условие устойчивости

$$0 \leqslant d \leqslant 4f \qquad (6.2.1)$$

и радиальную координату луча у n-й линзы

$$r_n = r_{\max} \sin(n\theta + \delta), \quad \cos\theta = 1 - d/2f, \qquad (6.2.2)$$

где n соответствует плоскости, расположенной сразу же за n-й линзой.

Решив простую алгебраическую задачу, выразим $r_{\max}$ и δ в (6.2.2) через начальные условия r_0 и r_0'

$$(r_{\max})^2 = [4f/(4f-d)](r_0^2 + dr_0 r_0' + df r_0'^2), \qquad (6.2,3)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt{(4f/d - 1)}/(1 + 2fr_0'/r_0), \qquad (6.2.4)$$

Вывод двух последних соотношений предоставляется читателю в качестве упражнения.

Критерий стабильности можно проверить на опыте, наблюдая траекторию лазерного луча, инжектируемого под углом к оси эквидистантной системы линз. Луч быстро «убегает», если условие (6.2.1) нарушено.

6.3. Ход лучей между зеркалами

Другое важное применение развитых методов связано с описанием движения луча между двумя искривленными зеркалами. Поскольку отражение от зеркала с радиусом кривизны R эквивалентно, с точностью до направления отраженного луча, прохождению через линзу с фокусным расстоянием $f = R/2$, формулы предшествующих параграфов можно использовать для описания хода луча

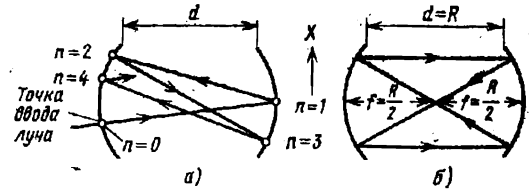


Рис. 6.3. Траектории луча, вводимого в плоскости рисунка в симметричную систему зеркал (*а*) и возвращающегося луча в симметричной конфокальной ($d = R$) системе зеркал (*б*)

между двумя отражателями с радиусами кривизны R_1 и R_2, находящимися на расстоянии d друг от друга. Рассмотрим простой случай, когда луч вводится извне в симметричную двухзеркальную систему (рис. 6.3, *а*). Координаты x и y луча являются независимыми величинами, поэтому согласно (6.1.12) можно представить их в виде [6]

$$x_n = x_{\max} \sin(n\theta + \delta_x), \quad y_n = y_{\max} \sin(n\theta + \delta_y), \qquad (6.3.1)$$

где n соответствует параметрам луча сразу же после n-го отражения. Согласно (6.3.1) геометрическое место координат x_n, y_n луча на данном зеркале представляет собой эллипс.

Возвращающиеся лучи. Если θ в (6.3.1) удовлетворяет условию

$$2\nu\theta = 2l\pi, \qquad (6.3.2)$$

где ν и l — произвольные целые числа, то луч вернется в начальную точку, совершив ν проходов туда и обратно. В дальнейшем луч повторит пройденный путь и будет, таким образом, воспроизводить на зеркалах одну и ту же фигуру. Рассмотрим в качестве примера простой случай $l = 1$, $\nu = 2$, что соответствует $\theta = \pi/2$. Тогда из (6.2.2) следует, что $d = 2f = R$; т. е. если расстояние между зеркалами совпадает с радиусами кривизны зеркал R, траектория захваченного луча замкнется через два прохода ($\nu = 2$). Рассмотренная конфигурация ($R = d$) является симметричной конфокальной, так как оба зеркала имеют общий фокус на расстоянии $f = R/2$. Она будет детально обсуждена в следующей главе. Траектория луча, соответствующая $\nu = 2$, приведена на рис. 6.3, *б*.

6.4 Лучи в линзоподобной среде

Фокусирующее действие линз объясняется тем, что оптический путь в линзе $\int n(r, z)\, dz$ (n — показатель преломления материала линзы) является квадратичной функцией расстояния r от оси z. Основываясь на этом факте и действуя по законам геометрической оптики, мы написали формулу (6.1.1) изменения угла наклона луча. Это же свойство линзы определяет характер связи между комплексными амплитудами поля $E_{\text{пр}}(x, y)$ справа от идеальной тонкой линзы и $E_{\text{лев}}(x, y)$ — слева от нее [7]

$$E_{\text{пр.}}(x, y) = E_{\text{лев}}(x, y) \exp\left(ik\frac{x^2 + y^2}{2f}\right), \qquad (6.4.1)$$

где f — фокусное расстояние линзы; $k = 2\pi n/\lambda$ (λ — длина волны в свободном пространстве).

Наличие линзы приводит к фазовому сдвигу $k(x^2 + y^2)/2f$, который увеличивается квадратично с расстоянием от оси. Рассмотрим далее более общий случай среды, показатель преломления которой меняется по закону[1])

$$n(x, y) = n_0\left[1 - \frac{k_2}{2k}(x^2 + y^2)\right], \tag{6.4.2}$$

где k_2 — константа. Поскольку набег фазы волны в слое dz среды с показателем преломления n равен $2\pi n dz/\lambda$, тонкий слой среды, описываемой формулой (6.4.2), действует как тонкая линза, фазовый сдвиг в которой согласно (6.4.1) пропорционален $(x^2 + y^2)$. Траектория луча в оптически неоднородной среде описывается дифференциальным уравнением [8]

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla n, \tag{6.4.3}$$

где s — расстояние вдоль траектории луча, измеряемое от некоторой фиксированной точки; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки s. Для параксиальных лучей d/ds можно заменить на d/dz и, используя (6.4.2), получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \left(\frac{k_2}{k}\right)r = 0. \tag{6.4.4}$$

Если во входной плоскости $z = 0$ луч имеет координату r_0 и угол наклона r_0', то решение (6.4.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} r(z) &= \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right)r_0 + \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right)r_0', \\ r'(z) &= -\sqrt{\frac{k_2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right)r_0 + \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right)r_0' \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

и слой линзоподобной среды толщиной l описывается лучевой матрицей

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\sqrt{k_2/k}\,l\right), \quad B = \sqrt{k/k_2}\sin\left(\sqrt{k_2/k}\,l\right), \\ C &= -\sqrt{k_2/k}\sin\left(\sqrt{k_2/k}\,l\right), \quad D = A. \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

Таким образом, луч колеблется относительно оси, как показано на рис. 6.4.

Слой среды с показателем преломления, меняющимся по квадратичному закону, действует как линза. В этом можно убедиться, показав с помощью (6.4.5), что совокупность параллельных лучей, имеющих во входной плоскости $z = 0$ различные координаты, сой-

[1]) Выражение (6.4.2) может рассматриваться как ограниченное первыми двумя членами разложение в ряд Тейлора радиально-симметричной функции $n(x, y)$.

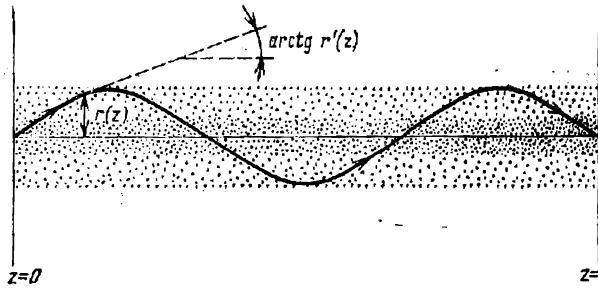


Рис. 6.4. Ход луча в среде с квадратичным профилем показателя преломления

дется за выходной плоскостью $z = l$ в общем фокусе. Фокусное расстояние линзы, отсчитываемое от выходной плоскости, определяется соотношением

$$h = \frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{k}{k_2}}\operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,l\right). \qquad (6.4.7)$$

Множитель n_0 появился вследствие преломления на границе. Угол падения луча предполагается малым и $n = 1$ при $z > l$. Вывод (6.4.7) предоставляется читателю в качестве упражнения.

Выражение (6.4.5) соответствует фокусирующей среде с $k_2 > 0$. Для среды с $k_2 < 0$, т. е. с увеличивающимся по мере удаления от оси показателем преломления, решение для $r(z)$ и $r'(z)$ имеет вид

$$r(z) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right) r_0 + \sqrt{\frac{k}{k_2}}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right) r_0',$$

$$r'(z) = \sqrt{\frac{k_2}{k}}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right) r_0 + \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,z\right) r_0'. \qquad (6.4.8)$$

В этом случае координата луча $r(z)$ увеличивается с расстоянием z и слой среды действует подобно отрицательной (рассеивающей) линзе.

Возникновение квазиквадратичного профиля показателя преломления возможно в различных ситуациях.

1. При распространении лазерных пучков с гауссовым профилем интенсивности в слабо поглощающей среде. Нагрев среды приводит, вследствие зависимости показателя преломления n от температуры T, к изменению профиля показателя преломления [10]. Для большинства сред $dn/dT < 0$ и показатель преломления имеет минимальное значение на оси, поскольку здесь поглощение и нагрев среды наибольшие. Это соответствует $k_2 < 0$ в (6.4.2) и приводит к расходимости пучка с расстоянием z. Если $dn/dT > 0$, что имеет место для некоторых свинцовых стекол [10], то пучок фокусируется.

2. При поглощении мощности накачки в твердотельных лазерных стержнях, например, в рубине. Поскольку $dn/dT < 0$, показатель преломления $n(r)$ убывает с увеличением координаты r и, следовательно, лазерные стержни действуют подобно линзам.

3. В диэлектрических трехслойных волноводах, в которых слой с показателем преломления n_1 заключен между двумя средами с показателем преломления $n_2 > n_1$. Такие системы будут рассмотрены в гл. 19.

4. В оптических волокнах, представляющих собой тонкие нити (с радиусами порядка λ), показатель преломления которых n_1 меньше показателя преломления n_2 оболочки ($n_1 < n_2$). Такие волокна используются в качестве световодов.

5. В оптических волноводах, состоящих из стеклоподобных стержней или волокон с большими (по сравнению с λ) радиусами. Показатель преломления волноводов уменьшается при увеличении r [11, 12]. Такие волноводы могут использоваться для одновременной передачи нескольких лазерных пучков, инжектируемых в волновод под различными углами.

Из (6.4.5) следует, что направления выхода пучков также различны и они легко разделяются. Благодаря тому, что волновод обладает линзовыми свойствами, он может применяться для передачи оптического изображения в такой же степени, как многоэлементная линзовая система. Свойства волноводов будут рассмотрены в § 6.10.

6.5. Волновое уравнение для среды с квадратичным профилем показателя преломления

Часто приходится оперировать с оптическими пучками, которые имеют гауссово распределение интенсивности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Изучение их свойств начнем с анализа уравнений Максвелла в изотропной среде (свободные заряды отсутствуют)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})=0. \qquad (6.5.1)$$

Применив операцию rot ко второму из уравнений (6.5.1) и используя первое, а также векторное тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\times$ $\times \operatorname{div}\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E}$, получим

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=-\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\cdot\nabla\varepsilon\right). \qquad (6.5.2)$$

Если предположить монохроматичность поля $\mathbf{E}(x, y, z, t) =$ $= \operatorname{Re}[\mathbf{E}(x, y, z)\exp(i\omega t)]$, то, пренебрегая правой частью в (6.5.2)[1], получим

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2(\mathbf{r})\mathbf{E}=0. \qquad (6.5.3)$$

Здесь

$$k^2(r)=\omega^2\mu\varepsilon(r)[1-i\sigma(r)/\omega\varepsilon] \qquad (6.5.4)$$

[1] Эта операция оправдана, если относительное изменение ε на длине волны мало.

и допустим возможность зависимости величины ε от r. Считаем k комплексной величиной, учитывая таким образом потери ($\sigma > 0$) или усиление ($\sigma < 0$) в среде[1].

Ограничимся случаем, когда $k^2(\mathbf{r})$ представляется в виде

$$k^2(\mathbf{r}) = k^2 - kk_2r^2 \,, \tag{6.5.5}$$

где согласно (6.5.4)

$$k^2 = k^2(0) = \omega^2 \mu\varepsilon(0)\left(1 + i\frac{\sigma(0)}{\omega\varepsilon(0)}\right)$$

и k_2 — некоторая константа. Далее будем искать лишь азимутально симметричные решения, т. е. решения, которые зависят от продольной z и поперечной $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ координат. Тогда в (6.5.3) можно вместо ∇^2 записать

$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \,. \tag{6.5.6}$$

Мы рассматриваем распространение квазиплоской волны, поток энергии в которой направлен преимущественно вдоль оси z. Можно считать, что поле имеет только поперечную компоненту E. Поле E будем искать в виде

$$E = \Psi(x,\ y,\ z)\exp(-ikz). \tag{6.5.7}$$

Если предположить, что функция Ψ в продольном направлении меняется достаточно плавно, т. е. $k\Psi' \gg \Psi'' \ll k^2\Psi$, то после несложных преобразований получим из (6.5.3) и (6.5.5)

$$\nabla_\perp^2 \Psi - 2ik\Psi' - kk_2r^2\Psi = 0, \tag{6.5.8}$$

где $\Psi' = \partial\Psi/\partial z$.

Подстановка функции Ψ, которую теперь возьмем в виде

$$\Psi = \exp\left\{-i\left[P(z) + \frac{1}{2}Q(z)r^2\right]\right\}, \tag{6.5.9}$$

в (6.5.8) дает, с учетом (6.5.6),

$$-Q^2r^2 - 2iQ - kr^2Q' - 2kP' - kk_2r^2 = 0. \tag{6.5.10}$$

Поскольку уравнение (6.5.10) должно удовлетворяться для любого значения r, коэффициенты при различных степенях r тождественно равны нулю. Это приводит к уравнениям [7]

$$Q^2 + kQ' + kk_2 = 0, \quad P' = -iQ/k. \tag{6.5.11}$$

Таким образом, волновое уравнение сведено к уравнениям (6.5.11).

---

[1] Если k — комплексная величина (т. е. $k = k_r + k_i$), то бегущая плоская электромагнитная волна описывается выражением $\exp[i(\omega t - kz)] = \exp[k_i z + i(\omega t - k_r z)]$.

6.6. Гауссов пучок в однородной среде

Для однородной среды согласно (6.5.5) $k_2 = 0$. Тогда из (6.5.11) получим

$$Q^2 + kQ' = 0. \tag{6.6.1}$$

Введя в рассмотрение функцию $s(z)$, определяемую соотношением

$$Q = ks'/s, \tag{6.6.2}$$

имеем из (6.6.1) $s'' = 0$ и $s' = a$, $s = az + b$, или, используя (6.6.2), имеем

$$Q(z) = ka/(az + b), \tag{6.6.3}$$

где a и b — произвольные константы. Введем параметр

$$q(z) = k/Q(z) = 2\pi n/\lambda Q(z) \tag{6.6.4}$$

и перепишем уравнение (6.6.3) в более удобной форме

$$q = z + q_0. \tag{6.6.5}$$

Из (6.5.11) и (6.6.4) имеем $P' = -i/q = -i/(z + q_0)$, или

$$P(z) = -i \ln(1 + z/q_0), \tag{6.6.6}$$

причем постоянная интегрирования равна нулю[1].

Подставив выражения (6.6.5) и (6.6.6) в (6.5.9), получим

$$\Psi = \exp\left\{-i\left[-i\ln\left(1+\frac{z}{q_0}\right)+\frac{k}{2(q_0+z)}r^2\right]\right\}. \tag{6.6.7}$$

Предположим, что постоянная интегрирования q_0 принимает чисто мнимые значения

$$q_0 = i\pi\rho_0^2 n/\lambda \quad (\lambda = 2\pi n/k), \tag{6.6.8}$$

где ρ_0^2 — действительная величина. Как будет показано ниже, выбор мнимого q_0 приводит к волнам, энергия которых сосредоточена вблизи оси z. Используя (6.6.8), последовательно рассмотрим оба слагаемых в показателе экспоненты выражения (6.6.7). Первое слагаемое приводится к виду

$$\exp\left[-\ln\left(1-i\frac{\lambda z}{\pi\rho_0^2 n}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda z}{\pi\rho_0^2 n}\right)^2}} \times$$

$$\times \exp\left[i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda z}{\pi\rho_0^2 n}\right)\right]. \tag{6.6.9}$$

Здесь использовано, что $\ln(a + ib) = \ln\sqrt{a^2 + b^2} + i\,\mathrm{arctg}(b/a)$.

---

[1] Постоянная интегрирования определяет лишь фазу поля в выражении (6.5.7). Поскольку начало отсчета времени выбирается произвольно, фазу можно положить равной нулю.

Подставив (6.6.8) во второе слагаемое (6.6.7) и разделив результат на действительную и мнимую части, получим

$$\exp\left[\frac{-ikr^2}{2(q_0+z)}\right]=\exp\left\{\frac{-r^2}{\rho_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi\rho_0^2 n}\right)^2\right]}-\frac{ikr^2}{2z\left[1+\left(\frac{\pi\rho_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right]}\right\}\cdot \quad (6.6.10)$$

Если ввести параметры

$$\rho^2(z)=\rho_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi\rho_0^2 n}\right)^2\right]=\rho_0^2\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right), \quad (6.6.11)$$

$$R(z)=z\left[1+\left(\frac{\pi\rho_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right]=z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad (6.6.12)$$

$$\eta(z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda z}{\pi\rho_0^2 n}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (6.6.13)$$

$$z_0\equiv\pi\rho_0^2 n/\lambda$$

и подставить (6.6.9) и (6.6.10) в (6.6.7), то получим следующее выражение для поля $E(x, y, z)=\Psi(x, y, z)\exp[-ikz]$:

$$E(x, y, z)=E_0\frac{\rho_0}{\rho(z)}\exp\left\{-i[kz-\eta(z)]-i\frac{kr^2}{2q(z)}\right\}=$$

$$=E_0\frac{\rho_0}{\rho(z)}\exp\left\{-i[kz-\eta(z)]-r^2\left(\frac{1}{\rho^2(z)}+\frac{ik}{2R(z)}\right)\right\}, \quad (6.6.14)$$

где использовано в соответствии с (6.5.9) и (6.6.4), что

$$1/q(z)=1/R(z)-i\lambda/\pi n\rho^2(z). \quad (6.6.14a)$$

В этом состоит основной результат. Полученное решение называется гауссовым пучком. Более сложные (с азимутальными вариациями) решения уравнения (6.5.3) — пучки высших порядков — будут рассмотрены отдельно.

Из выражения (6.6.14) следует, что параметр $\rho(z)$, зависимость которого от продольной координаты дается соотношением (6.6.11), совпадает с расстоянием r, на котором амплитуда поля уменьшается в e раз по сравнению со своим значением на оси. Назовем его поэтому «шириной» пучка. Минимальную ширину ρ_0 пучок имеет в плоскости $z=0$. Параметр R в (6.6.14) представляет собой радиус кривизны близкого к сферическому волнового фронта[1)], который пересекает ось в точке z. Докажем это утверждение, найдя радиус кривизны волнового фронта или, что проще, рассмотрев сферическую волну с центром в точке $z=0$. Она дается выражением

$$E\sim\frac{1}{R}\exp(-ikR)=\frac{1}{R}\exp\left[-ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{R}\exp\left(-ikz-ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right), \quad x^2+y^2\ll z^2, \quad (6.6.15)$$

1) В действительности, как следует из (6.6.14), за исключением окрестностей плоскости $z=0$, волновые фронты являются параболоидами, так как определяются соотношением $k[z+(r^2/2R)]=\text{const}$. Для $r^2\ll z^2$ различие между параболической и сферической поверхностями несущественно.

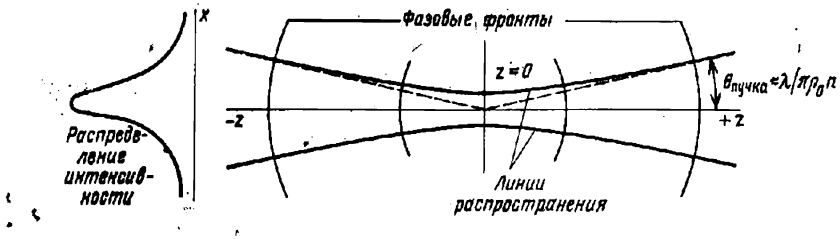


Рис. 6.5. Распространяющийся гауссов пучок

так как z равно R — радиусу кривизны сферической волны. Сравнение (6.6.15) с (6.6.14) дает основание отождествить R с радиусом кривизны гауссова пучка. Знак R определяется по тем же правилам, что и в табл. 6.1, т. е. $R(z)$ отрицателен, если центр кривизны расположен в точке $z' > z$ и наоборот.

Гауссов пучок согласно (6.6.14) однозначно определяется минимальной шириной ρ_0 и положением плоскости, в которой она достигается, т. е. плоскость $z = 0$ является выделенной. Ширина пучка ρ и его радиус кривизны R при любом значении z могут быть определены по формулам (6.6.11) и (6.6.12). Некоторые из этих параметров приведены на рис. 6.5. Гиперболы, изображенные на рисунке, соответствуют направлению хода лучей и представляют собой сечения гиперболоидов

$$x^2 + y^2 = \text{const}\, \rho^2(z) \qquad (6.6.16)$$

плоскостью, проходящей через ось z. Сферические поверхности имеют радиусы кривизны, определяемые формулой (6.6.12). В пределе больших z гиперболоид асимптотически приближается к конусу

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{\pi \rho_0 n} z. \qquad (6.6.17)$$

Половина угла при вершине конуса служит мерой угловой расходимости пучка

$$\theta_{\text{пучка}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\pi \rho_0 n}\right) \approx \frac{\lambda}{\pi \rho_0 n}. \qquad (6.6.18)$$

Последний результат в точности соответствует теории дифракции. Действительно, пучок, имеющий апертуру ρ_0, будет расходиться (дифрагировать) в дальней зоне ($z \gg \pi \rho_0^2 n/\lambda$) согласно (6.6.18).

6.7. Гауссов пучок в линзоподобной среде. Закон $ABCD$

Вернемся к общему случаю линзоподобной среды, для которой $k_2 \neq 0$. Функции P и Q, введенные в (6.5.9), удовлетворяют согласно (6.5.11) уравнениям

$$Q^2 + kQ' + kk_2 = 0, \qquad P' = -iQ/k. \qquad (6.7.1)$$

Используя замену переменных

$$= ks'/s, \qquad (6.7.2)$$

получим из (6.7.1) уравнение $s'' + (k_2/k)\, s = 0$, решение которого

$$s(z) = a \sin \sqrt{\frac{k_2}{k}}\, z + b \cos \sqrt{\frac{k_2}{k}}\, z,$$

$$s'(z) = a \sqrt{\frac{k_2}{k}} \cos \sqrt{\frac{k_2}{k}}\, z - b \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin \sqrt{\frac{k_2}{k}}\, z, \qquad (6.7.3)$$

где a и b — произвольные константы.

Подставив полученные соотношения (6.7.3) в (6.7.2), получим для комплексного радиуса пучка $q(z)$

$$q(z) = \frac{k}{Q(z)} =$$

$$= \frac{q_0 \cos(\sqrt{k_2/k}\, z) + \sqrt{k/k_2} \sin(\sqrt{k_2/k}\, z)}{-q_0 \sqrt{k_2/k} \sin(\sqrt{k_2/k}\, z) + \cos(\sqrt{k_2/k}\, z)}. \qquad (6.7.4)$$

Здесь $q_0 = k/Q(0)$ — комплексный радиус пучка в начальном сечении.

Физический смысл величины $q(z)$ в этом случае выявляется из выражения (6.5.9), согласно которому зависимость функции $\Psi(r, z)$ от поперечной координаты r имеет вид

$$\Psi \sim \exp[-iQ(z)\, r^2/2] = \exp[-ikr^2/2q(z)].$$

Разделяя $q(z)$ на действительную и мнимую части:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \rho^2(z)\, n}, \qquad (6.7.5)$$

будем иметь

$$\Psi \sim \exp\left[-\frac{r^2}{\rho^2(z)} - i \frac{kr^2}{2R(z)}\right].$$

Таким образом, $\rho(z)$ — ширина пучка, а $R(z)$ — радиус кривизны его волнового фронта, как и в случае однородной среды, когда справедлива формула (6.6.14). Для частного случая однородной среды ($k_2 = 0$) (6.7.4) преобразуется в (6.6.5).

Преобразование гауссова пучка (закон *ABCD*). Итак, выведен закон преобразования (6.7.4) гауссова пучка, распространяющегося в линзоподобной среде, которая характеризуется параметром k_2. Из сравнения (6.7.4) с выражениями (6.4.5) и (6.4.6) следует, что закон преобразования пучка можно представить в виде

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \qquad (6.7.6)$$

где A, B, C, D — элементы лучевой матрицы, характеризующей *ту же самую среду*. Отсюда непосредственно следует, что при прохождении пучка через любой из элементов, приведенных в табл. 6.1

(или отражении от них), выполняется (6.7.6), так как каждый элемент может рассматриваться как частный случай линзоподобной среды. Применив (6.7.6), например, к тонкой линзе с фокусным расстоянием f, получим

$$1/q_2 = 1/q_1 - 1/f, \qquad (6.7.7)$$

откуда, используя (6.7.5), находим

$$\rho_2 = \rho_1, \qquad 1/R_2 = 1/R_1 - 1/f. \qquad (6.7.8)$$

При замене f на $R/2$ эти соотношения применимы также к отражению от зеркала с радиусом кривизны R.

Рассмотрим далее прохождение гауссова пучка через двухслойную линзоподобную среду. Матрицы (A_1, B_1, C_1, D_1) и (A_2, B_2, C_2, D_2) — лучевые матрицы соответственно первого и второго слоев среды. Обозначим через q_1 параметр пучка на входе, а через q_3 — на выходе среды. Тогда из (6.7.6) получим

$$q_2 = (A_1 q_1 + B_1)/(C_1 q_1 + D_1)$$

для параметра пучка на выходе из первого слоя и

$$q_3 = (A_2 q_2 + B_2)/(C_2 q_2 + D_2).$$

Объединяя последние два уравнения, будем иметь

$$q_3 = (A_T q_1 + B_T)/(C_T q_1 + D_T), \qquad (6.7.9)$$

где (A_T, B_T, C_T, D_T) — элементы лучевой матрицы, связывающей выходную плоскость *3* с входной *1*, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix}. \qquad (6.7.10)$$

По индукции сразу же получаем, что выражение (6.7.9) может быть применено для прохождения гауссова пучка через произвольное число (например, n) линзоподобных слоев или элементов. Матрица (A_T, B_T, C_T, D_T) представляет собой произведение n матриц, характеризующих отдельные элементы системы. Значение закона $ABCD$ заключается в том, что он позволяет проследить изменение параметра пучка $q(z)$ при прохождении пучка через сложную последовательность линзоподобных элементов. Радиус кривизны $R(z)$ и ширину пучка $\rho(z)$ в любой плоскости, перпендикулярной z, можно вычислить по формуле (6.7.5). Техника применения этого метода станет ясна из следующего примера.

Пример

Фокусировка гауссова пучка. Рассмотрим падение гауссова пучка на тонкую линзу с фокусным расстоянием f. Пусть падающий пучок имеет минимальную ширину в плоскости перед линзой (рис. 6.6). Определим положение «шейки» (наиболее узкой части) прошедшего через линзу пучка и ширину его в этом месте.

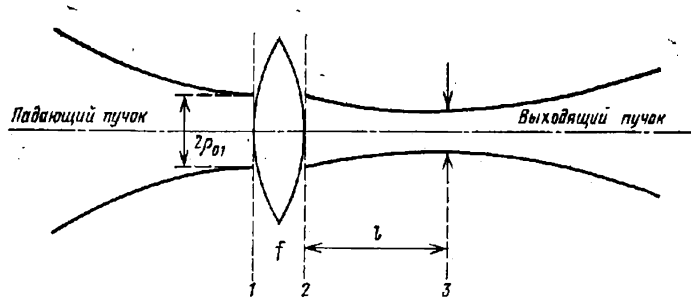


Рис. 6.6. Фокусировка гауссова пучка

Во входной плоскости *1* $\rho = \rho_{01}$, $R_1 = \infty$, поэтому

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i\frac{\lambda}{\pi\rho_{01}^2 n} = -i\frac{\lambda}{\pi\rho_{01}^2 n}.$$

Используя (6.7.8), имеем

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{f} - i\frac{\lambda}{\pi\rho_{01}^2 n}, \quad q_2 = \frac{1}{-1/f - i\lambda/\pi\rho_{01}^2 n} =$$

$$= \frac{-a+ib}{a^2+b^2}, \quad a = 1/f, \quad b = \lambda/\pi\rho_{01}^2 n.$$

Для выходной плоскости *3*, используя (6.6.5), получаем

$$q_3 = q_2 + l = \frac{-a}{a^2+b^2} + l + \frac{ib}{a^2+b^2},$$

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{R_3} - i\frac{\lambda}{\pi\rho_3^2 n} = \frac{\left(\dfrac{-a}{a^2+b^2} + l\right) - i\dfrac{b}{a^2+b^2}}{\left(\dfrac{-a}{a^2+b^2} + l\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)^2}.$$

Согласно постановке задачи плоскость *3* соответствует шейке прошедшего через линзу пучка. Поэтому $R_3 = \infty$, и из последнего соотношения мы получим выражение для расстояния шейки прошедшего пучка от линзы

$$l = \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{f}{1+(f\lambda/\pi\rho_{01}^2 n)} = \frac{f}{(1+(f/z_{01})^2} \qquad (6.7.11)$$

и для минимальной ширины этого пучка

$$\frac{\rho_3}{\rho_{01}} = \frac{f\lambda/\pi\rho_{01}^2 n}{\sqrt{1+(f\lambda/\pi\rho_{01}^2 n)^2}} = \frac{f/z_{01}}{\sqrt{1+(f/z_{01})^2}}. \qquad (6.7.12)$$

Параметр конфокальности пучка $z_{01} = \pi\rho_{01}^2 n/\lambda$, представляющий собой, согласно (6.6.11), расстояние от шейки пучка до точки, в которой ширина пучка увеличивается в $\sqrt{2}$ раза, является удобной характеристикой сходимости падающего пучка.

6.8. Гауссов пучок в линзовом волноводе

В качестве еще одного примера применения закона ABCD рассмотрим прохождение гауссова пучка через последовательность тонких линз (рис. 6.2). Матрица, связывающая параметры луча в плоскости $s+1$ с его параметрами в плоскости $s=1$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^s, \qquad (6.8.1)$$

где (A, B, C, D) — определяемая по (6.1.6) матрица, которая описывает прохождение через элементарную ячейку системы ($\Delta s = 1$). Для вычисления элементов матрицы (6.8.1) воспользуемся хорошо известной формулой возведения матрицы, имеющей определитель, равный единице, в s-ю степень. В результате находим

$$A_T = \frac{A \sin(s\theta) - \sin[(s-1)\theta]}{\sin\theta},$$

$$B_T = \frac{B \sin(s\theta)}{\sin\theta}, \quad C_T = \frac{C \sin(s\theta)}{\sin\theta}, \quad D_T = \frac{D \sin(s\theta) - \sin[(s-1)\theta]}{\sin\theta}, \qquad (6.8.2)$$

где

$$\cos\theta = {}_{1/2}(A+D) = 1 - d/f_2 - d/f_1 + d^2/2f_1f_2. \qquad (6.8.3)$$

Подставив (6.8.2) в (6.7.6), получим окончательно

$$q_{s+1} = \frac{\{A \sin(s\theta) - \sin[(s-1)\theta]\} q_1 + B \sin(s\theta)}{C \sin(s\theta)\, q_1 + D \sin(s\theta) - \sin[(s-1)\theta]}. \qquad (6.8.4)$$

Условие локализации гауссова пучка в линзовом волноводе согласно (6.8.4) состоит в том, что величина θ принимает только действительные значения. В противном случае ширина пучка $\rho(z)$ экспоненциально возрастает с увеличением z. Как следует из (6.8.3), условие ограниченности пучка $|\cos\theta| \leqslant 1$ или

$$0 \leqslant (1 - d/2f_1)(1 - d/2f_2) \leqslant 1 \qquad (6.8.5)$$

имеет такой же вид, как условие устойчивости луча в системе тонких линз (6.1.16).

6.9. Волновые пучки высших порядков в однородной среде [1]

Поле рассмотренного в предыдущих параграфах гауссова пучка зависит от продольной z и радиальной r координат. Если не ограничивать анализ случаем азимутальной симметрии ($\partial/\partial\varphi = 0$, где φ — азимутальная координата в цилиндрической системе (r, φ, z))

[1] Единой терминологии здесь, по-видимому, пока не существует. В оригинале эти пучки именуются гауссовыми модами высших порядков, а в русском переводе книги Д. Маркузе [21, с. 307] — пучками Эрмита—Гаусса. — *Прим. ред.*

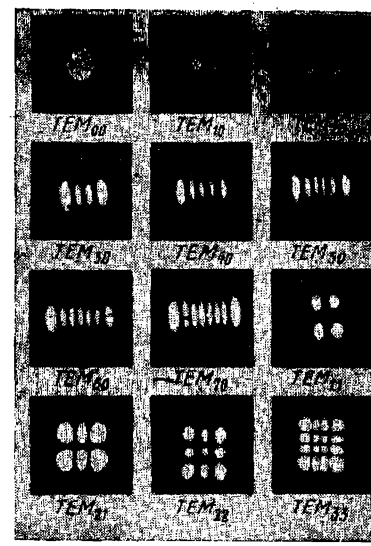


Рис. 6.7. Поперечная структура некоторых мод низших порядков [9]

и положить $k_2 = 0$, то волновое уравнение (6.5.3) будет иметь решение [13, 21]

$$E_{l,m}(x, y, z) = E_0 \frac{\rho_0}{\rho(z)} \times$$

$$\times H_l\left(\sqrt{2}\,\frac{x}{\rho(z)}\right) H_m\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\rho(z)}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2q(z)} - \right.$$

$$\left. -ikz + i(l+m+1)\,\eta\right] =$$

$$= E_0 \frac{\rho_0}{\rho(z)} H_l\left(\sqrt{2}\,\frac{x}{\rho(z)}\right) \times$$

$$\times H_m\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\rho(z)}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\rho^2(z)} - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - ikz + i(l+m+1)\,\eta\right], \qquad (6.9.1)$$

где H_l — полином Эрмита порядка l, а параметры $\rho(z)$, $R(z)$, $q(z)$ определяются выражениями (6.6.11)—(6.6.13).

Отметим, что фаза поля на оси изменяется по закону

$$\theta = kz - (l + m + 1)\,\mathrm{arctg}\,(z/z_0), \quad z_0 = \pi\rho_0^2 n/\lambda. \qquad (6.9.2)$$

Зависимость электрического поля от координаты x (или y) имеет вид

$$E_l(\sqrt{2}\,x/\rho) \sim H_l(\zeta)\exp(-\zeta^2/2), \qquad (6.9.3)$$

где $\zeta = \sqrt{2}x/\rho$. Согласно (6.9.3) вид решения $E_l(\sqrt{2}x/\rho)$ совпадает с волновой функцией $u_l(\zeta)$ гармонического осциллятора, полученной в гл. 2. Поэтому функции $u_l(\zeta)$ и $|u_l(\zeta)|^2$, графики которых изображены на рис. 2.1, в равной мере пригодны для описания волновых пучков. Фотографии структур поля основного (гауссова, $l = 0$) и высших пучков приведены на рис. 6.7. Первые четыре снимка ($l = 0; 1, 2, 3$) соответствуют интенсивностям $|u_l(\zeta)|^2$, изображенным на рис. 2.1.

6.10. Волновые пучки высших порядков в среде с квадратичным профилем показателя преломления

Рассмотрим пучки высших порядков в среде с показателем преломления, меняющимся по закону

$$n^2(\mathbf{r}) = n^2\left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right), \qquad (6.10.1)$$

который совпадает с (6.5.5), если положить $k_2 = 2\pi n_2/\lambda$. В дальнейшем ограничимся стационарным по z ($q(z) = \text{const}$) случаем.

Векторное волновое уравнение преобразуется к виду

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2\left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right)\mathbf{E} = 0,$$

где $k = 2\pi n/\lambda$ — постоянная распространения в среде с показателем преломления n.

Для скалярного поля в виде $E(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) \exp(-i\beta z)$ последнее уравнение перейдет в

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left[k^2\left(1 - \frac{n_2}{n} r^2\right) - \beta^2\right]\Psi = 0. \qquad (6.10.2)$$

Если функцию Ψ представить в виде $\Psi = f(x)\,g(y)$, то это уравнение легко разделится на два обыкновенных дифференциальных уравнения. Каждое из них имеет такой же вид, как и уравнение гармонического осциллятора (2.2.2). Для того, чтобы непосредственно воспользоваться результатами § 2.2, сделаем замену переменных

$$\zeta \to \sqrt{2}\, x/\rho, \quad \rho = (\lambda/\pi)^{1/2}(1/nn_2)^{1/4}. \qquad (6.10.3)$$

Тогда из (2.2.14) получим

$$\Psi_{l,m}(x, y) = E_{l,m}(\mathbf{r})\, e^{i\beta_{l,m} z} =$$

$$= E_0 H_l\left(\sqrt{2}\,\frac{x}{\rho}\right) H_m\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\rho}\right) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\right). \qquad (6.10.4)$$

Здесь H_l — полиномы Эрмита порядка l. Собственные значения $\beta_{l,m}$, получаемые из (2.2.7) и (6.10.3), имеют вид

$$\beta_{l,m} = k\left[1 - \frac{2}{k}\sqrt{\frac{n_2}{n}}(l+m+1)\right]^{1/2}. \qquad (6.10.5)$$

Дисперсия групповой скорости в квадратичной среде. Диспергирующие свойства стеклянных волокон[1] с показателем преломления, удовлетворяющим закону (6.10.1), определяют их перспективность для целей оптической связи [11, 12]. Рассмотрим короткий импульс света, поступающий в такой волновод и возбуждающий в нем одновременно большое число мод $E_{l,m}$. Каждой из этих мод отвечает групповая скорость

$$(v_{\text{гр}})_{l,m} = d\omega/d\beta_{l,m}. \qquad (6.10.6)$$

Нетрудно видеть, что ширина импульса при распространении по волноводу не увеличивается, если групповые скорости мод одинаковы, т. е. $(v_{\text{гр}})_{l,m}$ не зависит от индексов l и m.

Для волокон с малым изменением показателя преломления

$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{n_2}{n}}(l+m+1) \ll 1 \qquad (6.10.7)$$

[1]. Стеклянные волокна являются одним из типов диэлектрических волноводов, направляющих световые волны. — *Прим. пер.*

(6.10.5), можно аппроксимировать выражением

$$\beta_{l,\,m} \approx k - \sqrt{\frac{n_2}{n}}\,(l+m+1) - \frac{n_2}{2kn}\,(l+m+1)^2 \quad (6.10.8)$$

и согласно (6.10.6) получить затем

$$(v_{\text{гр}})_{l,\,m} = \frac{c/n}{\left[1 + \frac{(n_2/n)}{2k^2}\,(l+m+1)^2\right]}. \quad (6.10.9)$$

Таким образом, при выполнении условия (6.10.7) дисперсия волноводных мод приводит к расширению импульса во втором порядке по параметру $[(n_2/n)/2k^2]^{1/2}\,(l+m+1)$.

Еще одно важное следствие зависимости групповой скорости от частоты ω заключается в увеличении минимально допустимого интервала между импульсами. Действительно, рассмотрим импульс длительностью τ. Ширина его спектра пропорциональна $\Delta\omega \sim 1/\pi\tau$. Если импульс возбуждает (l, m)-моду волновода, то увеличение его длительности на расстояние L составит

$$\Delta\tau \simeq \frac{L}{v_{\text{гр}}^2}\,\frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega}\left(\frac{1}{\pi\tau}\right), \quad (6.10.10)$$

где

$$\frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega} \approx \frac{(n_2/n)}{k^3}\,(l+m+1)^2. \quad (6.10.11)$$

Поскольку приращение длительности импульса $\Delta\tau$ не должно превышать интервал между импульсами, то расширение импульса ограничивает частоту повторения импульсов и, следовательно, скорость передачи информации в канале длиной L.

6.11. Распространение пучков в среде с квадратичным профилем усиления

Во многих лазерных средах показатель усиления является функцией координат. Это может быть вызвано разнообразными причинами, в том числе: радиальным распределением возбужденных электронов плазмы в газовых лазерах [15, 16]; пространственной неоднородностью накачки в твердотельных лазерах и зависимостью степени насыщения усиления от поперечной координаты в лазерном пучке.

Для описания среды с квадратичным профилем усиления (поглощения) зададим в выражении (6.5.5) следующую постоянную распространения:

$$k\,(r) = k \pm i\,(\alpha_0 - {}_1/_2\alpha_2 r^2). \quad (6.11.1)$$

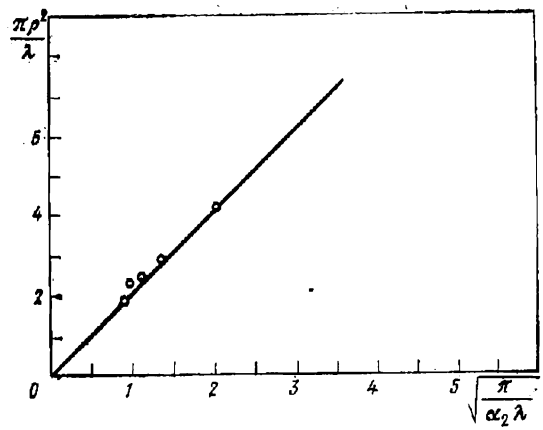


Рис. 6.8. Теоретическая зависимость радиуса пучка от коэффициента при квадратичной части показателя усиления, α_2, (сплошная линия)

Экспериментальные точки получены в опытах с ксеноновым лазером на 3,39 мкм, в котором α_2 варьировалось при изменении ненасыщенного усиления активной среды [15]

Знак плюс (минус) соответствует усилению (поглощению) в среде. Предположив $k_2 r^2 \ll k$, получим из (6.5.5) $k_2 = i\alpha_2$. Используя это соотношение в (6.11.1), будем иметь для комплексного радиуса стационарного[1] ($Q' = 0$) гауссова пучка

$$1/q = -i\sqrt{k_2/k} = -i\sqrt{i\alpha_2/k}. \qquad (6.11.2)$$

Разделив выражение (6.11.2) на действительную и мнимую части, получим в соответствии с (6.7.5), для радиуса и ширины стационарного пучка

$$\rho^2 = 2\sqrt{\lambda/\pi n\alpha_2}, \qquad R = 2\sqrt{\pi n/\lambda\alpha_2}. \qquad (6.11.3)$$

Таким образом, стационарный пучок в рассматриваемой среде имеет постоянную ширину и в то же время конечный радиус кривизны волнового фронта.

Поведение нестационарного гауссова пучка в среде с квадратичным профилем усиления описывается выражением (6.7.4), в котором $k_2 = i\alpha_2$. Экспериментальные результаты свидетельствуют об уменьшении ширины пучка с ростом параметра усиления (рис. 6.8), что соответствует (6.7.4).

6.12. Эллиптические гауссовы пучки

Волновые пучки, рассмотренные выше, обладают, согласно (6.9.1) той особенностью, что уменьшение поля в плоскости x—y происходит по закону

$$E_{l,m} \sim \exp[-(x^2 + y^2)/\rho^2(z)], \qquad (6.12.1)$$

т. е. геометрическое место точек плоскости x—y, в которых поле по сравнению с полем на оси уменьшается в e раз, представляет

[1] Стационарными здесь называются радиус кривизны и ширина пучка, а не интенсивность поля, которая согласно (6.11.1) возрастает или уменьшается.

собой окружность радиуса $\rho(z)$. Такие пучки носят название круговых гауссовых пучков.

Волновое уравнение (6.5.3) допускает также решения

$$E_{l,m} \sim \exp\left[-\frac{x^2}{\rho_x^2(z)} - \frac{y^2}{\rho_y^2(z)}\right], \qquad (6.12.2)$$

которым соответствует разная скорость уменьшения поля в направлении осей x и y ($\rho_x \neq \rho_y$). Такие пучки, называемые эллиптическими гауссовыми пучками, образуются при прохождении кругового гауссова пучка через цилиндрическую линзу. Модами лазерных резонаторов, обладающих астигматизмом, т. е. таких резонаторов, зеркала которых имеют в плоскостях x—z и y—z разные радиусы кривизны, также являются эллиптические гауссовы пучки.

Воспроизведем основные соотношения предыдущих параграфов применительно к эллиптическим пучкам. Предположим вместо (6.5.9), что решение имеет вид

$$\Psi = \exp\left\{-i\left[P(z) + \frac{Q_x(z)\,x^2}{2} + \frac{Q_y(z)\,y^2}{2}\right]\right\}. \qquad (6.12.3)$$

Тогда получим уравнения, подобные (6.5.11)[1]

$$Q_x^2 + kQ_x' + kk_{2x} = 0, \qquad Q_y^2 + kQ_y' + kk_{2y} = 0 \qquad (6.12.4)$$

и

$$P' = -i\,(Q_x + Q_y)/2k. \qquad (6.12.5)$$

Определив компоненты комплексного радиуса пучка

$$q_{\substack{x\\y}} = k/Q_{\substack{x\\y}}(z), \qquad (6.12.6)$$

получим аналогично (6.6.5) для пучка в однородной среде ($k_{2x} = k_{2y} = 0$)

$$q_x(z) = z + C_x, \qquad (6.12.7)$$

Здесь C_x — произвольная константа интегрирования. Определим ее следующим образом:

$$C_x = -z_x + q_{0x},$$

где z_x — действительная и q_{0x} — мнимая величины. Физический смысл введения этих двух констант станет ясным из дальнейшего изложения. Путем замены $x \to y$ нетрудно получить аналогичное выражение и для $q_y(z)$. Подстановка выражений $q_x(z)$ и $q_y(z)$ в (6.12.5) дает

$$P = -\frac{i}{2}\left[\ln\left(1 + \frac{z-z_x}{q_{0x}}\right) + \ln\left(1 + \frac{z-z_y}{q_{0y}}\right)\right].$$

---

[1] Параметры k_{1x} и k_{2y} определяются выражением $k^2(x, y) = k^2 - kk_{1x}x^2 - kk_{2y}y^2$, которое представляет собой обобщение (6.5.5).

Рассуждая так же, как в § 6,6, получим для эллиптического гауссова пучка

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{\sqrt{\rho_{0x}\rho_{0y}}}{\sqrt{\rho_x(z)\rho_y(z)}} \exp\left\{-i[kz - \eta(z)] - \frac{ikx^2}{2q_x(z)} - \frac{iky^2}{2q_y(z)}\right\} =$$

$$= E_0 \frac{\sqrt{\rho_{0x}\rho_{0y}}}{\sqrt{\rho_x(z)\rho_y(z)}} \exp\left\{-i[kz - \eta(z)] - x^2\left[\frac{1}{\rho_x^2(z)} + \frac{ik}{2R_x(z)}\right] - \right.$$

$$\left. - y^2\left[\frac{1}{\rho_y^2(z)} + \frac{ik}{2R_y(z)}\right]\right\}, \qquad (6.12.8)$$

где

$$q_{0x} = i\pi\rho_{0x}^2 n/\lambda,$$

$$\rho_x^2 = \rho_{0x}^2\left[1 + \left(\frac{\lambda(z - z_x)}{\pi\rho_{0x}^2 n}\right)^2\right], \quad R_x(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi\rho_{0x}^2 n}{\lambda(z - z_x)}\right)^2\right] \qquad (6.12.9)$$

Замена $x \to y$ дает соответствующие формулы для q_{0y}, ρ_y и R_y

Угол $\eta(z)$ в (6.12.8) определяется следующим выражением

$$\eta(z) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{\lambda(z - z_x)}{\pi\rho_{0x}^2 n}\right] + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{\lambda(z - z_y)}{\pi\rho_{0y}^2 n}\right]. \qquad (6.12.10)$$

Таким образом все результаты, полученные для кругового пучка, применимы и для описания эллиптического пучка в x—z и y—z плоскостях по отдельности. Это позволяет рассматривать эллиптический пучок как совокупность двух независимых «пучков». Положения шеек этих пучков в общем случае могут не совпадать. Например, как показано на рис. 6.9, для x—z «пучка» плоскость шейки имеет координату $z = z_x$, а для x—z «пучка» — координату $z = z_y$, где z_x и z_y — произвольные величины.

Из сходства между (6.12.4) и (6.5.11) следует также, что закон преобразования гауссовых пучков (6.7.9) — закон ABCD — может

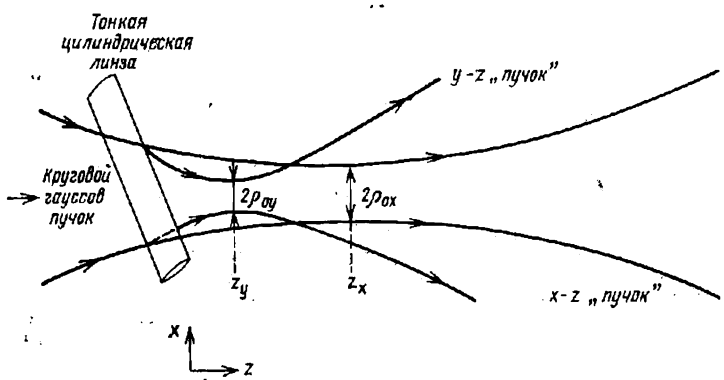


Рис. 6.9. Преобразование кругового гауссова пучка в эллиптический с помощью цилиндрической линзы

быть применен независимо к комплексным радиусам $q_x(z)$ и $q_y(z)$, которые согласно (6.12.8) имеют вид

$$\frac{1}{q_x(z)} = \frac{1}{R_x(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n \rho_x^2(z)}, \qquad \frac{1}{q_y(z)} = \frac{1}{R_y(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n \rho_y^2(z)} \quad (6.12.11)$$

Эллиптические пучки в линзоподобной среде. Рассмотрим стационарный эллиптический пучок, распространяющийся в среде с показателем преломления

$$n^2(r) = n\left(1 - \frac{n_{2x}}{n}x^2 - \frac{n_{2y}}{n}y^2\right). \quad (6.12.12)$$

В результате преобразований, аналогичных используемым в § 6.10, получим

$$E_{l,m}(r) = E_0 e^{-i\beta_{l,m}z} H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\rho_x}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\rho_y}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{\rho_x^2} - \frac{y^2}{\rho_y^2}\right), \quad (6.12.13)$$

где $$\rho_x = (\lambda/\pi)^{1/2}(1/nn_{2x})^{1/4}, \qquad \rho_y = (\lambda/\pi)^{1/2}(1/nn_{2y})^{1/4}, \quad (6.12.14$$

$$\beta_{l,m} = k\left\{1 - \frac{2}{k}\left[\sqrt{\frac{n_{2x}}{n}}\left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{n_{2y}}{n}}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{1/2}. \quad (6.12.15)$$

Эллиптические пучки экспериментально наблюдались в инжекционных лазерах на GaAs с полосковой геометрией электродов [18—20]. Распределения интенсивностей некоторых (0, m) мод в ближней и дальней зонах показаны на рис. 6.10.

Задачи

6.1. Выведите соотношения (6.2.1)—(6.2.4).

6.2. Покажите, что собственные значения, λ, уравнения

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_s \\ r_s' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} r_s \\ r_s' \end{vmatrix}$$

это $\lambda = e^{\pm i\theta}$, определяемые выражением (6.1.13). Заметим, что согласно (6.1.5), предшествующее матричное уравнение может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} r_{s+1} \\ r_{s+1}' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} r_s \\ r_s' \end{vmatrix}$$

6.3. Попытайтесь обосновать применимость соотношения (6.4.1), показав, что оно справедливо для плоской волны, падающей на линзу.

6.4. Выведите формулу (6.4.7).

6.5. Покажите, что слой $0 \leqslant z \leqslant l$ линзоподобной среды отображает точку на оси с $z < 0$ также в точку (изображение мнимое, если оно расположено в области $z < l$).

6.6. Получите лучевые матрицы, приведенные в табл. 6.1.

6.7. Получите формулы (6.7.11), (6.7.12) в случае произвольного расположения линзы относительно шейки падающего гауссова пучка.

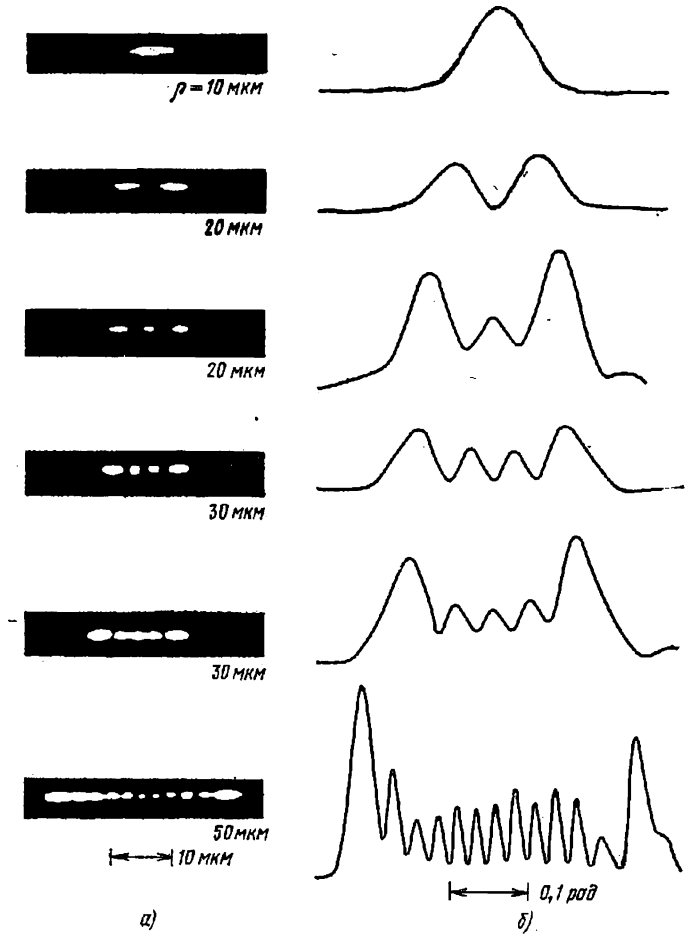
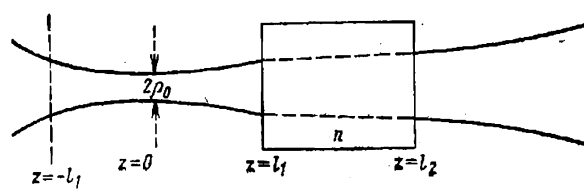


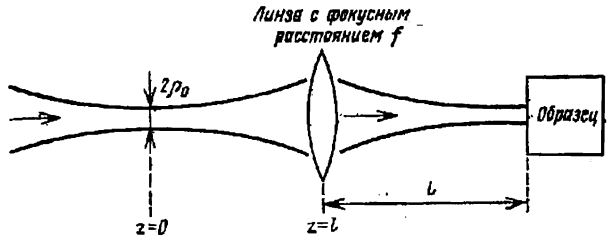
Рис. 6.10. Распределение интенсивности поля полоскового GaAs—GaAlAs лазера:
а — в ближней зоне; *б* — в дальней зоне [20]

6.8. На рисунке изображено нормальное падение гауссова пучка на призму из твердого материала с показателем преломления n.
а) Чему равен угол расходимости пучка на выходе?



б) Предположим, что призма сдвинута влево до совпадения входной грани с плоскостью $z = -l_1$. В каком месте будет находиться шейка пучка и какова будет ее ширина? Предполагается, что длина призмы достаточна для того, чтобы шейка попала внутрь нее.

6.9. Гауссов пучок с длиной волны λ падает на линзу, расположенную в плоскости $z = l$. Найдите, каким должно быть фокусное расстояние линзы, чтобы шейка выходного пучка попала на переднюю грань образца. Покажите, что для данных l и L могут существовать два решения. Изобразите поведение пучка в каждом из возможных случаев.



6.10. Восполните недостающие звенья вывода в § 6.12.

6.11. Докажите справедливость соотношения (6.10.10).

Указание: представьте световой импульс в виде произведения несущей и огибающей

$$E(z, t) = E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Delta\omega) e^{i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega),$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\Delta k = k(\omega) - k_0$.

6.12. Найдите ширину пучка и максимальную частоту следования импульсов света с длиной волны $\lambda = 1$ мкм в отрезке стеклянного волокна длиной 1000 м с $n = 1{,}5$ и $n_2 = 5 \cdot 10^2$ см$^{-2}$, если возбуждена мода: а) $l = m = 0$, б) $l = m = 5$.

6.13. Выведите формулы (6.10.4) и (6.10.5).

Глава 7

ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Оптические резонаторы, также как аналогичные устройства микроволнового диапазона, применяются для двух взаимосвязанных целей: создания полей большой интенсивности на выделенных резонансных частотах и для пространственной или частотной фильтрации полей. Способность резонатора к выполнению обеих функций харак-

теризует универсальный параметр — добротность Q. Смысл этого параметра будет выяснен в конце главы. На первом этапе наша задача будет заключаться в нахождении структуры поля в оптических резонаторах с различной конфигурацией зеркал.

7.1. Резонаторы со сферическими зеркалами

В микроволновом диапазоне за счет выбора размеров резонатора, сравнимых с длиною волны, в заданный узкий частотный интервал попадает одна или очень небольшое число резонансных частот. В оптическом диапазоне при длине волны $\lambda \sim 10^{-4}$ см это не представляется возможным. Оптический резонатор обладает размерами, значительно превышающими длину волны, и содержит согласно (5.7.3) на единицу объема резонатора

$$N \approx 8\pi\nu^2 n^3 d\nu/c^3 \qquad (7.1.1)$$

мод внутри частотного интервала $d\nu$. Например, для $V = 1$ см^3, $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Гц и $d\nu = 3 \cdot 10^{10}$ Гц по формуле (7.1.1) получается $N \approx 2 \cdot 10^9$ мод. Для закрытого резонатора все эти моды имели бы сравнимые значения добротности Q. В лазерах такая ситуация нежелательна, поскольку она способствует возбуждению большого числа мод, отличающихся как по частоте, так и по пространственной структуре.

В значительной мере именно это обстоятельство предопределило использование открытых резонаторов, образованных парой плоских или искривленных отражателей. В таких резонаторах направление распространения для большинства мод составляет значительные углы с нормалями к зеркалам. Это обеспечивает существенные потери уже при однократном прохождении волной резонатора, и соответствующие моды имеют очень низкую добротность. Как будет показано ниже, для искривленных зеркал энергия некоторых мод сосредоточена вблизи оси; дифракционные потери этих мод, обусловленные незамкнутостью стенок резонатора, могут быть малы по сравнению с потерями, связанными с другими механизмами, например, с просачиванием через зеркала.

Предложение об использовании открытых резонаторов впервые было высказано, по-видимому, Дике [1][1]. Шавлов и Таунс в своей освновополагающей работе, посвященной лазерам [2], показали, что в таких резонаторах осуществляется эффективная дискриминация мод, направление распространения которых не совпадает с нормалями к зеркалам.

На рис. 7.1 приведены некоторые конфигурации зеркал, которые далее обсуждаются более детально. Для того, чтобы резонатор обладал низкими потерями, т. е. в нем существовали моды с высокой добротностью, необходимо выполнение двух условий [3]. Во-пер-

[1] Одновременно с Дике ту же идею высказал А. М. Прохоров [16]. — *Прим. ред.*

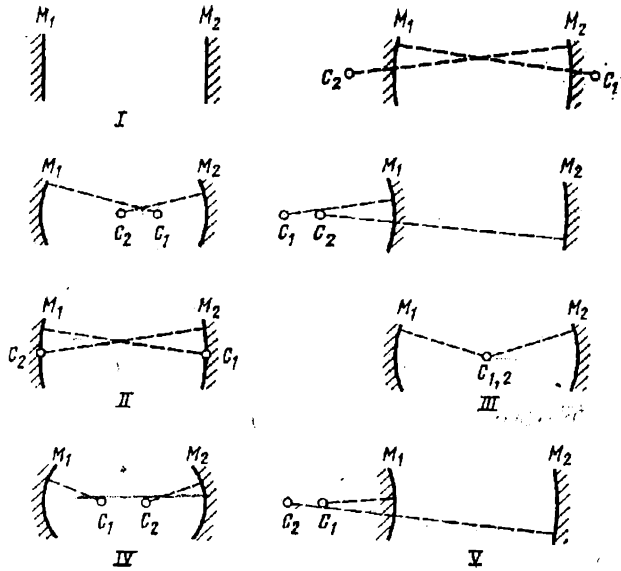


Рис. 7.1. Конфигурации зеркал, используемые в лазерах. Все изображенные типы резонаторов (I—плоскопараллельный, II — конфокальный, III — концентрический), кроме двух нижних IV и V, имеют моды с низкими потерями [3]

вых, должно существовать семейство лучей, которые, последовательно отражаясь от обоих зеркал, не выходят за пределы резонатора, не совершив достаточно (20 ... 100) прохождений туда и обратно. Во-вторых, размеры отражателей должны удовлетворять соотношению

$$4a_1a_2/\lambda L \gtrsim 1,$$

где a_1 и a_2 — полуширины отражателей в произвольном направлении, перпендикулярном оси резонатора; L — расстояние между отражателями. Первое условие, следующее из геометрической оптики, выполняется для оптических резонаторов, поскольку размеры отражающих поверхностей и радиусы кривизны зеркал значительно превышают длину волны. Второе условие следует из законов физической оптики. Его выполнение означает, что угол, под которым первый из отражателей виден из центра второго ($2a_1/L$), превышает угол расходимости квазиплоской волны, апертура которой совпадает со вторым отражателем ($\lambda/2a_2$).

Задача нахождения мод резонатора решалась различными методами. Один из них состоит в отыскании простых решений уравнений Максвелла типа узких волновых пучков. Форма поверхностей зеркал при этом подбирается таким образом, чтобы отражатель пересекал пучок точно по волновому фронту, т. е. в каждой точке перпендикулярно локальному направлению распространения пучка. В результате обеспечивается преобразование волны при отражении строго в себя саму. Другой метод [4] базируется на использовании принципа Гюйгенса в скалярной форме для вычисления поля на одном из зеркал, вызванного излучением с поверхности другого.

Точно так же вычисляется поле на втором зеркале и затем приравнивается, с точностью до константы, к первоначальному полю на нем. Эта процедура приводит к интегральному уравнению, решения которого определяют моды резонатора и их дифракционные потери [5, 6]. Метод удобен для проведения расчетов на вычислительных машинах в тех случаях, когда отсутствуют аналитические методы. Оба метода дают совпадающие результаты. Третий приближенный метод в общих чертах изложен в задаче 7.6.

Используем первый, наиболее приспособленный для анализа метод. Начнем с волнового пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления n. Соответствующие выражения получены в §6.9:

$$E_{l,m}(\mathrm{r}) = E_0 \frac{\rho_0}{\rho(z)} H_l\left[\sqrt{2}\,\frac{x}{\rho(z)}\right] H_m\left[\sqrt{2}\,\frac{y}{\rho(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\rho^2(z)} - \right.$$
$$\left. - ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - ikz + i(l+m+1)\eta\right]; \qquad (7.1.2)$$

где $\rho(z)$ — ширина пучка, удовлетворяющая соотношению

$$\rho(z) = \rho_0[1 + (z/z_0)^2]^{1/2}, \quad z_0 = \pi\rho_0^2 n/\lambda \qquad (7.1.3)$$

ρ_0 — минимальная ширина, параметр, характеризующий пучок. Радиус кривизны волнового фронта определяется по формуле

$$R(z) = z[1 + (\pi\rho_0^2 n/\lambda z)^2] = (z + z_0^2)/z, \qquad (7.1.4)$$

а фазовый коэффициент — по формуле

$$\eta(z) = \operatorname{arctg}(\lambda z/\pi\rho_0^2 n) = \operatorname{arctg}(z/z_0).$$

Знак $R(z)$ выбирается положительным, если центр кривизны лежит левее волнового фронта и наоборот.

Возьмем волновой пучок, описываемый последней группой уравнений. Оптический резонатор можно сконструировать, совмещая два отражателя со сферическими волновыми фронтами пучка, пересекающими ось z в точках z_1 и z_2. Поскольку, как показано на рис. 6.5, эти поверхности нормальны к направлению распространения энергии, пучок преобразуется при отражении сам в себя. Таким образом, если фазовый набег между зеркалами кратен π, то в пространстве между зеркалами образуется устойчивое распределение поля.

Поступим теперь по-другому: возьмем два сферических зеркала с радиусами кривизны R_1 и R_2, находящихся на расстоянии L друг от друга. Тогда, при некоторых условиях, можно подобрать положение плоскости $z = 0$ и значение параметра ρ_0 таким образом, что зеркала будут совпадать с двумя сферическими волновыми фронтами пучка, определяемого плоскостью шейки ($z = 0$) и значением параметра ρ_0. Если, кроме того, зеркала достаточно велики, чтобы перехватывать почти всю энергию (например, 99%) основной ($l =$

$= m = 0$) поперечной моды[1]), то эта мода будет, по всей вероятности, иметь большую добротность Q. Дифракционные потери высших поперечных мод существенно больше, так как согласно рис. 2.1 поля этих мод имеют заметную величину на значительных расстояниях от оси и моды теряют большую часть своей энергии, «выплескиваясь» за края зеркала[2]).

Алгебра оптического резонатора. Можно сконструировать оптический резонатор, совмещая два отражателя с волновыми фронтами пучка, пересекающими ось z в точках z_1 и z_2. Распространение пучка (7.1.2) состоит в последовательном отражении от зеркал без изменения поперечной структуры поля. Требуемые радиусы кривизны находятся из формулы (7.1.4): $R_1 = z_1 + z_0^2/z_1$, $R_2 = z_2 + z_0^2/z_2$ и определяют величины

$$z_1 = \frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 - 4z_0^2},\quad z_2 = \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_2^2 - 4z_0^2}. \qquad (7.1.5)$$

Задав минимальную ширину пучка $\rho_0 = (\lambda z_0/\pi n)^{1/2}$, можно использовать (7.1.5) для нахождения точек z_1 и z_2, определяющих расположение зеркал с радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно.

На практике чаще всего заданы радиусы кривизны зеркал R_1 и R_2 и расстояние между ними L. По этим параметрам надо найти минимальную ширину пучка ρ_0, положение этого минимума относительно отражателей, а также ширины пучков ρ_1 и ρ_2 на зеркалах. Разрешая (7.1.5) относительно z_0^2, получаем

$$z_0^2 = \frac{L(-R_1-L)(R_2-L)(R_2-R_1-L)}{(R_2-R_1-2L)^2}. \qquad (7.1.6)$$

Точка z_2 расположена правее z_1, так что расстояние между зеркалами $L = z_2 - z_1 > 0$, а кривизна зеркала выбирается положительной, если центр кривизны расположен левее зеркала. Минимальная ширина пучка $\rho_0 = (\lambda z_0/\pi n)^{1/2}$, и положение ее плоскости определяется из (7.1.5). Значения ширины пучка на зеркалах $\rho(z_1)$ и $\rho(z_2)$ вычисляются затем с помощью (7.1.3).

Резонатор с симметричными зеркалами. Частный случай резонатора с симметрично расположенными относительно плоскости $z = 0$ зеркалами требует дополнительных комментариев. Вследствие симметрии плоский фазовый фронт и минимальную ширину пучок

---

[1]) Поперечными называются моды резонатора, отличающиеся структурой поля в поперечном сечении. Каждой из них отвечает своя комбинация индексов l, m в формуле (7.1.2). Картины некоторых поперечных мод приведены на рис. 6.7. — *Прим. ред.*

[2]) Под дифракционными понимаем потери, обусловленные протяженностью пучка в поперечном направлении, см. выражение (7.1.3), и конечными размерами зеркал. За счет этого часть энергии пучка «проскальзывает», не отражаясь, мимо зеркала и поэтому теряется.

имеет в плоскости $z = 0$. Полагая в (7.1.6) $R_2 = -R_1 = R$, получаем

$$z_0^2 = (2R - L)\,L/4 \qquad (7.1.7)$$

и

$$\rho_0^2 = (\lambda z_0/\pi n)^{1/2} = (\lambda/\pi n)^{1/2}\,(L/2)^{1/4}\,(R - L/2)^{1/4}; \qquad (7.1.8)$$

подставив эти значения в (7.1.3) при $z = L/2$, будем иметь следующее выражение для ширины пучка на зеркалах:

$$\rho_{1,2} = \left(\frac{\lambda L}{2\pi n}\right)^{1/2}\left[\frac{2R^2}{L\,(R - L/2)}\right]^{1/4}. \qquad (7.1.9)$$

Сравнение с (7.1.8) показывает, что $\rho_{1,2} \approx \rho_0$ при $R \gg L$, т. е. расходимость пучка внутри резонатора мала.

Из (7.1.9) нетрудно найти, что для заданного L ширина пучка на зеркале минимальна при $R = L$. Этому условию отвечает так называемый симметричный *конфокальный резонатор*, поскольку оба фокуса, расположенных на расстоянии $R/2$ от зеркал, совпадают. Из (7.1.7) и соотношения $\rho_0 = (\lambda z_0/\pi n)^{1/2}$ следует

$$(\rho_0)_{\text{конф}} = (\lambda L/2\pi n)^{1/2}, \qquad (7.1.10)$$

откуда, учитывая (7.1.9), получаем

$$(\rho_{1,2})_{\text{конф}} = \sqrt{2}\,(\rho_0)_{\text{конф}}, \qquad (7.1.11)$$

так что ширина пучка от центра к зеркалам увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

Пример.

Расчет симметричного резонатора на длину волны $\lambda = 1$ мкм с зеркалами на расстоянии $L = 2$ м. Если выбрать конфокальную геометрию резонатора с $R = L = 2$ м, то минимальная ширина пучка в центре резонатора согласно (7.1.10) равна ($n = 1$): $(\rho_0)_{\text{конф}} = (\lambda L/2\pi)^{1/2} = 0{,}056$ см при ширине пучка на зеркалах, равной (7.1.11) $(\rho_{1,2})_{\text{конф}} = \rho_0\sqrt{2} \simeq 0{,}08$ см.

Предположим далее, что требуемая ширина пучка на зеркалах $\rho_{1,2} = 0{,}3$ см. Подставив это значение в (7.1.9) и предположив $R \gg L$, получим $\rho_{1,2}/(\lambda L/2\pi)^{1/2} = 0{,}3/0{,}056 = (2R/L)^{1/4}$, откуда $R \approx 400L = 800$ м, так что предположение $R \gg L$ оправдано. Минимальная ширина пучка определяется из (7.1.3) и (7.1.7): $\rho_0 = 0{,}9994\rho_{1,2} \simeq 0{,}3$ см. Таким образом, чтобы увеличить ширину пучка на зеркалах с минимального значения 0,08 см до 0,3 см, необходимо перейти к почти плоским зеркалам ($R = 800$ м). Это означает, что даже очень небольшой кривизны зеркал уже достаточно для сильной локализации поля в резонаторе.

Рассмотренный численный пример в равной мере можно отнести и к резонатору с плоским зеркалом, расположенным в плоскости $z = 0$. Формы пучка в таком резонаторе и в соответствующей половине симметричного резонатора, рассмотренного выше, идентичны. Ширина пучка на плоском зеркале равна ρ_0.

7.2. Критерий устойчивости мод. Самосогласованный метод нахождения мод резонатора

Величина дифракционных потерь мод оптического резонатора зависит от расстояния между зеркалами L и от радиусов кривизны зеркал R_1 и R_2. Проиллюстрируем это утверждение, рассмотрев сначала симметричный резонатор с $R_2 = R_1 = R$.

Отношение ширины пучка на зеркале для заданного значения L/R к минимальному значению этой величины в случае конфокального резонатора ($L/R = 1$) равно отношению выражений (7.1.9) и (7.1.11):

$$\frac{\rho_{1,2}}{(\rho_{1,2})_{\text{конф}}} = \left\{\frac{1}{(L/R)\,[2-(L/R)]}\right\}^{1/4}. \qquad (7.2.1)$$

График этой функции приведен на рис. 7.2. Для $L/R = 0$ (плоскопараллельный резонатор) и для $L/R = 2$ (концентрический резонатор) ширина пучка на зеркале стремится к бесконечности. Совершенно ясно, что дифракционные потери в этих случаях будут очень велики.

В соответствии с табл. 6.1 отражение гауссова пучка от зеркала с радиусом кривизны R формально эквивалентно его прохождению через линзу с фокусным расстоянием $f = R/2$. Условие наличия у резонатора устойчивых мод эквивалентно условию существования устойчивых решений для гауссова пучка в биериодической системе линз (рис. 7.3). Эта задача рассматривалась в § 6.8, где было получено условие устойчивости (6.8.5).

Если теперь заменить в (6.8.5) f_1 на $R_1/2$ и f_2 на $R_2/2$[1], то получим условие устойчивости мод оптических резонаторов

$$0 \leqslant (1 - L/R_1)\,(1 - L/R_2) \leqslant 1. \qquad (7.2.2)$$

Наглядное представление критерия (7.2.2) в виде диаграммы устойчивости [5] дано на рис. 7.4. Из этой диаграммы, в частности,

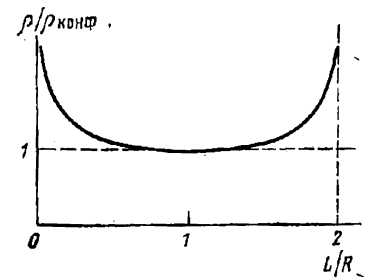


Рис. 7.2. Отношение ширины пучка на зеркалах симметричного резонатора к ширине пучка на зеркалах конфокальной ($L/R=1$) системы

[1] По этой причине определение знаков R_1 и R_2 отличается от используемого в предыдущих параграфах. Знак R такой же, как знак фокусного расстояния эквивалентной линзы; R_1 (R_2) считается положительным, если (см. рис. 7.1) центр кривизны зеркала *1* (*2*) лежит в направлении зеркала *2* (*1*), и отрицательным в противном случае.

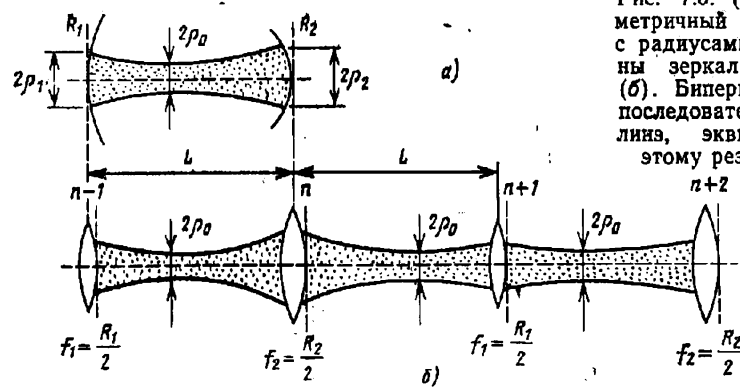


Рис. 7.3. (*а*) Несимметричный резонатор с радиусами кривизны зеркал R_1 и R_2 (*б*). Биериодическая последовательность линз, эквивалентная этому резонатору

видно, что концентрический ($R_1 = R_2 = L/2$), конфокальный ($R_1 = R_2 = L$) и плоскопараллельный ($R_1 = R_2 = \infty$) симметричные резонаторы находятся на границах области устойчивости и даже малые отклонения их параметров могут привести к резкому увеличению потерь.

Моды комбинированного резонатора — самосогласованный метод. До настоящего момента рассматривались резонаторы, состоящие из двух противостоящих сферических зеркал. Иногда воз-

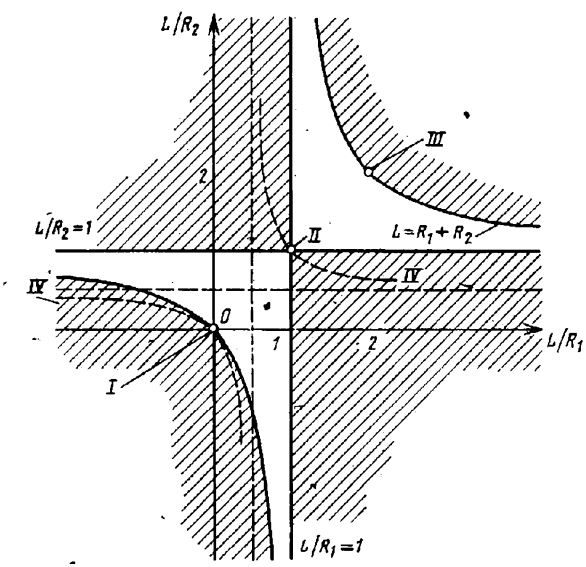


Рис. 7.4. Диаграмма устойчивости оптических резонаторов. В заштрихованных областях (большие потери) условия (7.2.2) нарушаются, в незаштрихованных — выполняются [6]

I — резонатор с плоскими параллельными зеркалами; II — симметричный конфокальный; III — концентрический; IV — конфокальные системы

никает потребность изучения свойств более сложных резонаторов, составленных из произвольного числа линзоподобных элементов. Примеры таких систем — резонатор с линзой между двумя сферическими отражателями или несоосной трехзеркальный резонатор. Еще один пример — резонатор бегущей волны, в котором пучок может распространяться только в одном направлении.

Для каждого из этих сложных резонаторов нужно найти моды с низкими потерями, т. е. устойчивые моды, а также ширину $\rho(z)$ и радиус кривизны $R(z)$ фронта волнового пучка.

Применим самосогласованный метод и потребуем, чтобы устойчивые моды резонатора *преобразовывались сами в себя после одного прохода туда и обратно в резонаторе*. Выбрав *произвольную* плоскость внутри резонатора, обозначим через q комплексный параметр пучка в этой плоскости. Применяя закон $ABCD$ (6.7.6), потребуем, чтобы

$$q = (Aq + B)/(Cq + D) \tag{7.2.3}$$

где A, B, C, D — элементы «лучевой» матрицы кругового обхода, начало и конец которого лежат в выбранной плоскости.

Решив (7.2.3) относительно $1/q$, получим

$$\frac{1}{q} = \frac{(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2+4BC}}{2B}. \tag{7.2.4}$$

Если матрицы, относящиеся к отдельным элементам в резонаторе, удовлетворяют условию $A_iD_i - B_iC_i = 1$ (см. табл. 6.1), то матрица (A, B, C, D) как произведение элементарных матриц удовлетворяет такому же условию $AD - BC = 1$ и, следовательно, (7.2.4) можно переписать в виде

$$\frac{1}{q^{(\pm)}} = \frac{D-A}{2B} \pm i\frac{\sqrt{1-[(D+A)/2]^2}}{B}. \tag{7.2.5}$$

Согласно (7.1.2) условие устойчивости гауссова пучка состоит в том, что квадрат ширины пучка ρ^2 — действительная положительная величина. Записав $1/q = 1/R - i\lambda/(\pi\rho^2 n)$, найдем из сравнения последнего выражения с (7.2.5), что пучок устойчив, если

$$|(D + A)/2| \leqslant 1. \tag{7.2.6}$$

Соотношение (7.2.6) может рассматриваться как обобщение условия устойчивости (7.2.2) на случай произвольного резонатора. Для резонатора из двух сферических отражателей оно сводится к (7.2.2).

Радиус кривизны R и ширина пучка ρ в выделенной плоскости определяются по формулам

$$R = 2B/(D-A), \quad \rho = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{|B|^{1/2}}{\{1-[(D+A)/2]^2\}^{1/4}}. \tag{7.2.7}$$

Применяя закон $ABCD$ (6.7.6), можно получить значения ρ и R в любой другой плоскости. Вопрос об устойчивости стационарного решения (7.2.5) исследован в [15] и составляет содержание задачи 7.10.

7.3. Резонансные частоты

В предыдущих параграфах рассмотрена зависимость пространственных характеристик мод резонатора от параметров зеркал (их радиусов кривизны и расстояния между ними). Другим важным моментом является определение резонансных частот данной пространственной моды. Резонансные частоты определяются из следующего условия: набег фазы при полном обходе волной резонатора кратен 2π. Это условие является обычным для резонаторов: на длине резонатора укладывается целое число полуволн [7]. В этом случае возможно установление вдоль оси резонатора стоячей волны, поперечное распределение поля которой совпадает с распределением поля бегущей волны.

Для резонатора со сферическими зеркалами в точках z_1 и z_2 резонансное условие для (l, m)-моды можно записать в виде[1)]

$$\theta_{l,m}(z_2) - \theta_{l,m}(z_1) = q\pi, \tag{7.3.1}$$

где q — некоторое целое число, а $\theta_{l,m}(z)$ — набег фазы, определяемый согласно (6.9.2) выражением

$$\theta_{l,m}(z) = kz - (l + m + 1)\operatorname{arctg}(z/z_0) \quad (z_0 = \pi\rho_0^2 n/\lambda). \tag{7.3.2}$$

Таким образом, резонансное условие (7.3.1) имеет вид

$$k_q L - (l+m+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0} - \operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0}\right) = q\pi, \tag{7.3.3}$$

где $L = z_2 - z_1$ — длина резонатора. Отсюда следует $k_{q+1} - k_q = \pi/L$ или, используя связь $k = 2\pi\nu n/c$, имеем

$$\nu_{q+1} - \nu_q = c/2nL \tag{7.3.4}$$

для частотного интервала между продольными модами.

Будем теперь менять поперечные индексы l и m моды при фиксированном продольном индексе q. Нетрудно видеть из (7.3.3), что резонансные частоты зависят лишь от суммы $(l + m)$. Для данного значения q все моды с одинаковой суммой $(l + m)$ вырождены, т. е. имеют совпадающие резонансные частоты. Для двух различных значений суммы $(l + m)$ из выражения (7.3.3) имеем

$$k_1 L - (l+m+1)_1\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0} - \operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0}\right) = q\pi,$$

$$k_2 L - (l+m+1)_2\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0} - \operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0}\right) = q\pi$$

[1)] В выражении (7.3.1) не учтен возможный фазовый сдвиг при отражении от зеркал, так как эта поправка не влияет на результаты настоящего параграфа.

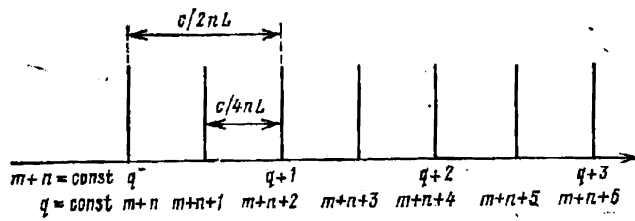


Рис. 7.5. Спектр частот конфокального ($L=R$) оптического резонатора

и после вычитания:

$$\underset{\Delta\nu}{(k_1-k_2)}\,L=[(l+m+1)_1-(l+m+1)_2]\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0}-\operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0}\right) \quad (7.3.5)$$

т. е. интервал между частотами мод, сумма поперечных индексов которых отличается на $\Delta\,(l+m)$, составляет

$$\Delta\nu=\frac{c}{2\pi nL}\,\Delta(l+m)\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0}-\operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0}\right). \quad (7.3.6)$$

В частности, для конфокального резонатора ($R=L$) согласно (7.1.7) $z_2=-z_1=z_0$; $\operatorname{arctg}(z_2/z_0)=\operatorname{arctg}(z_1/z_0)=\pi/4$ и (7.3.6) имеет вид

$$\Delta\nu_{\text{конф}}=\frac{1}{2}\,[\Delta(l+m)]\,\frac{c}{2nL}. \quad (7.3.7)$$

Сравнивая (7.3.7) и (7.3.4), обнаруживаем, что интервал между соседними резонансными частотами поперечных мод конфокального резонатора равен половине частотного интервала между модами, продольные индексы которых отличаются на единицу. Эта ситуация графически представлена на рис. 7.5.

Зависимость резонансных частот неконфокального резонатора от поперечных индексов мод l и m, мы изучим на примере резонатора, близкого к плоскопараллельному, когда $|z_1|$ и z_2 малы по сравнению с z_0 ($L \ll R_1, R_2$). В этом случае соотношение (7.3.6) примет вид

$$\Delta\nu\simeq\frac{c}{2\pi nz_0}\,\Delta(l+m). \quad (7.3.8)$$

Рис. 7.6 иллюстрирует распределение мод по частоте в этом случае. Ситуация, представленная на рис. 7.6, крайне нежелательна при использовании резонатора в качестве сканирующего интерферометра[1]. Реконструкция спектра исследуемого сигнала сильно осложняется из-за одновременного возбуждения нескольких мод на близких час-

[1] Оптический резонатор (интерферометр) пропускает падающее на него излучение только в узких полосах, примыкающих к резонансным частотам, см., например, [8]. Сканируя длину резонатора, а следовательно, и резонансные частоты, можно последовательно снять спектр падающего излучения. — *Прим. ред.*

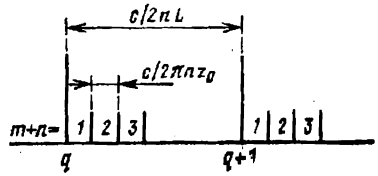


Рис. 7.6. Спектр частот резонатора, близкого к плоскопараллельному ($R \gg L$)

тотах. Чтобы обойти эту трудность, можно использовать конфокальный эталон, спектр которого показан на рис. 7.5, и выбором достаточно малого L обеспечить межмодовый интервал $c/4nL$, превышающий ширину спектра исследуемого сигнала.

7.4. Потери в оптических резонаторах

Существует целый ряд параметров, применяемых для характеристики потерь в резонаторе. В разных разделах книги использованы для этой цели понятия потерь за один проход, времени жизни фотонов, добротности резонатора. Такое обилие обусловлено как историческими причинами, так и соображениями удобства. Посмотрим, как эти величины соотносятся между собой.

Постоянная времени затухания моды резонатора (время жизни фотона) определяется с помощью уравнения

$$d\mathscr{E}/dt = -\mathscr{E}/t_c, \qquad (7.4.1)$$

где $\mathscr{E}$ — энергия, запасенная в моде. Если величина потерь за проход равна Π, а длина резонатора — L, то в единицу времени запасенная энергия уменьшается в $c\Pi/nL$ раз, т. е.

$$d\mathscr{E}/dt = -(c\Pi/nL)\mathscr{E}$$

и из (7.4.1)

$$t_c = nL/c\Pi. \qquad (7.4.2)$$

Для резонатора с коэффициентами отражения зеркал $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ и с показателем распределенных потерь α средняя величина потерь на проход при $\Pi \ll 1$ равна $\Pi = \alpha L - \ln\sqrt{\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2}$, поэтому

$$t_c = \frac{n}{c\left[\alpha - (1/L)\ln\sqrt{\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2}\right]_{\mathscr{R}_1,\,\mathscr{R}_2\to 1}} \approx \frac{nL}{c\left[\alpha L + (1-\sqrt{\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2})\right]}. \qquad (7.4.3)$$

Добротность резонатора при условии $\alpha L \ll 1$ определяется формулой

$$Q = \frac{\omega\mathscr{E}}{P} = -\frac{\omega\mathscr{E}}{d\mathscr{E}/dt}, \qquad (7.4.4)$$

где $\mathscr{E}$ — энергия, запасенная модой; $P = -d\mathscr{E}/dt$ — мощность потерь. Из сравнения (7.4.4) с (7.4.1) имеем

$$Q = \omega t_c = 2\pi\nu t_c. \qquad (7.4.5)$$

Добротность Q связана с шириной $\Delta\nu_{0,5}$ (на уровне 0,5 по мощности) лоренцевой резонансной кривой [8]

$$\Delta\nu_{0,5} = \nu/Q = 1/2\pi t_c, \qquad (7.4.6)$$

так что согласно (7.4.3)

$$\Delta\nu_{0,5} = \frac{c\left(\alpha - \frac{1}{L}\ln\sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}\right)}{2\pi n}. \qquad (7.4.7)$$

Потери в оптических резонаторах обусловлены различными причинами.

1. *Потери из-за неполного отражения.* Избежать потерь при отражении от зеркал невозможно, поскольку нужно бы выводить энергию из резонатора. Кроме того, не существует идеальных зеркал; некоторое остаточное поглощение и рассеяние энергии в зеркале уменьшает коэффициент отражения по сравнению со 100%.

2. *Поглощение и рассеяние энергии в активной среде.* В лазерных резонаторах действует механизм потерь, заключающийся в переходах атомов с возбужденных уровней, заселяемых под действием накачки, на вышележащие энергетические уровни. Рассеяние на неоднородностях и дефектах среды приобретает особое значение в случае твердотельных лазеров.

3. *Дифракционные потери.* Из уравнения (7.1.2) или из рис. 2.1 видно, что поля мод сохраняют конечную величину до значительных расстояний от оси пучка. Если резонатор образуется путем «захвата» пучка двумя отражателями, то некоторая часть энергии пучка не пе-

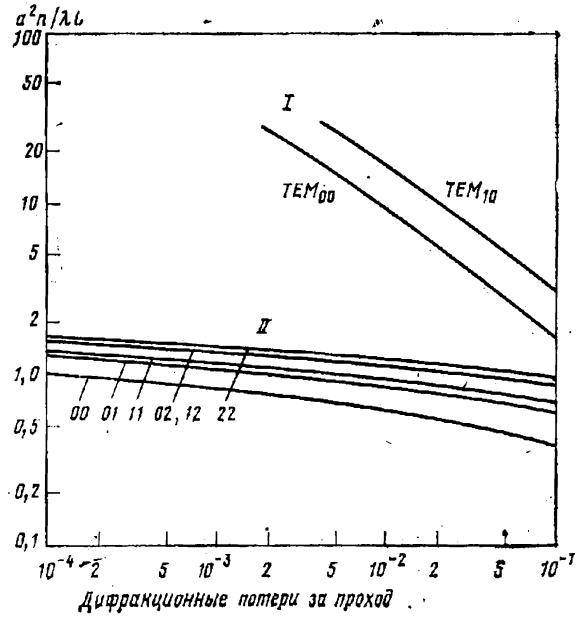


Рис. 7.7. Дифракционные потери резонаторов с плоскими круглыми зеркалами (I) и конфокальной конфигурации с квадратными зеркалами при линейной поляризации пучка (II) как функция параметра Френеля

Пары чисел рядом со стрелками соответствуют индексам m и l поперечных мод [5].

рехватывается ограниченными зеркалами и, следовательно, имеют место потери. Для данной системы зеркал потери тем выше, чем больше поперечные индексы мод l и m, поскольку больше поперечный размер мод. Этот факт используется для подавления генерации на высших модах. Внутри резонатора помещаются диафрагмы, значительно увеличивающие потери высших мод, причем размеры отверстий диафрагм достаточно велики, чтобы пропустить большую часть энергии основной (0, 0, q) моды. На рис. 7.7 приведена зависимость дифракционных потерь низших мод конфокального резонатора от параметра Френеля $a^2n/\lambda L$. Необходимо обратить внимание на существенное уменьшение дифракционных потерь при переходе от плоскопараллельных отражателей к сферическим.

7.5. Неустойчивые оптические резонаторы

Если параметры резонатора менять таким образом, что соответствующая им точка приближается к заштрихованной области на рис. 7.4, ширина пучка на зеркалах увеличивается, стремясь к бесконечности при пересечении границы. В этом случае необходимо учитывать конечные размеры отражателей.

Для многих целей большой объем моды и дифракционные потери, достигаемые в неустойчивом резонаторе, весьма желательны.

1. Устойчивым конфигурациям резонатора отвечают (см. пример в § 7.1) узкие гауссовы пучки. Такая ситуация непригодна для получения мощного излучения на выходе лазера, поскольку последнее требует больших объемов активной среды, участвующей в работе.

2. В неустойчивых резонаторах доминируют дифракционные потери (пучок шире зеркала). Это выгодно в тех случаях, когда велико усиление активной среды лазера и поэтому оптимальная выходная связь тоже велика (см. гл. 9).

3. Характер связи неустойчивого резонатора со свободным пространством таков, что излучаемый пучок имеет большую апертуру и хорошо коллимируется без помощи телескопической оптики. Это утверждение станет более понятным из последующего обсуждения.

Строгий подход к определению пространственной структуры и величины дифракционных потерь мод неустойчивых резонаторов основан на использовании принципа Гюйгенса [9—14]. В дальнейшем будем придерживаться развитого Сигменом [9] подхода с позиций геометрической оптики, позволяющего установить основные физические характеристики резонатора и обеспечивающего хорошее соответствие экспериментальным данным.

Обратившись к рис. 7.8, предположим, что волна, которая распространяется вправо от зеркала M_1, представляет собой сферическую волну с виртуальным источником в точке P_1, вообще говоря, не совпадающим с центром кривизны зеркала M_1. Волна падает на зеркало M_2, от которого частично отражается в виде сфери-

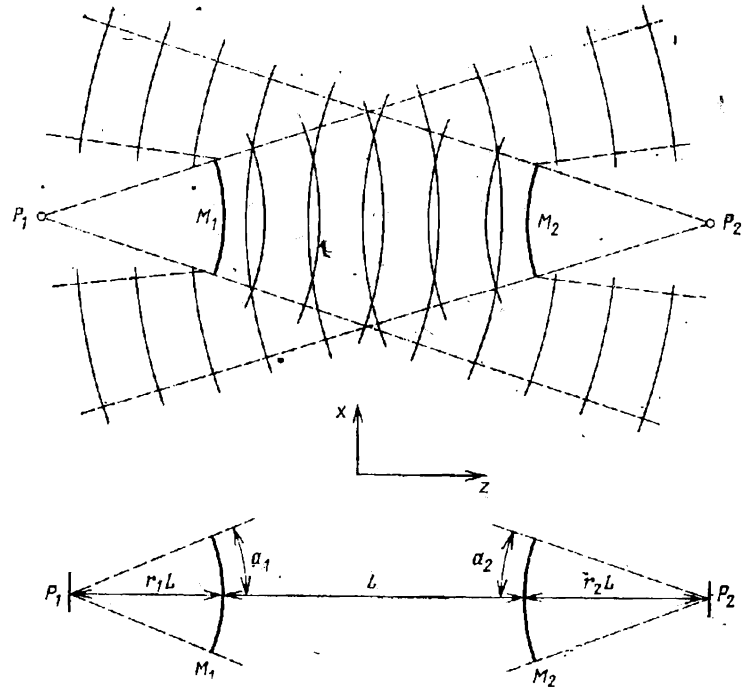


Рис. 7.8. Представлены моды неустойчивого резонатора в виде сферических волн

Точки P_1 и P_2 — виртуальные центры сферических волн. Расходимость каждой из волн такова, что значительная часть ее энергии не перехватывается противоположным зеркалом [9]

ческой волны, исходящей из виртуального источника P_2. В свою очередь эта волна должна отразиться от зеркала M_1 так, чтобы отраженная волна имела источником точку P_1. В этом состоит условие самосогласованности, которое выполняется, если мнимое изображение P_1 при отражении от M_2 совпадает с P_2 и наоборот.

Применяя формулы геометрической оптики к конфигурации зеркал, изображенной на рис. 7.8, находим условие согласования

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2+1}=-\frac{2L}{R_1}=2(g_1-1), \quad \frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1+1}=-\frac{2L}{R_2}=2(g_2-1), \tag{7.5.1}$$

где $g_i = 1 - L/R_i$ $(i = 1, 2)$ и знак R_i должен быть выбран по соображениям, изложенным в сноске на с. 91, т. е. для зеркал на рис. 7.8 он отрицателен.

Решая уравнения (7.5.1), находим

$$r_1=\frac{\pm\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)}-g_1g_2+g_2}{2g_1g_2-g_1-g_2}, \quad r_2=\frac{\pm\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)}-g_1g_2+g_1}{2g_1g_2-g_1-g_2}. \tag{7.5.2}$$

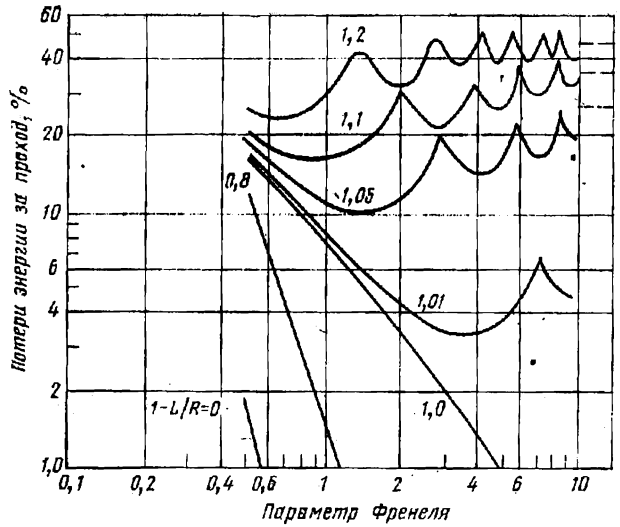


Рис. 7.9. Потери в устойчивых и неустойчивых резонаторах как функция параметра Френеля [9]

— — — значения, полученные из геометрической оптики. Кривая, соответствующая $1-L/R=1$, взята из работы [4]

Выражения (7.5.2) можно использовать при вычислении, в приближении геометрической оптики, потерь на один проход волны туда и обратно в неустойчивом резонаторе. Рассмотрим для простоты двумерный полосковый резонатор, зеркала которого бесконечны в направлении координаты y и искривлены в плоскости $x - z$ (рис. 7.8). Пусть энергия волны, удовлетворяющей условию самосогласованности, равна единице после отражения от зеркала M_1. После отражения от зеркала M_2 энергия волны уменьшится до величины

$$(\Gamma_1)_{\text{полоск}} = \frac{r_1 a_2}{(r_1+1)\, a_1}. \tag{7.5.3}$$

Для получения последнего результата рассмотрена двумерная волна, излучаемая источником P_1 в пространство между зеркалами M_1 и M_2. Общий коэффициент прохождения туда и обратно равен

$$\Gamma_{\text{полоск}} = (\Gamma_1 \Gamma_2)_{\text{полоск}} = \frac{r_1 r_2}{(r_1+1)(r_2+1)}, \tag{7.5.4}$$

а для сферических зеркал (с кривизной в обеих плоскостях) $\Gamma_{1,2} = (\Gamma_{1,2})^2_{\text{полоск}}$ и

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1+1)^2 (r_2+1)^2}. \tag{7.5.5}$$

Среднюю величину относительных потерь энергии волны за *один проход*[1] можно представить как

$$\bar{\delta} = 1 - \Gamma^{1/2} = 1 - (\Gamma_1 \Gamma_2)^{1/2}. \tag{7.5.6}$$

[1] Имеется в виду проход в одном направлении. — *Прим. ред.*

Таким образом, потери в неустойчивых резонаторах зависят не от размеров зеркал, а лишь от радиусов кривизны и расстояния между зеркалами. Графики зависимости потерь в некоторых симметричных неустойчивых резонаторах от параметра Френеля, полученные с помощью формул (7.5.2) и (7.5.5), даны на рис. 7.9.

Задачи

7.1. Сравните типичные значения добротностей оптических резонаторов ($\mathscr{R} \sim 0{,}99$) и резонаторов диапазона СВЧ.

7.2. Дан резонатор с параметрами: $R_1 = 20$ см, $R_2 = -32$ см, $L = 16$ см, $\lambda = 1$ мкм. Определите: а) минимальную ширину пучка ρ_0; б) положение плоскости, в которой она достигается; в) ширину ρ_1 и ρ_2 пучка на зеркалах; г) отношения ρ_0, ρ_1 и ρ_2 к соответствующим значениям для конфокального резонатора.

7.3. Рассмотрите конфокальный резонатор с $L = 16$ см, $\lambda = 1$ мкм и коэффициентом отражения зеркал $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2 = 0{,}995$. Используя рис. 7.7, подберите такую апертуру зеркал, чтобы полные потери первой моды высшего порядка TE_{01} превышали 3%. Каковы потери основной моды в таком резонаторе? Как можно выбором апертуры подавить генерацию на высших поперечных модах?

7.4. Покажите, что диаграмма устойчивости (рис. 7.4) графически представляет условие $0 \leqslant (1 - L/R_1)(1 - L/R_2) \leqslant 1$. Найдите на этой диаграмме области, соответствующие восьми конфигурациям резонаторов, изображенным на рис. 7.1.

7.5. В соответствии с рис. 7.4 [или уравнением (7.2.2)], в случае $|R_2| = R_1$, $R_2 < 0$, т. е. в последовательности чередующихся собирающих и рассеивающих линз с одинаковым фокусным расстоянием могут существовать устойчивые моды. Объясните, почему с физической точки зрения в такой системе возможна фокусировка.

Указание: посмотрите, на каком расстоянии от оси луч пересекает линзы обоих типов.

7.6. Используйте закон $ABCD$ для определения характеристик моды (минимальной ширины пучка ρ_0 и его ширины на зеркалах $\rho_{1,2}$) симметричного резонатора, зеркала которого имеют радиусы кривизны R и отстоят друг от друга на расстоянии L.

Указание: покажите, что радиус кривизны волнового фронта (для самосогласованного решения пучка) в месте расположения зеркала равен радиусу кривизны самого зеркала.

7.7. Покажите, что оптический резонатор, образующийся при замене *любых* двух фазовых фронтов распространяющегося гауссова пучка отражателями (т. е. при помещении отражателей с радиусами кривизны $R(z_1)$ и $R(z_2)$ в точки на оси z_1 и z_2 соответственно), устойчив.

7.8. Получите условие устойчивости для резонатора, образованного двумя одинаковыми зеркалами с радиусами кривизны R, находящимися на расстоянии L друг от друга, и тонкой линзой с фокусным расстоянием f, которая расположена в центре.

7.9. Покажите, что параметр q (7.2.5) самосогласованного пучка определяет радиусы кривизны пучка, которые в месте расположения зеркал совпадают с радиусами кривизны самих зеркал, т. е. $R(z_2) = R_2$, $R(z_1) = R_1$.

7.10. Покажите, что после одного полного обхода резонатора возмущение $\Delta(1/q)$ комплексного параметра пучка относительно стационарного значения (7.2.5) преобразуется в $\delta(1/q) = e^{\pm 2i\theta}\,\Delta(1/q)$, где $\cos\theta = \frac{1}{2}(A + D)\,\Delta(1/q)$. Таким образом, ограниченные пучки, удовлетворяющие условию (7.2.6), находятся в состоянии безразличного равновесия.

Глава 8

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С АТОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

В этой главе обсуждаются закономерности взаимодействия между атомными системами и электромагнитным излучением и некоторые их следствия. При этом существенно используется введенный в гл. 3 формализм матрицы плотности. Рассмотрены следующие основные вопросы: атомная восприимчивость, вынужденные и спонтанные переходы, усиление в среде с инвертированной разностью населенностей, механизмы уширения спектральных линий, насыщение усиления.

Обсуждение носит общий характер, а не ограничивается какой-либо выделенной атомной системой. Поэтому результаты имеют широкую область применимости. Конкретные схемы энергетических уровней и переходов лазерных материалов обсуждаются в гл. 10.

8.1. Вывод выражения для восприимчивости методом матрицы плотности

В этом разделе формализм матрицы плотности, развитый в § 3.6, будет использован при выводе выражения для восприимчивости ансамбля атомов (спинов, ионов и т. д.), взаимодействующих с электромагнитным полем, гармонически меняющимся во времени. Предполагается, что во взаимодействии, как показано на рис. 8.1, участвуют *только два состояния* с энергиями $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ (так называемая двухуровневая модель). Такое допущение возможно, когда частота поля удовлетворяет условию $\omega \sim (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar$. В этом случае матрица плотности (3.6.6) сводится к матрице размерности 2×2 с элементами ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{21}, ρ_{22}.

Предположим, что имеет место электродипольное взаимодействие, которому отвечает гамильтониан

$$\mathscr{H}' = -\mu E(t), \qquad (8.1.1)$$

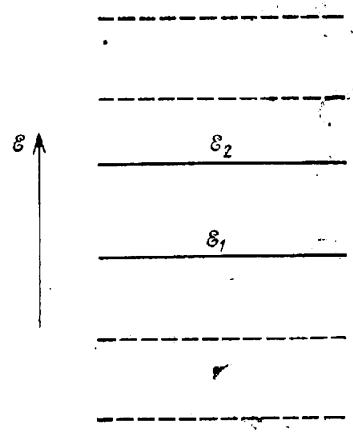


Рис. 8.1. Двухуровневая атомная система, взаимодействующая с полем излучения, частота которого $\omega \approx (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar$

Предполагается, что все другие нерезонансные уровни (они изображены штриховыми линиями) непосредственно во взаимодействии не участвуют; их присутствие влияет на равновесные значения населенностей N_{20}, N_{10}

где μ — параллельная полю $E(t)$ компонента оператора дипольного момента. Будем пока считать поле $E(t)$ классической переменной. Диагональные матричные элементы оператора $\mathscr{H}'$ равны нулю,

$$\mu_{11} = \mu_{22} = 0, \qquad (8.1.2)$$

поскольку состояния обладают определенной четностью. Фазы собственных функций $|2\rangle$ и $|1\rangle$ без ущерба для общности выбираем так, чтобы

$$\mu_{12} = \mu_{21} \equiv \mu. \qquad (8.1.3)$$

Полный гамильтониан двухуровневой системы имеет вид

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}', \qquad (8.1.4)$$

где $\mathscr{H}_0$ — гамильтониан системы в отсутствие каких-либо полей.

Требуется найти среднее по ансамблю значение дипольного момента атома $\langle\mu\rangle$, наведенного полем $E(t)$. В соответствии с (3.6.8) $\langle\mu\rangle = \mathrm{Sp}(\rho\mu) = \rho_{12}\mu_{21} + \rho_{21}\mu_{12} + \rho_{11}\mu_{11} + \rho_{22}\mu_{22}$ или, с учетом (8.1.2), имеем

$$\langle\mu\rangle \quad \mu(\rho_{12} + \rho_{21}). \qquad (8.1.5)$$

Матрица плотности записывается в представлении невозмущенного оператора $\mathscr{H}_0$, так что базисные функции удовлетворяют уравнению $\mathscr{H}_0\psi_n = \mathscr{E}_n\psi_n$.

Пользуясь (3.13.15), получаем

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[(\mathscr{H}_0 + \mathscr{H}'), \rho]_{21} = -\frac{i}{\hbar}(\mathscr{H}'_{21}\rho_{11} + \mathscr{E}_2\rho_{21} -$$

$$-\mathscr{E}_1\rho_{21} - \mathscr{H}'_{21}\rho_{22}) = -\frac{i}{\hbar}[\mathscr{H}'_{21}(\rho_{11} - \rho_{22}) + (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)\rho_{21}],$$

или, с учетом (8.1.1), а также того, что резонансная частота $\omega_0 = (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar$, имеем

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\omega_0\rho_{21} + \frac{\mu}{\hbar}E(t)(\rho_{11} - \rho_{22}). \qquad (8.1.6)$$

Аналогично получаем

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -i\frac{\mu}{\hbar}E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*),$$

и из условия нормировки $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{22}) = 2i\frac{\mu}{\hbar}E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*). \qquad (8.1.7)$$

Учет релаксационных членов. Если проанализировать весь путь, которым шли к равенствам (8.1.5)—(8.1.7), то обнаружим, что метод матрицы плотности применительно к вычислению $\langle\mu\rangle$ эквивалентен процедуре с использованием волновой функции: $\langle\mu\rangle = \int \psi^*\mu\psi dv$, см. (1.1.8). Применение матрицы плотности не дает особых преимуществ в тех случаях, когда определена волновая функция (система находится в чистом состоянии) и не приходится, следовательно, прибегать к усреднению по статистическому ансамблю, которое заключено в формулу (3.7.2).

Обратимся к уравнению (8.1.6). Исходя из соотношения (3.7.2), можно ожидать, что после выключения возмущающего поля $E(t)$ величина ρ_{21} должна убывать в пределе до нуля, поскольку фазовая когерентность между N собственными функциями ансамбля теряется из-за «соударений». Эти соударения отличаются тем, что сохраняют среднюю энергию системы (или населенность уровней), но приводят к потере (в ансамбле) информации, содержавшейся в фазе Φ_n волновой функции

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) = u_n(\mathbf{r})\exp[-i(\mathscr{E}_n t/\hbar + \Phi_n)].$$

Подобные соударения впервые были исследованы в связи с магнитным резонансом [1], где ими обусловлена спин-спиновая релаксация с постоянной времени T_2 [2]. Соударения такого же типа определяют и ширину спектральных линий в газах (уширение под действием давления); они будут рассмотрены в гл. 10, когда речь пойдет о молекулярных лазерах.

Чтобы включить в рассмотрение явление потери фазовой когерентности, уравнение (8.1.6) следует дополнить релаксационным членом

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\omega_0\rho_{21} + i\frac{\mu}{\hbar}(\rho_{11} - \rho_{22})E(t) - \frac{\rho_{21}}{T_2}. \qquad (8.1.8)$$

Из (3.6.6) следует, что диагональный элемент матрицы плотности ρ_{ii} дает вероятность нахождения атома в i-м состоянии. Если N — плотность атомов, то $N(\rho_{11} - \rho_{22}) \equiv \Delta N$ — (средняя) плотность разности населенностей между двумя уровнями. Обозначим равновесное (при $E(t) = 0$) значение $\rho_{11} - \rho_{22}$ через $(\rho_{11} - \rho_{22})_0$ и предположим, что когда поле $E(t)$ выключено, разность населенностей релаксирует к равновесному значению

$N(\rho_{11}-\rho_{22})_0$[1] с постоянной времени T_1[2]. Следовательно, (8.1.7) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11}-\rho_{22}) = \frac{2i\mu E(t)}{\hbar}(\rho_{21}-\rho_{21}^*) - \frac{(\rho_{11}-\rho_{22})-(\rho_{11}-\rho_{22})_0}{T_1}. \tag{8.1.9}$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда поле $E(t)$ меняется во времени гармонически

$$E(t) = E_0 \cos\omega t = \frac{E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \tag{8.1.10}$$

Из (8.1.8) следует, что для невозмущенной системы ($E(t) = 0$) $\rho_{21} = \rho_{21}(0) \exp[(i\omega_0 - 1/T_2)t]$, так что при $\omega \simeq \omega_0$ удобно пользоваться новыми медленно меняющимися переменными σ_{21} и σ_{12}, которые вводятся соотношениями

$$\rho_{21}(t) = \sigma_{21}(t)e^{-i\omega t}, \qquad \rho_{12}(t) = \sigma_{12}(t)e^{i\omega t}. \tag{8.1.11}$$

Подставив (8.1.10) и (8.1.11) в уравнения (8.1.8) и (8.1.9), получим

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i(\omega-\omega_0)\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar}(\rho_{11}-\rho_{22}) - \frac{\sigma_{21}}{T_2}, \tag{8.1.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11}-\rho_{22}) = \frac{i\mu E_0}{\hbar}(\sigma_{21}-\sigma_{21}^*) - \frac{(\rho_{11}-\rho_{22})-(\rho_{11}-\rho_{22})_0}{T_2} \tag{8.1.13}$$

При выводе (8.1.12) сохранились только члены с временной зависимостью $\exp(i\omega t)$, а при выводе (8.1.13) — только такие члены, которые не имеют экспоненциальной зависимости от времени, таким образом, опущены множители с временной зависимостью $\exp(2i\omega t)$ и $\exp(-2i\omega t)$. Пренебрежение несинхронными членами физически оправдано, ибо в среднем за период их вклад равен нулю.

Уравнения (8.1.12) и (8.1.13) по виду совпадают с уравнениями Блоха для намагниченности в теории магнитного резонанса [1]. Если подставить (8.1.11) в соотношение (8.1.5), то получим $\langle\mu\rangle = \mu(\sigma_{12}e^{i\omega t} + \sigma_{21}e^{-i\omega t})$, а поскольку $\sigma_{21} = \sigma^*_{12}$, то

$$\langle\mu(t)\rangle = 2\mu[\mathrm{Re}\,\sigma_{21}(t)\cos\omega t + \mathrm{Im}\,\sigma_{21}(t)\sin\omega t]. \tag{8.1.14}$$

Стационарные решения. Чтобы найти матрицу плотности стационарного состояния, приравняем левые части уравнений (8.1.12) и (8.1.13) нулю. Прибавляя к уравнению (8.1.12) и вычитая из него

---

[1] Это значение не обязательно соответствует состоянию теплового равновесия, так как может действовать некоторый механизм «накачки».

[2] Поскольку неупругие столкновения также приводят к потере фазовой когерентности (в случае, когда они доминируют), пользуемся T_1 вместо T_2. Этот вопрос рассмотрен в § 8.6.

комплексно-сопряженное уравнение и пользуясь (8.1.13), получаем

$$\operatorname{Im}\sigma_{21} = \frac{\Omega_н T_2 (\rho_{11}-\rho_{22})_0}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_2 T_1},$$

$$\operatorname{Re}\sigma_{21} = \frac{(\omega_0-\omega) T_2^2 \Omega_н (\rho_{11}-\rho_{22})_0}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_2 T_1} \qquad (8.1.15)$$

$$\rho_{11}-\rho_{22} = (\rho_{11}-\rho_{22})_0 \frac{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_2 T_1},$$

где через $\Omega_н \equiv \mu E_0/2\hbar$ обозначена частота нутации.

Макроскопическая (переменная) поляризация $P = N\langle\mu\rangle$, откуда в соответствии с (8.1.14) получаем

$$P = \frac{\mu^2 \Delta N_0 T_2}{\hbar} E_0 \frac{\sin\omega t + (\omega_0-\omega)\cos\omega t \cdot T_2}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_2 T_1}, \qquad (8.1.16)$$

тогда как разность населенностей в единице объема

$$\Delta N = \Delta N_0 \frac{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_1 T_2}, \qquad (8.1.17)$$

где $\Delta N_0 \equiv N(\rho_{11}-\rho_{22})_0$ — разность населенностей в отсутствие поля.

Если воспользоваться обозначением восприимчивости (5.1.18) $\chi = \chi' - i\chi''$, то

$$P(t) = \operatorname{Re}(\varepsilon_0 \chi E_0 e^{i\omega t}) = E_0(\varepsilon_0\chi'\cos\omega t + \varepsilon_0\chi''\sin\omega t), \qquad (8.1.18)$$

и из (8.1.16) получаем

$$\chi''(\omega) = \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_1 T_2},$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\mu^2 T_2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \frac{(\omega_0-\omega) T_2}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_н^2 T_1 T_2}. \qquad (8.1.19)$$

Введем в рассмотрение нормированную функцию формы линии

$$g(\omega) = \frac{2T_2}{1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2} = \frac{\Delta\omega}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Delta\omega/2)^2}, \qquad (8.1.20)$$

где $\Delta = 2T_2^{-1}$ — ширина на уровне половины от максимума.

Функции χ'', пропорциональная поглощению, и χ' согласно (5.1.19) имеют вид (см. также рис. 8.2)

$$\chi''(\omega) \sim N g(\omega), \quad \chi'(\omega) \sim \Delta N(\omega_0-\omega) g(\omega). \qquad (8.1.21)$$

Функция $g(\omega)$, определенная по формуле (8.1.20), описывает нормированную лоренцеву форму линии. Постоянная нормировки находится из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, d\omega = 1. \qquad (8.1.22)$$

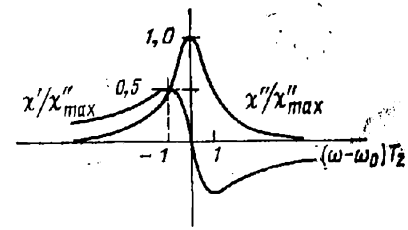


Рис. 8.2. Действительная (χ') и мнимая (χ'') части восприимчивости в пренебрежении насыщением ($\mu^2 E_0^2 T_1 T_2/\hbar^2 \ll 1$)

Поскольку главной причиной переходов в системе являются соударения, то это привело к лоренцевой форме линии (8.1.19).

Насыщение. Одно из следствий, вытекающих из выражений (8.1.17), (8.1.19) и (8.1.21), состоит в том, что разность населенностей ΔN, а также χ' и χ'' убывают с ростом интенсивности поля. Это явление, называемое насыщением, становится заметным при $4\Omega_н^2 T_1 T_2 > 1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2$ или, так как $\Omega_н \equiv \mu E_0/2\hbar$, при условии

$$\mu^2 E_0^2 T_1 T_2/\hbar^2 > 1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2. \qquad (8.1.23)$$

Другое следствие эффекта насыщения заключается в уширении лоренцевой линии от $\Delta\omega = 2T_2^{-1}$ при нулевом поле до

$$\Delta\omega_{нас} = \Delta\omega \sqrt{1 + \mu^2 E_0^2 T_1 T_2/\hbar^2}. \qquad (8.1.24)$$

К этому вопросу вернемся в § 8.7 в связи с насыщением усиления.

Соотношения Крамерса-Кронига. В соответствии с основной теоремой теории функций комплексного переменного, действительная и мнимая части комплексной функции $f(z)$, не имеющей полюсов в нижней (или верхней) полуплоскости, связаны преобразованием Гильберта (см., например, [3]). В применении к функции $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ с $\chi(\infty) = 0$ эти преобразования имеют вид

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \qquad \chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \qquad (8.1.25)$$

Перечеркнутый знак интеграла означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Соотношения (8.1.25) называются соотношениями Крамерса-Кронига [4].

Выясним, удовлетворяют ли соотношениям (8.1.25) функции (8.1.19). Чтобы это сделать, необходимо установить, является ли $\chi(\omega)$ аналитической функцией в нижней полуплоскости. Из (8.1.19) имеем

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) =$$

$$= \frac{\mu^2 \Delta N_0}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega - [\omega_0 - (i/T_2)]}{\left\{\omega - \left[\omega_0 - \frac{i}{T_2}(1+s^2)^{1/2}\right]\right\}\left\{\omega - \left[\omega_0 + \frac{i}{T_2}(1+s^2)^{1/2}\right]\right\}}, \qquad (8.1.26)$$

где $s^2 = \mu^2 E_0^2 T_1 T_2/\hbar^2$. В отсутствие насыщения, $s \equiv 0$, $\chi(\omega)$ имеет единственный полюс при $\omega = \omega_0 + i/T_2$. В этом случае $\chi'(\omega)$ и $\chi''(\omega)$ удовлетворяют соотношениям (8.1.25). Доказательство этого предлагается в качестве упражнения (задача 8.6). При $s \neq 0$ функция $\chi(\omega)$ имеет полюса в точках $\omega = \omega_0 \pm (i/T_2)(1 + s^2)^{1/2}$ и соотношения Крамерса-Кронига не применимы.

Связь с теорией магнитного резонанса. Вывод соотношений (8.1.19) идентичен решению уравнений Блоха в теории магнитного резонанса [1]. В простейшем случае переходов между состояниями $m_J = \pm 1/2$ сопоставим состояние $|2\rangle$ с $|m_J = 1/2\rangle$, а $|1\rangle$ — с $|m_J = -1/2\rangle$. Чтобы аналогия была полной, отметим соответствие между следующими величинами:

$$E_0 \to H_1, \quad \mu \to \gamma \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{L} + \mathbf{S}),$$

$$\mathbf{P}(t) \to \mathbf{M}(t), \quad \mu \to \left\langle -\frac{1}{2} \left| \gamma J_x \right| \frac{1}{2} \right\rangle =$$

$$= \gamma \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta N_0 \to \frac{2M_0}{\gamma\hbar}, \quad \gamma \to \frac{g_J \beta}{\hbar},$$

где H_1 — амплитуда линейно-поляризованного высокочастотного магнитного поля; β — магнетон Бора; $\mathbf{J}$ — оператор полного момента импульса; M_0 — равновесная намагниченность; γ — гиромагнитное отношение и g — фактор Ланде.

Сделав указанные замены и определяя $M_x(t) = \mathrm{Re}\,[\chi(\omega) H_1 e^{i\omega t}]$, из формул (8.1.16) и (8.1.17), получим

$$M_z = M_0 \frac{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + {}^1/_4 \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2},$$

$$\chi'(\omega) = \frac{{}^1/_2 |\gamma| (\omega_0 - \omega) T_2^2 M_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + {}^1/_4 \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2}, \qquad (8.1.27)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{{}^1/_2 |\gamma| T_2 M_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + {}^1/_4 \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2},$$

что совпадает с известными решениями уравнений Блоха [2].

8.2. Физическое проявление восприимчивости $\chi(\omega)$

Согласно (5.1.3) вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ определен как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{нр}} + \mathbf{P}_{\text{рез}} = \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon \chi \mathbf{E},$$

где использована комплексная форма записи, а у поляризации выделен компонент $\mathbf{P}_{\text{рез}}$, обусловленный атомным переходом, и нерезонансный компонент $\mathbf{P}_{\text{нр}}$, который описывает все другие вклады в поляризацию. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \chi(\omega)\right] \mathbf{E} = \varepsilon'(\omega) \mathbf{E}, \qquad (8.2.1)$$

определив комплексную диэлектрическую проницаемость как

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon\left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\chi(\omega)\right]. \qquad (8.2.2)$$

Таким образом, мы учли влияние атомных переходов, видоизменив ε в соответствии с (8.2.2). После вывода в § 8.1 выражения для $\chi(\omega)$, использующего подобную микроскопическую информацию, можно отвлечься от физической природы этого выражения и заняться изучением распространения волн в среде с диэлектрической проницаемостью ε', заданной соотношением (8.2.2).

В качестве примера рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon'(\omega)$. Согласно (5.2.9) имеем

$$E(z, t) = \mathrm{Re}\,[Ee^{i(\omega t - k' z)}], \qquad (8.2.3)$$

где $k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \simeq k\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\chi\right)$; $|\chi| \ll 1$; $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}$.

Выделяя в $\chi(\omega)$ действительную и мнимую части, $\chi = \chi' - i\chi''$ приходим к выражению

$$k' \simeq k\left[1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2}\right] - i\frac{k\chi''(\omega)}{2n^2}, \qquad (8.2.4)$$

где $n \simeq (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}$ — показатель преломления среды в области частот, далекой от резонанса. Подставляя (8.2.4) в (8.2.3), получаем, что при наличии резонансного перехода распространение волны описывается выражением

$$E(z, t) = \mathrm{Re}\,[Ee^{i\omega t - i(k + \Delta k)z + (\gamma/2)z}]. \qquad (8.2.5)$$

Резонансная поляризация влияет на распространение электромагнитной волны так, что набег фазы на единице длины оказывается равным $k + \Delta k$, где

$$\Delta k = \frac{k\chi'(\omega)}{2n^2}, \qquad (8.2.6)$$

а амплитуда меняется с расстоянием по закону $\exp(\gamma z/2)$, где

$$\gamma(\omega) = -\frac{k\chi''(\omega)}{n^2}. \qquad (8.2.7)$$

Полезно получить (8.2.7), используя другой подход. Согласно (5.1.9), средняя мощность электромагнитной волны с y-компонентой, поглощаемая в единице объема, равна

$$\overline{\frac{\text{Мощность}}{\text{Объем}}} = \overline{E_y(t)\frac{dP_y(t)}{dt}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[E(i\omega P^*)], \qquad (8.2.8)$$

где E и P — соответственно комплексные амплитуды y-компонент электрического поля и поляризации, а горизонтальная черта сверху обозначает усреднение по времени. Подставив в (8.2.8) $P = \varepsilon_0 \chi E$, получим

$$\frac{\overline{\text{Мощность}}}{\text{Объем}} = \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \chi'' |E|^2. \qquad (8.2.9)$$

Поглощение энергии со скоростью, которая следует из формулы (8.2.9), ведет к изменению интенсивности волны I по закону

$$I(z) = I_0 e^{\gamma(\omega) z}, \qquad (8.2.10)$$

где $\gamma(\omega) = I^{-1} dI/dz$. Для сохранения энергии требуется выполнение соотношения

$$\frac{dI}{dz} = -\begin{pmatrix}\text{поглощенная мощность} \\ \text{в единичном объеме}\end{pmatrix} = -\frac{\omega \varepsilon_0}{2} \chi'' |E|^2.$$

Подставим это выражение в (8.2.11) и учтем, что $I = \frac{c\varepsilon}{2n} |E|^2$, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2$, где c — скорость света в вакууме; тогда получим $\gamma(\omega) = -\frac{k\chi''(\omega)}{n^2}$ что совпадает с (8.2.7).

8.3. Спонтанные и индуцированные переходы

В § 8.1 электромагнитное поле считалось классической величиной. Это оправдано при рассмотрении когерентного взаимодействия атомов с сильными полями. Имеются, однако, и другие аспекты проблемы взаимодействия, требующие квантового подхода не только к атому, но и к полю. Самая существенная среди задач такого рода связана с явлением спонтанного излучения. Этим термином обозначается переход из возбужденного атомного состояния, скажем, с уровня 2 (рис. 8.1) на нижележащий уровень (например, 1) в отсутствие какого-либо приложенного извне поля. Этот переход сопровождается излучением фотона с энергией $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_2$.

Начнем с рассмотрения атома в возбужденном состоянии 2, помещенного в оптический резонатор больших размеров. Вначале вычислим скорость процесса, изображенного на рис. 8.3, который заключается в том, что атом совершает переход с уровня 2 на уровень 1, взаимодействуя с какой-то одной модой резонатора, например, l-й. При этом l-я мода переходит из состояния $|n_l\rangle$ в $|n_l + 1\rangle$.

Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\mathscr{H}' = e\mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{r} = -eE_{ly}(z, t)\,y, \qquad (8.3.1)$$

где предполагается, что поле моды — плоская волна с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{j}$. Атом находится в точке с координатой z.

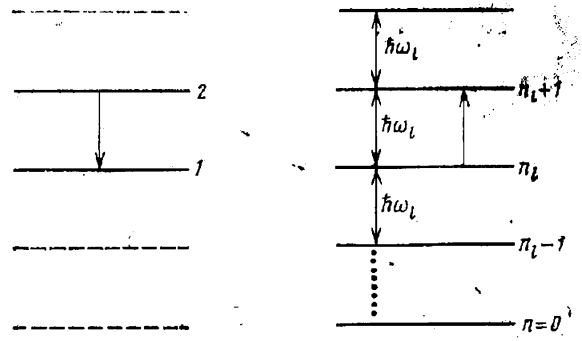


Рис. 8.3. Схема энергетических уровней атома (слева) и моды электромагнитного поля, участвующей в процессе излучения (справа)

Пользуясь операторным выражением (5.6.15) для E_{ly}, перепишем (8.3.1) в виде

$$\mathcal{H}' = iey\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\varepsilon}}\,(a_l^+ - a_l)\sin k_l z, \tag{8.3.2}$$

где V — объем резонатора.

В начальном состоянии $|2, n_l\rangle$ атом находится на уровне *2*, а l-я мода имеет n_l квантов; в конечном состоянии $|1, n_l+1\rangle$ атом находится на нижележащем уровне *1*, а поле приобретает фотон. Конечное и начальное состояния имеют одинаковую энергию, так что для вероятности перехода из (3.5.20) следует:

$$W' = \frac{2\pi e^2\omega_l}{V\varepsilon}|\langle 1, n_l+1|ya_l^+|2, n_l\rangle|^2\sin^2(k_l z)\delta(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1-\hbar\omega_l). \tag{8.3.3}$$

Из (2.2.27) имеем $\langle n_l+1|a_l^+|n_l\rangle = \sqrt{n_l+1}$, поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$W' = \frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}(n_l+1)\sin^2(k_l z)\,\delta(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1-\hbar\omega_l), \tag{8.3.4}$$

где $y_{12}^2 \equiv |\langle 1|y|2\rangle|^2$.

Следовательно, вероятность индуцированного излучения

$$W'_{\text{инд}} = \frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}n_l\sin^2(k_l z)\,\delta(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1-\hbar\omega_l) \tag{8.3.5}$$

в отдельную моду равно вероятности спонтанного перехода

$$W'_{\text{сп}} = \frac{2\pi e^2\omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon}\sin^2(k_l z)\,\delta(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1-\hbar\omega_l), \tag{8.3.6}$$

умноженной на число квантов n_l в этой моде. Подобным же образом показывается, что вероятность индуцированного поглощения при переходе $1 \to 2$ равна вероятности индуцированного излучения.

Спонтанное время жизни. Величина, обратная вероятности спонтанных переходов в совокупность мод, называется спонтанным

временем жизни. Найдем ее, учитывая, что нижний уровень g_1-кратно вырожден, и умножим (8.3.6) на g_1. Множитель $\sin^2(k_l z)$ — заменим величиной, усредненной по модам, т. е. 1/2. Результат умножим на плотность энергетических состояний поля в резонаторе (5.7.3)

$$p(\mathscr{E} = \hbar\omega_1) = \omega_1^2 V n^3/(\pi^2 \hbar c^3),$$

и, проинтегрировав по всем энергиям, получим

$$W_{\text{сп}} \equiv 1/t_{\text{сп}} = \frac{n^3 e^2 y_{12}^2 \omega^3 g_1}{\pi e \hbar c^3} = \frac{n^3 \mu^2 \omega^3 g_1}{\pi e \hbar c^3}, \qquad (8.3.7)$$

где $\mu \equiv e y_{12}$, $\hbar\omega \equiv \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$.

Вероятность индуцированных переходов под действием монохроматического поля. Вероятность индуцированного перехода $2 \to 1$ для случая атома, взаимодействующего с отдельной модой, определяется по формуле (8.3.5). Этим результатом можно воспользоваться при выводе выражения для вероятности перехода под действием бегущей монохроматической волны с частотой ω. Прежде напомним, что формула (8.3.5) применима к случаю, когда энергия перехода с определенностью равна $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$. Значение $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$ точно не известно, и вероятность того, что $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$ лежит в интервале $\mathscr{E} \ldots \mathscr{E} + d\mathscr{E}$, дается выражением $g(\mathscr{E})\, d\mathscr{E} = (1/\hbar)\, g(\omega)\, d\omega$, где $g(\omega)$ — нормированная функция формы линии для перехода $2 \to 1$. Поэтому умножим (8.3.5) на $\hbar^{-1} g[\omega = (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar]\, d\mathscr{E}$ и проинтегрируем по всем энергиям. С учетом вырождения кратности g_1 уровня 1 получаем

$$(W_{21})_{\text{инд}} = \frac{e^2 y_{12}^2 \omega_l n_l g_1}{2\hbar V \varepsilon} g(\omega_l), \qquad (8.3.8)$$

где $\sin^2(k_l z)$ заменяем на среднее значение 1/2, соответствующее бегущей волне с *такой же плотностью энергии, как и у* l-й моды.

Наконец, связывая число квантов в l-й моде с интенсивностью волны I_{ω_l} формулой $I_{\omega_l} = \frac{c\hbar\omega_l}{nV} n_l$ и исключая с помощью (8.3.7) y_{12}^2 из (8.3.8), получаем основной результат

$$(W_{21})_{\text{инд}} = \frac{\lambda^2 I_\omega}{8\pi\hbar\omega n^2 t_{\text{сп}}} g(\omega). \qquad (8.3.9)$$

Отметим пропорциональность вероятности перехода интенсивности волны I_ω и функции формы линии $g(\omega)$. В случае ударного уширения линии, которому отвечает формула (8.1.20), переходы эффективно индуцируются только в полосе частот $\Delta\omega$ возле центра линии.

Если взаимодействующий с полем атом вначале находится на нижнем уровне 1, матричный элемент, входящий в (8.3.3), представляет собой $\langle 2, n_l - 1 | y a_l | 1, n_l \rangle = \langle 2 | y | 1 \rangle \sqrt{n_l}$, и, если $n_l = 0$, вероятность перехода равна нулю. Следовательно, не бывает спон-

танных переходов, сопровождающихся увеличением энергии системы. Кроме того, вероятности индуцированных переходов $2 \to 1$ и $1 \to 2$ равны. Таким образом, пользуясь (8.3.9), можно записать

$$(W_{12})_{\text{инд}} = \frac{g_2}{g_1}(W_{21})_{\text{инд}} = \frac{g_2}{g_1}\,\frac{\lambda^2 I_\omega}{8\pi\hbar\omega n^2 t_{\text{сп}}}\, g(\omega). \qquad (8.3.10)$$

Множители g_1 и g_2 — это кратности вырождения уровней 1 и 2 соответственно.

8.4. Показатель усиления [1]

Рассмотрим прохождение монохроматической волны частоты ω через среду, состоящую из атомов (см. рис. 8.2). Плотность атомов, находящихся на уровне 2, обозначим через N_2 (атомов/м^3), находящихся на уровне 1 — через N_1 (атомов/м^3).

Превышение числа переходов $2 \to 1$ над переходами $1 \to 2$ приводит к мощности индуцированного излучения в единице объема

$$\frac{\text{Мощность}}{\text{Объем}} = [N_2 (W_{21})_{\text{инд}} - N_1 (W_{12})_{\text{инд}}]\,\hbar\omega. \qquad (8.4.1)$$

Спонтанными переходами здесь пренебрегаем. Используя (8.3.9) и (8.3.10), получим

$$\frac{\text{Мощность}}{\text{Объем}} = \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right) \frac{\lambda^2 g(\omega) I_\omega}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}}. \qquad (8.4.2)$$

Предполагая, что эта мощность поступает в индуцированную волну, находим, что последняя нарастает в соответствии с уравнением

$$\frac{dI(z)}{dz} = \left(\frac{\text{мощность}}{\text{объем}}\right) = \gamma(\omega) I_\omega(z). \qquad (8.4.3)$$

в котором

$$\gamma(\omega) = \frac{(N_2 - N_1 g_2/g_1)\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}}\, g(\omega). \qquad (8.4.4)$$

Если N_2 и N_1 не зависят от z, а это имеет место, когда накачка однородна и эффектом насыщения можно пренебречь, интенсивность волны экспоненциально нарастает:

$$I_\omega(z) = I_\omega(0)\, e^{\gamma(\omega) z}. \qquad (8.4.5)$$

Этот же экспоненциальный закон нарастания уже был найден в § 8.2.

---

[1] Коэффициентом усиления будем называть отношение мощности излучения, выходящего из усиливающего устройства, к мощности на входе, а величину γ, определяемую (8.4.4), показателем усиления (expnential gain coefficient) при $\gamma > 0$ и показателем поглощения при $\gamma < 0$. В литературе по оптике последнюю величину принято именовать коэффициентом поглощения.— *Прим. ред.*

Пример.

Усиление в кристалле рубина. Рассмотрим кристалл Al_2O_3 с примесью 0,5% Cr_2O_3 по массе ($\sim 2{,}4 \cdot 10^{19}$ ионов хрома в $см^3$). Предположим, что $N_2 - N_1(g_2/g_1) = 5 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$. Задавшись $t_{сп} = 3 \cdot 10^{-3}$ с, $\lambda = 0{,}6943$ μ, $n = 1{,}77$, $\Delta\omega \equiv 1/g(\omega_0) \approx 10^{12}$ $с^{-1}$ при $T = 300$ К, получаем из (8.4.4) $\gamma(\omega) \sim 5 \cdot 10^{-2}$ $см^{-1}$.

8.5. Нахождение вероятностей индуцированных и спонтанных переходов по Эйнштейну

Результаты § 8.3 можно получить и методами классической физики, как это впервые сделал Эйнштейн. Рассмотрим взаимодействие ансамбля атомов с полем излучения, энергия которого равномерно распределена по спектру в окрестности частоты перехода. Обозначим плотность энергии, приходящейся на единичный интервал частот, через $\rho(\omega)$. Предположим, что вероятности индуцированных переходов пропорциональны $\rho(\omega)$, и представим их в виде

$$(W'_{21})_{инд} = B_{21}\rho(\omega), \quad (W'_{12})_{инд} = B_{12}\rho(\omega), \tag{8.5.1}$$

где B_{21} и B_{12} — постоянные, которые требуется определить. Полная вероятность перехода вниз ($2 \to 1$) равна сумме вероятностей вынужденного и спонтанного переходов

$$W'_{21} = B_{21}\rho(\omega) + A. \tag{8.5.2}$$

Вероятность спонтанного перехода A обсуждалась в § 8.3. Полная вероятность перехода вверх равна

$$W'_{12} = (W'_{12})_{инд} = B_{12}\rho(\omega). \tag{8.5.3}$$

Поскольку постоянные B_{12} и B_{21} характеризуют атомную систему и не зависят от свойств излучения, без потери общности можно рассмотреть случай, когда атомы находятся в тепловом равновесии с черным излучением, имеющим температуру T. Спектральную плотность энергии излучения можно записать на основе (5.7.4)

$$\rho(\omega) = \frac{n^3\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\left(\frac{1}{e^{(\hbar\omega/kT)}-1}\right). \tag{8.5.4}$$

В тепловом равновесии средние населенности уровней 1 и 2 не меняются во времени, следовательно, число переходов $2 \to 1$ за любой интервал времени равно числу переходов $1 \to 2$, т. е.

$$N_2 W'_{21} = N_1 W'_{12}, \tag{8.5.5}$$

где N_1 и N_2 — плотности населенностей уровней 1 и 2 соответственно. Подставив (8.5.2) и (8.5.3) в (8.5.5), получим

$$N_2[B_{21}\rho(\omega) + A] = N_1 B_{12}\rho(\omega),$$

или, с учетом выражения (8.5.4) для $\rho(\omega)$:

$$N_2\left[B_{21}\frac{n^3\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3\left(e^{(\hbar\omega/kT)}-1\right)} + A\right] = N_1 B_{12}\frac{n^3\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)}. \tag{8.5.6}$$

Вследствие того, что атомы находятся в тепловом равновесии, отношение N_2/N_1 определяется распределением Больцмана

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\hbar\omega/kT}. \qquad (8.5.7)$$

Приравняв выражения для N_2/N_1, даваемые формулами (8.5.6) и (8.5.7), получим

$$\frac{n^3 \hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)} = \frac{A (g_2/g_1)}{B_{12} e^{\hbar\omega/kT} - B_{21} g_2/g_1}. \qquad (8.5.8)$$

Последнее равенство выполняется при любых значениях T, если имеют место соотношения

$$B_{12} = B_{21}(g_2/g_1), \qquad (8.5.9)$$

$$A/B_{21} = n^3 \hbar\omega^3/\pi^2 c^3. \qquad (8.5.10)$$

Используя (8.5.10), перепишем (8.5.1) в виде

$$(W'_{21})_{\text{инд}} = \frac{A\pi^2 c^3}{n^3 \hbar\omega^3} \rho(\omega) = \frac{\pi^2 c^3}{n^3 \hbar\omega^3 t_{\text{сп}}} \rho(\omega). \qquad (8.5.11)$$

Выражение (8.5.11) определяет вероятность перехода атома под действием поля с однородной спектральной плотностью энергии $\rho(\omega)$. В квантовой электронике приходится рассматривать, главным образом, переходы, вызванные монохроматическим полем с частотой ω. Обозначим вероятность такого процесса как $(W_{21})_{\text{инд}}$. В § 8.3 установлено, что она пропорциональна функции формы линии $g(\omega)$. В то же время следует ожидать, что $(W_{21})_{\text{инд}}$ переходит в $(W_{21}')_{\text{инд}}$, если ширина спектра поля излучения становится больше ширины линии перехода. Оба эти требования выполняются, если запишем $(W_{21})_{\text{инд}}$ в виде

$$(W_{21})_{\text{инд}} = \frac{\pi^2 c^3 \rho_\omega}{n^2 \hbar\omega^3 t_{\text{сп}}} g(\omega), \qquad (8.5.12)$$

где ρ_ω — плотность энергии (Дж/м^3) электромагнитного поля, вызывающего переход. Покажем, что выражение (8.5.12) переходит в (8.5.11) при уширении спектра излучения. Для этого представим поле, имеющее широкий спектр, как набор близких по частоте полей с хаотическим соотношением между фазами. Тогда, сложив вероятности переходов (8.5.12), получим

$$(W'_{21})_{\text{инд}} = \sum_{\omega_k} (W_{21})_{\text{инд}} = \frac{\pi^2 c^3}{n^3 \hbar t_{\text{сп}}} \sum_k \frac{\rho_{\omega_k}}{\omega_k^3} g(\omega_k), \qquad (8.5.13)$$

где ρ_{ω_k} — плотность энергии компоненты поля с частотой ω_k. Перейдем в (8.5.13) от суммы к интегралу, заменяя ρ_{ω_k} на $\rho(\omega)\, d\omega$, где $\rho(\omega)$ — спектральная плотность энергии поля:

$$(W'_{21})_{\text{инд}} = \frac{\pi^2 c^3}{n^3 \hbar t_{\text{сп}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\omega) g(\omega)}{\omega^3} d\omega. \qquad (8.5.14)$$

Если функция $\rho(\omega)/\omega^3$ меняется медленно по сравнению с $g(\omega)$, то по теореме о среднем это отношение можно вынести за знак интеграла и, воспользовавшись условием нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)d\omega = 1$, получить $(W'_{21})_{\text{инд}} = \frac{\pi^3 c^3}{n^3 \hbar \omega^3 t_{\text{сп}}} \rho(\omega)$, что совпадает с (8.5.11).

Формулу (8.5.12) можно выразить через плотность потока мощности (интенсивность) поля $I_\omega = c\rho_\omega/n$ [Вт/м^2]

$$(W_{21})_{\text{инд}} = \frac{A\pi^2 c^2 I_\omega}{n^3 \hbar \omega^3} g(\omega) = \frac{\lambda^2 I_\omega}{8\pi n^2 \hbar \omega t_{\text{сп}}} g(\omega),$$

где c — скорость света в вакууме; $t_{\text{сп}} \equiv A^{-1}$. Это выражение совпадает с (8.3.9).

8.6. Однородное и неоднородное уширение

Термин «уширение» отражает тот факт, что атомные системы откликаются на действие электромагнитного поля в конечной полосе частот. Уширение проявляется, например, в зависимости поглощения или усиления от частоты. Графики таких зависимостей приведены в гл. 10.

Различают два основных класса механизмов уширения.

Однородное уширение [6]. В этом случае атомы неразличимы и имеют одинаковую энергию перехода $\mathscr{E}_2$—$\mathscr{E}_1$. Причинами однородного уширения[1]) являются: неупругие столкновения с фононами или с другими атомами (или молекулами); переходы на другие уровни— это могут быть спонтанные излучательные или безызлучательные переходы; упругие столкновения, сбивающие фазу; взаимодействие атома с электромагнитным полем (уширение вследствие насыщения)[2]). Случай однородного уширения был рассмотрен в § 8.1, где получена лоренцева кривая отклика системы

$$\chi''(\omega) \propto [1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + (\mu^2 E_0^2/\hbar^2) T_2 T_1]^{-1}, \qquad (8.6.1)$$

ширина которой зависит от мощности

$$\Delta\omega_{\text{нас}} = \Delta\omega \sqrt{1 + \mu^2 E_0^2 T_1 T_2/\hbar^2}, \qquad (8.6.2)$$

---

[1]) Системы с однородным уширением называют также спектрально-однородными, а системы с неоднородным уширением — спектрально-неоднородными. — *Прим. ред.*

[2]) Более удачной представляется несколько иная классификация механизмов однородного уширения: спонтанные излучательные переходы, ответственные за так называемую естественную ширину линии; безызлучательные переходы, обусловленные неупругими соударениями с фононами или другими атомами; переходы, индуцированные электромагнитным полем; сбой фазы вследствие неупругих соударений. — *Прим. ред.*

где $\Delta\omega = 2T_2^{-1}$; T_2, как и в (8.1.8), — характерное время, за которое нарушается когерентность между состояниями атомов и которое определяется соотношением

$$\frac{1}{T_2} = \sum_i \frac{1}{\tau_i}. \qquad (8.6.3)$$

Суммирование предполагается по всем процессам, нарушающим когерентность взаимодействия атомов с полем.

Неоднородное уширение [6]. В этом случае атомы не вполне идентичны и уширение является следствием несовпадения индивидуальных резонансных частот переходов. Примерами систем с неоднородным уширением служат примесные ионы в твердотельных матрицах и молекул в газах низкого давления.

В первом примере уровни энергии, а, следовательно, и частоты переходов зависят от ближайших соседей каждого атома. Случайные деформации, всегда имеющие место, и другие типы дефектов кристаллической решетки изменяют это окружение от иона к иону, что приводит к разбросу частот переходов.

Во втором примере частота ω перехода атома (или молекулы) сдвинута из-за эффекта Допплера, вызванного конечной скоростью движения атома:

$$\omega = \omega_0 + (v_x/c)\,\omega_0, \qquad (8.6.4)$$

где v_x — составляющая скорости вдоль направления, связывающего наблюдателя с движущимся атомом; c — скорость света; ω_0 — частота, соответствующая покоящемуся атому. Распределение по скоростям совокупности атомов с массой M, находящихся в термодинамическом равновесии при температуре T, дается максвелловской функцией

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{M}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right]. \qquad (8.6.5)$$

Величина $f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x dv_y dv_z$ определяет долю атомов, x-компоненты скорости которых находятся в интервале $(v_x, v_x + dv_x)$, а y и z-компоненты в интервалах $(v_y, v_y + dv_y)$ и $(v_z, v_z + dv_z)$ соответственно. Можно также рассматривать $f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x dv_y dv_z$ как априорную вероятность того, что конец вектора скорости произвольного атома попадает в пространстве скоростей в элементарный объем $dv_x dv_y dv_z$ с центром в точке v, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z = 1. \qquad (8.6.6)$$

В соответствии с (8.6.4) $g(\omega)\,d\omega$ — вероятность попадания частоты перехода в интервал $(\omega, \omega + d\omega)$ — равна вероятности того, что v_x находится между $v_x = (\omega - \omega_0)\,c/\omega_0$ и $(\omega + d\omega - \omega_0)\,c/\omega_0$ независимо от значений v_y и v_z (если $v_x = (\omega - \omega_0)\,c/\omega_0$, то частота

с учетом доплеровского сдвига равна ω при любых v_y, v_z). Таким образом, эта вероятность получается подстановкой $v_x = (\omega - \omega_0)\, c/\omega_0$ в $f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$ и последующим интегрированием по всем значениям v_y, v_z:

$$g(\omega)\, d\omega = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\frac{M}{2kT}(v_y^2+v_z^2)}\, dv_y\, dv_z \times$$

$$\times e^{-\frac{M}{2kT}(c^2/\omega_0^2)(\omega-\omega_0)^2} \left(\frac{c}{\omega_0}\right) d\omega\,. \qquad (8.6.7)$$

Пользуясь табличным интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(M/2kT)\, v_z^2}\, dv_z = \left(\frac{2\pi kT}{M}\right)^{1/2},$$

получаем из (8.6.7) выражение для нормированной доплеровской формы линии

$$g(\omega) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{M}{2kT}\frac{c^2}{\omega_0^2}(\omega-\omega_0)^2}\,. \qquad (8.6.8)$$

Функциональная зависимость $g(\omega)$ в (8.6.8) называется гауссовой. Ширина линии $g(\omega)$ определяется как интервал между частотами, в которых функция $g(\omega)$ уменьшается до половины максимального значения. Из (8.6.8) следует, что

$$\Delta\omega_D = 2\omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}\ln 2}\,, \qquad (8.6.9)$$

где индекс D означает, что речь идет о доплеровском уширении Пользуясь (8.6.9), выражение для $g(\omega)$ можно переписать в виде

$$g(\omega) = \frac{2(\ln 2)^{1/2}}{\pi^{1/2}\,\Delta\omega_D}\, e^{-4\ln 2\,(\omega-\omega_0)^2/\Delta\omega_D^2}\,. \qquad (8.6.10)$$

8.7. Насыщение усиления в системах с однородным и неоднородным уширением

Существенное различие между системами с однородным и неоднородным уширением проявляется в характере их насыщения. В частности, когда такие системы используются в качестве активных сред, их усиление падает с ростом интенсивности поля. Насколько велик этот спад и как он зависит от частоты поля в обоих случаях — эти вопросы составляют предмет дальнейшего рассмотрения.

Однородное уширение. В этом случае насыщение усиления вызвано уменьшением разности населенностей с ростом поля. Коэффициент усиления определяется выражением (8.4.4)

$$\gamma(\omega) = \Delta N \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} g(\omega), \tag{8.7.1}$$

где

$$g(\omega) = 2T_2/[1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2] \tag{8.7.2}$$

— нормированная функция формы линии, полученная в § 8.1.

Выражение для плотности разности населенностей $\Delta N \equiv N_2 - N_1(g_2/g_1)$ дается формулой (8.1.17)

$$\Delta N = \Delta N_0 \frac{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega_{\text{н}}^2 T_1 T_2}, \tag{8.7.3}$$

где $\Omega_{\text{н}}^2 = (\mu E_0/2\hbar)^2 g_1$. Подставим (8.7.2) и (8.7.3) в (8.7.1). В полученном выражении исключим матричный элемент $\mu = ey_{12}$, использовав (8.3.7), и получим

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 g(\omega)}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} \left(\frac{1}{1 + I_\omega/I_{\text{нас}}(\omega)}\right) \equiv \frac{\gamma_0(\omega)}{1 + I_\omega/I_{\text{нас}}(\omega)}, \tag{8.7.4}$$

где $\gamma_0(\omega)$ — кривая ненасыщенного ($E_0 = 0$) усиления; I_ω (Вт/м^2) — интенсивность поля, определяемая соотношением $I_\omega = cn\varepsilon_0 E_0^2/2$ и $I_{\text{нас}}(\omega)$ — та интенсивность, для которой на частоте ω усиление вдвое меньше по сравнению со значением при нулевой интенсивности. Она называется «насыщающей интенсивностью» и выражается формулой

$$I_{\text{нас}}(\omega) = \frac{4\pi n^2 \hbar\omega}{(T_1/t_{\text{сп}})\lambda^2 g(\omega)}. \tag{8.7.5}$$

В этой формуле отсутствует фактор вырождения g_1, так как согласно (8.3.7) он входит в выражение для $t_{\text{сп}}$. Время релаксации инверсной разности населенностей T_1, фигурирующее в уравнении (8.1.9), во многих случаях совпадает с временем жизни верхнего лазерного уровня, которое, помимо спонтанного излучения, определяется и другими факторами.

Возвращаясь к выражению (8.7.5), заметим, что насыщающая интенсивность обратно пропорциональна $g(\omega)$, поэтому чем больше отстройка от центра линии, тем труднее достигнуть насыщения.

Пример.

Насыщение усиления в лазере на рубине. Воспользуемся примером, приведенным в § 8.4. Положим $T_1 = t_{\text{сп}}$, $1/g(\omega_0) \equiv \Delta\omega \sim 10^{12}$ с$^{-1}$ при 300 К. Подставив эти значения в (8.7.5), получим $I_{\text{нас}}(\omega) \approx 465$ Вт/см^2.

Неоднородное уширение. В спектрально-неоднородных системах каждый атом имеет свою частоту перехода $(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar$. Такую среду можно представить состоящей из групп атомов, выделенных по признаку центральной частоты перехода ω_i. Введем функцию

$p(\omega_\xi)$ такую, что $p(\omega_\xi)\,d\omega_\xi$ есть априорная вероятность попадания центральной частоты атома в интервал между ω_ξ и $\omega_\xi + d\omega_\xi$. Нормировочное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\omega_\xi)\,d\omega_\xi = 1 \tag{8.7.6}$$

означает, что частота перехода атома с достоверностью лежит в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Атомы, входящие в группу ω_ξ, считаются спектрально-однородными с функцией формы линии $g^\xi(\omega)$, удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^\xi(\omega)\,d\omega = 1. \tag{8.7.7}$$

Можно определить форму линии перехода $g(\omega)$, рассматривая $g(\omega)\,d\omega$ как априорную вероятность того, что частота спонтанного излучения лежит между ω и $\omega + d\omega$. Это определение приводит к формуле

$$g(\omega)\,d\omega = \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\omega_\xi)\,g^\xi(\omega)\,d\omega_\xi\right] d\omega, \tag{8.7.8}$$

смысл которой заключается в том, что полная вероятность испускания фотона с частотой, лежащей между ω и $\omega + d\omega$, равна $g^\xi(\omega)\,d\omega$ — вероятности испускания такого фотона атомом группы ξ, просуммированной по всем группам.

Если ΔN_0(атомов/м^3) — полная ненасыщенная разность населенностей, то доля атомов, образующих однородную группу, равна $\Delta N_0 p(\omega_\xi)\,d\omega_\xi$ и вклад только этой группы в показатель усиления на частоте ω составляет согласно (8.7.4) величину

$$\gamma_\xi(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} \left[\frac{p(\omega_\xi)\,d\omega_\xi}{\dfrac{1}{g^\xi(\omega)} + \dfrac{I_\omega \varphi \lambda^2}{4\pi n^2 \hbar\omega}}\right], \tag{8.7.9}$$

где $\varphi \equiv T_1/t_{\text{сп}}$. Из определения показателя усиления (8.4.3) следует, что вклады различных групп в $\gamma(\omega)$ аддитивны, благодаря чему

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\omega_\xi)\,d\omega_\xi}{\dfrac{1}{g^\xi(\omega)} + \dfrac{\varphi \lambda^2 I_\omega}{4\pi n^2 \hbar\omega}}. \tag{8.7.10}$$

В этом состоит основной результат.

В качестве первой проверки формулы (8.7.10) рассмотрим случай $I_\omega \ll 4\pi n^2 \hbar\omega/[\varphi\lambda^2 g^\xi(\omega)]$, когда эффектом насыщения можно пренебречь. С учетом (8.7.8) формула (8.7.10) сводится к формуле

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}}\, g(\omega),$$

совпадающей с (8.7.4) при $I_\omega = 0$. Таким образом, выражения, описывающие усиление в системах с однородным и неоднородным уширением, в отсутствие насыщения совпадают.

Предположим теперь, что атомы, составляющие группу ξ, неразличимы, т. е. им отвечает однородная линия, форма которой описывается формулой (8.1.20):

$$g^{\xi}(\omega) = \frac{\Delta\omega}{(\omega-\omega_\xi)^2+(\Delta\omega/2)^2}. \qquad (8.7.11)$$

Величину $\Delta\omega$ можно назвать шириной однородной составляющей неоднородной линии. Для группы атомов, частоты которых находятся внутри интервала $\Delta\omega$, часто используется термин «однородный пакет». Подстановка (8.7.11) в (8.7.10) приводит к

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 \Delta\omega}{16\pi^2 n^2 t_{\text{сп}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\omega_\xi)\, d\omega_\xi}{(\omega-\omega_\xi)^2+(\Delta\omega/2)^2 + \varphi\lambda^2 I_\omega \Delta\omega/(8\pi^2 n^2 \hbar\omega)}. \qquad (8.7.12)$$

В предельном неоднородном случае ширина функции $p(\omega_\xi)$ много больше ширины остального подынтегрального выражения в (8.7.12), благодаря чему $p(\omega_\xi)$ практически не изменяется в области интегрирования. Можем вынести $p(\omega_\xi)\,|_{\omega_\xi=\omega} = p(\omega)$ за знак интеграла в (8.7.12) и получить

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 \Delta\omega}{16\pi^2 n^2 t_{\text{сп}}}\, p(\omega) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_\xi}{(\omega-\omega_\xi)^2+(\Delta\omega/2)^2 + \varphi\lambda^2 I_\omega \Delta\omega/(8\pi^2 n^2 \hbar\omega)}. \qquad (8.7.13)$$

Используя табличное значение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$ при интегрировании (8.7.13), получим

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 p(\omega)}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\varphi\lambda^2 I_\omega}{2\pi^2 n^2 \hbar\omega\Delta\omega}}} = \qquad (8.7.14)$$

$$= \gamma_0(\omega) \frac{1}{\sqrt{1+I_\omega/I_{\text{нас}}}}, \qquad (8.7.15)$$

где

$$I_{\text{нас}} = 2\pi\hbar^2\hbar\omega\Delta\omega/(\varphi\lambda^2) \qquad (8.7.16)$$

— насыщающая интенсивность неоднородной линии. Сравнение (8.7.15) и (8.7.16) с (8.7.4) и (8.7.5) выявляет два существенных различия в картине насыщения однородных и неоднородных систем.

1. Неоднородная система насыщается «медленнее», о чем свидетельствует квадратный корень в формуле (8.7.15). Происхождение

такой закономерности можно пояснить следующим образом. Хотя инверсия в однородном пакете ξ уменьшается в соответствии с (8.7.4), это уменьшение частично компенсируется тем, что с ростом I_ω во взаимодействие вовлекается все большее число групп, поскольку однородная линия уширяется по закону (8.6.2). Умножив (8.7.4) на (8.6.2), получим зависимость типа (8.7.15)[1].

2. Насыщающая интенсивность не зависит от частоты излучения, если линия неоднородно уширена и частота попадает в пределы линии. Действительно, формула (8.7.16), определяющая $I_{\text{нас}}$ для неоднородной линии, в отличие от своего однородного аналога (8.7.5), не содержит $g(\omega)$.

Выжигание «провала». Чтобы лучше ощутить различие в поведении при насыщении сред с однородным и неоднородным уширением, рассмотрим следующий случай. На среду одновременно действуют сильное поле с частотой ω и очень слабый сигнал на частоте ω'; измеряется показатель усиления $\gamma(\omega')$. Требуется найти форму линии усиления $\gamma(\omega')$ для однородной и неоднородной сред.

Рассмотрим однородный случай. Согласно (8.7.1) усиление на частоте ω' имеет значение

$$\gamma(\omega') = \Delta N \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} g(\omega'),$$

где ΔN — разность населенностей в *присутствии сильного поля на частоте* ω. Взяв значение последней из формулы (8.7.3), получим

$$\gamma(\omega') = \gamma_0(\omega') \left[\frac{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + (\mu^2 E_0^2/\hbar^2) T_1 T_2} \right], \qquad (8.7.17)$$

где E_0 — амплитуда сильного поля с частотой ω, а $\gamma_0(\omega')$ — ненасыщенная линия усиления ($E_0 = 0$),

$$\gamma_0(\omega') = \Delta N_0 \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} g(\omega').$$

Основной итог состоит в том, что $\gamma(\omega')$ имеет *ту же зависимость от частоты, что и* $\gamma_0(\omega')$, но уменьшена по величине на множитель, заключенный в (8.7.17) в квадратные скобки.

При наличии среды с неоднородным уширением ситуация оказывается сложнее. Прежде всего пользуясь (8.7.11), перепишем (8.7.10) в виде

$$\gamma(\omega) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{сп}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_\xi \, p(\omega_\xi) \, g^\xi(\omega) \times$$

$$\times \frac{(\omega - \omega_\xi)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}{(\omega - \omega_\xi)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \frac{\varphi \lambda^2 I_\omega \Delta\omega}{8\pi^2 n^2 \hbar\omega}}.$$

[1] Здесь нужно иметь в виду, что (8.6.2) можно записать в виде $\Delta\omega_{\text{нас}} = \Delta\omega \sqrt{1 + I_\omega / I_{\text{нас}}(\omega_0)}$.

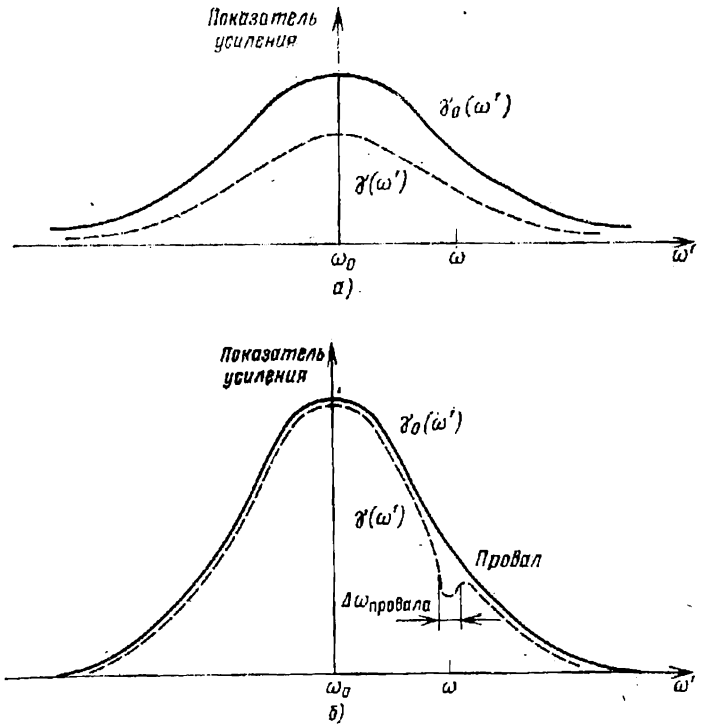


Рис. 8.4. Показатель усиления $\gamma(\omega')$ слабого пробного сигнала с частотой ω' в присутствии насыщающего поля с частотой ω в случаях однородного ($а$) и неоднородного ($б$) уширения линии

Подынтегральное выражение пропорционально вкладу ξ-го однородного пакета в усиление на частоте ω. Следовательно, выражение в квадратных скобках показывает, как уменьшается этот вклад из-за насыщающего поля на частоте ω. Таким образом, усиление, испытываемое слабым пробным сигналом на частоте ω', равно ненасыщенному усилению $\gamma_0(\omega')$, умноженному на фактор локального ослабления

$$\gamma(\omega') = \gamma_0(\omega') \frac{(\omega-\omega')^2+(\Delta\omega/2)^2}{(\omega-\omega')^2+(\Delta\omega/2)^2+\varphi\lambda^2 I_\omega \Delta\omega/(8\pi^2 n^2 \hbar\omega)}. \quad (8.7.18)$$

Главная особенность (8.7.18) заключается в том, что $\gamma(\omega')$ практически везде совпадает с $\gamma_0(\omega')$, за исключением области вблизи частоты насыщающего поля ω, ширина которой приближенно равна

$$\Delta\omega_{провала} = \Delta\omega\sqrt{1+I_\omega/I_{нас}}. \quad (8.7.19)$$

Показатель усиления на частоте $\omega' = \omega$ уменьшается в $(1 + I_\omega/I_{нас})$ раз. Интенсивность насыщения $I_{нас}$ определена по формуле (8.7.16). Указанную область уменьшенного усиления обычно называют «провалом», а описанное явление — «выжиганием провала».

Профиль линии усиления $\gamma(\omega')$ пробного сигнала изображен на рис. 8.4 для обоих типов уширения.

Иной подход к задаче об усилении и насыщении усиления, основанный на уравнениях баланса, изложен в [7].

Задачи

8.1. Покажите, что соотношение (8.5.10) $A/B_{21} = \hbar\omega^3 n^3/\pi^2 c^3$ согласуется с формулой (8.3.4), из которой следует, что $W_{\text{инд}}/W_{\text{спонт}} = n$, где n — число квантов в моде.

8.2. Определите коэффициент поглощения в максимуме линии, если заданы следующие значения параметров перехода: $\omega_0 = 2 \cdot 10^{15}$ Гц; $N_2 = 0$; $N_1 = 10^{18}$ см$^{-3}$; полная ширина гауссовой линии поглощения 400 см$^{-1}$; $t_{\text{спонт}} = 10^{-4}$ с. Определяя оптическую плотность среды как $\lg(I_{\text{вх}}/I_{\text{вых}})$, где I — интенсивность, найдите ее значение на частоте ω_0 для материала толщиной 1 см. При какой температуре вероятность перехода, индуцированного излучением абсолютно черного тела, равна вероятности спонтанного испускания?

8.3. Вычислите классическое время жизни, равное отношению энергии электрона к излучаемой им мощности, для электрона, колеблющегося по закону $r = r_0 \cos \omega t$, где r — координата.

8.4. (а) Познакомьтесь самостоятельно с понятием силы осциллятора, см. [8, 9].

(б) Чему равна сила осциллятора для перехода, описанного в § 8.2?

(в) Покажите, что сила осциллятора f_{21} для перехода $1 \to 2$ с частотой ω равна отношению $t_{\text{класс}}/3t_{\text{спонт}}$.

8.5. Выведите формулы (8.1.15).

8.6. Покажите, что величины $\chi'(\omega)$ и $\chi''(\omega)$, определяемые формулами (8.1.19), удовлетворяют соотношениям Крамерса-Кронига в пределе пренебрежимо малого насыщения ($\Omega = 0$).

Глава 9

ЛАЗЕР. РЕЖИМ ГЕНЕРАЦИИ

Предложения об использовании вынужденного излучения в системах с инверсией населенностей для усиления СВЧ сигналов были высказаны независимо Вебером [1], Гордоном, Зейгером и Таунсом [2], Басовым и Прохоровым [3][1]. Первый генератор и усилитель

[1] Впервые идея усиления электромагнитных волн неравновесными квантовыми системами была высказана Фабрикантом, Вудынским и Бутаевой. Авторское свидетельство, полученное этим коллективом по заявке от 18 июня 1951 г., содержит описание принципа молекулярного усиления [9]. Читателям, интересующимся историей возникновения квантовой электроники, может быть рекомендована книга [10]. — *Прим. ред.*

на этом принципе был создан в Колумбийском университете Гордоном, Зейгером и Таунсом. Свой прибор они назвали мазером[1]. Первый мазер работал на микроволновом переходе молекулы аммиака (NH_3). Возможность осуществления мазерного эффекта в оптическом и близких к нему диапазонах длин волн была рассмотрена в 1958 г. в статье Шавлова и Таунса [4]. Менее чем через два года, в 1960 г., Мейман добился успеха в создании импульсного рубинового лазера[2] [5]. Сообщение о создании первого лазера непрерывного действия на смеси газов гелия и неона было опубликовано в 1961 г. [6]. Лазерный эффект в полупроводниках был достигнут в 1962 г.

Среда с инвертированными населенностями уровней может усиливать излучение на частотах вблизи атомного перехода (см. гл. 8). В данной главе мы рассмотрим процессы, протекающие внутри оптического резонатора при помещении усиливающей среды. Слабые флуктуационные поля мод в этом случае будут усиливаться. Для нескольких мод с наименьшими потерями (высокой добротностью Q) усиление может превысить потери. Эти моды будут нарастать по интенсивности до тех пор, пока эффект насыщения не ограничит усиление на уровне потерь и не установится стационарная генерация.

9.1. Условие генерации

Найдем условие генерации лазера, т. е. определим плотность инверсной заселенности уровней активной среды, которая отвечает порогу генерации, и частоту, на которой излучает лазер. Для того, чтобы лучше понять природу генерации, выведем условие генерации двумя, по-видимому, независимыми способами.

В настоящем параграфе излагается первый подход, состоящий в том, что с помощью закона ABCD рассматривается прохождение гауссова пучка через последовательность линзоподобных сред и элементов (включая активную среду), имитирующую оптический резонатор. Условие генерации вытекает из требования воспроизведения формы пучка, его амплитуды и фазы после каждого полного обхода резонатора. Второй подход изложен в § 9.2.

Для описания пучка удобно ввести функцию

$$q(z)\exp(-i\varphi(z)). \tag{9.1.1}$$

Параметр $q(z)$ является комплексным радиусом пучка и определяется совпадающим с (6.7.5) соотношением

$$\frac{1}{q(z)}=\frac{1}{R(z)}-i\frac{\lambda}{\pi\rho^2(z)n}, \tag{9.1.2}$$

[1] Мазер — термин из первых букв полного английского названия: microwave amplification by the stimulated emission of radiation. — *Прим. ред.*

[2] Лазер — термин, составленный из первых букв фразы light amplification by the stimulated emission of radiation. — *Прим. ред.*

а множитель $\exp[-i\varphi(z)]$ — это комплексная амплитуда волны в точке z. Комплексную величину φ представим в виде $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$, так что интенсивность поля в точке z относится к интенсивности в точке $z = 0$ как $\exp[2\varphi_i(z)]$, а соответствующее изменение фазы оказывается равным $-\varphi_r(z)$.

Прохождение гауссова пучка через некоторый оптический элемент, отмеченный индексом s, описывается приведенным выше уравнением (6.7.6)

$$q_2 = (A_s q_1 + B_s)/(C_s q_1 + D_s), \tag{9.1.3}$$

которое преобразуется к виду

$$q_2 e^{-i\varphi_s} = \frac{A_s q_1 + B_s}{C_s q_1 + D_s} e^{-i(\varphi_s + \varphi_1)}, \tag{9.1.4}$$

где $\exp(-i\varphi_s)$ — коэффициент осуществляемого s-м элементом преобразования комплексной амплитуды. Оптический элемент теперь характеризуется матрицей A, B, C, D и, кроме того, коэффициентом преобразования $\exp(-i\varphi)$.

Из выражений (6.6.13) и (6.6.14) можно найти, что для слоя однородной среды, ограниченного плоскостями z_1 и z_2,

$$\varphi_{\text{сдн}} = k'(z_2 - z_1) - \left[(l + m + 1)\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0} - \operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0}\right)\right]. \tag{9.1.5}$$

Здесь k' — комплексная постоянная распространения, определяемая формулой (8.2.4).

Сферическое зеркало, матрица A, B, C, D которого приведена в табл. 6.1, имеет коэффициент преобразования $r\exp(-i\varphi_m)$, где $|r|^2$ — коэффициент отражения по мощности и φ_m — фазовый сдвиг, возникающий при отражении.

Результат последовательного прохождения гауссова пучка через N оптических элементов, выраженный соотношением (6.7.9), можно представить в следующей форме:

$$q_{\text{вых}} \exp(-i\varphi_{\text{вых}}) = (Aq_{\text{вх}} + B)/(Cq_{\text{вх}} + D), \tag{9.1.6}$$

где A, B, C, D — элементы произведения нескольких A_s, B_s, C_s, D_s-матриц.

Применим этот формализм к выводу условия генерации лазера. Рассмотрим резонатор, изображенный на рис. 9.1. Он состоит из двух зеркал с коэффициентами отражения по амплитуде $r_1 \times \exp(-i\varphi_{m1})$ и $r_2\exp(-i\varphi_{m2})$ соответственно. Резонатор заполнен усиливающей средой, которая характеризуется комплексной постоянной распространения k'.

Проследив эволюцию генерируемого гауссова пучка за один полный обход резонатора, получаем

$$q_5 e^{-i\varphi_5} = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} e^{i(\varphi_1 + \varphi)}. \tag{9.1.7}$$

Используя (9.1.5), (9.1.6) и полагая $l = m = 0$, получаем

$$e^{-i\varphi} = e^{-i2[k'L - \operatorname{arctg}(z_2/z_0) + \operatorname{arctg}(z_1/z_0)]} r_1 r_2 e^{-i(\varphi_{m1} + \varphi_{m2})}. \tag{9.1.8}$$

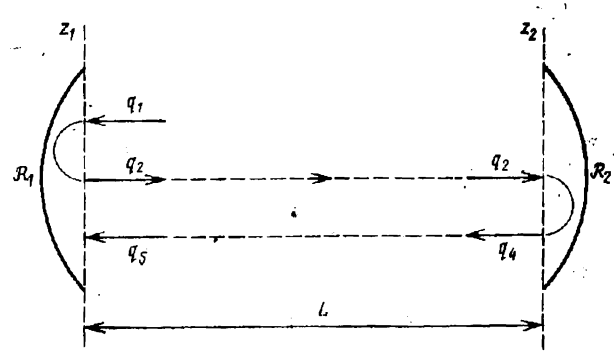


Рис. 9.1. Распространение гауссова пучка с комплексным радиусом q в прямом и обратном направлениях по оптическому резонатору, заполненному активной средой.

Коэффициенты отражения зеркал по интенсивности $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ связаны с коэффициентами отражения по амплитуде r_1 и r_2 соотношениями $\mathcal{R}_1 = r_1^2$ и $\mathcal{R}_2 = r_2^2$

Потребуем, чтобы форма пучка, а также его комплексная амплитуда воспроизводились после каждого обхода резонатора. Это имеет место, когда

$$q_5 = q_1, \qquad \varphi_5 = \varphi_1 + 2\pi m, \tag{9.1.9}$$

где m — целое число. Первое из условий, выполняющееся в случае $q_1 = (Aq_1 + B)/(Cq_1 + D)$, использовалось еще в § 7.2 для нахождения q_1. Второе условие удовлетворяется, если $\exp(-i\varphi) = \exp(-i2\pi m)$ или, с учетом (9.1.8)

$$e^{-i2\,[k'L - \operatorname{arctg}(z_2/z_0) + \operatorname{arctg}(z_1/z_0)]}\, r_1 r_2\, e^{-i\,(\varphi_{m1} + \varphi_{m2})} = e^{-i2\pi m}. \tag{9.1.10}$$

Это и есть условие генерации лазера, соответствующее интуитивному представлению о том, что при стационарной генерации амплитуда и фаза поля принимают одни и те же значения после каждого прохода пучка по резонатору. Это обстоятельство будет использовано ниже для определения пороговой плотности инверсии, а также частоты генерации.

Пороговая инверсия. Пороговое усиление находится из уравнения

$$|\exp(-i\varphi)| = 1, \tag{9.1.11}$$

которое возникает в результате приравнивания друг другу модулей обеих частей (9.1.10). Равенство (9.1.11) означает, что после полного цикла обхода резонатора амплитуда пучка совпадает с исходным значением. Используя (9.1.10), его можно переписать в виде

$$|\exp(-i2k'L)\, r_1 r_2| = 1. \tag{9.1.12}$$

Комплексная постоянная распространения k' на основании формулы (8.2.4) запишется как

$$k' = k\left[1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2}\right] - ik\,\frac{\chi''(\nu)}{2n^2} - i\,\frac{\alpha}{2}, \tag{9.1.13}$$

где α — коэффициент, учитывающий все виды распределенных потерь. Лазерный переход описывается слагаемыми, содержащими $\chi'(\nu)$ и $\chi''(\nu)$.

Согласно (9.1.13) показатель усиления среды определяется выражением

$$\gamma = -k\chi''(\nu)/n^2. \tag{9.1.14}$$

Таким образом, условие генерации приобретает вид

$$\exp\left[(\gamma_{\text{пор}} - \alpha)\, L\right] r_1 r_2 = 1 \tag{9.1.14а}$$

или

$$\gamma_{\text{пор}} = \alpha - L^{-1} \ln r_1 r_2, \tag{9.1.15}$$

где $\gamma_{\text{пор}}$ — пороговое значение.

Можно использовать (8.4.4), чтобы превратить (9.1.15) в условие для пороговой плотности инверсии в центре линии

$$\Delta N_{\text{пор}} = (N_2 - N_1 q_2/q_1)_{\text{пор}} = \frac{8\pi n^2 t_{\text{сп}}}{g(\nu_0)\lambda^2}\left(\alpha - \frac{1}{L}\ln r_1 r_2\right) = \frac{8\pi n^2 t_{\text{сп}}\Delta\nu}{\lambda^2}\left(\alpha - \frac{1}{L}\ln r_1 r_2\right), \tag{9.1.16}$$

где $\Delta\nu = 1/g(\nu_0)$ — ширина линии усиления. Используя выражение из § 7.4 для постоянной времени релаксации поля в резонаторе $t_c^{-1} = (c/n)[\alpha - (1/L)\ln r_1 r_2]$, можно записать (9.1.16) в часто встречающейся форме:

$$\Delta N_{\text{пор}} = \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{\text{сп}}}{c^3 t_c q(\nu_0)} = \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{\text{сп}}\Delta\nu}{c^3 t_c}. \tag{9.1.16а}$$

Пример.

Инверсия в He—Ne *лазере*. Оценим по порядку величины пороговую инверсию в He—Ne лазере, работающем на $\lambda = 0{,}6328$ мкм. Подставив $\Delta\nu \approx [g(\nu_0)]^{-1} \approx 1{,}5 \cdot 10^9$ Гц, $\alpha = 0$; $r_1 r_2 \approx 0{,}98$; $t_{\text{сп}} \approx 10^{-7}$ с и $L = 10$ см в (9.1.16), находим $(N_2 - N_1 q_2/q_1)_{\text{пор}} \approx \approx 1{,}9 \cdot 10^9$ см$^{-3}$.

В твердотельных лазерах сочетание более широких линий с большими временами спонтанного распада приводит к гораздо более высокому значению пороговой инверсии. Типичное значение инверсии в лазере на рубине ($Al_2O_3 : Cr^{3+}$) составляет 10^{17} см$^{-3}$, как это следует из примера в § 10.2.

Частота генерации. Частота генерации находится приравниванием фаз обеих частей (9.1.10). Следовательно, набег фазы за полный обход резонатора равен $2\pi m$, где m — целое число,

$$\frac{\omega n}{c} L\left[1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2}\right] - \operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0} + \operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0} + \frac{\varphi_{m1} + \varphi_{m2}}{2} = m\pi. \tag{9.1.17}$$

Резонансная частота «холодного» ($\chi = 0$) резонатора, отмеченная индексом m, находится из (9.1.17) подстановкой $\chi' = 0$:

$$\nu_m = \frac{mc}{2nL} + \frac{c}{2\pi nL}\left(\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_0} - \operatorname{arctg}\frac{z_1}{z_0} - \frac{\varphi_{m1} + \varphi_{m2}}{2}\right). \tag{9.1.18}$$

Используя это, перепишем (9.1.17) в виде

$$\nu\,[1 + \chi'(\nu)/2n^2] = \nu_m. \qquad (9.1.19)$$

Из (8.1.19) вытекает, что $\chi'(\nu) = 2(\nu_0 - \nu)\,\chi''(\nu)/\Delta\nu$ и из (9.1.14) $\gamma(\nu) = -k\chi''(\nu)/n^2$. В связи с этим (9.1.19) приобретает вид

$$\nu\left[1 - \frac{\nu_0 - \nu}{\Delta\nu}\,\frac{\gamma_{\text{пор}}(\nu)}{k}\right] = \nu_m. \qquad (9.1.20)$$

Предвидя, что ν окажется гораздо ближе к ν_m, чем к ν_0, заменим в (9.1.20) $\gamma_{\text{пор}}(\nu)$ на $\gamma_{\text{пор}}(\nu_m)$. Благодаря этому $\nu \approx \nu_m - (\nu - \nu_0)\,c\gamma_{\text{пор}}(\nu_m)/2\pi n\Delta\nu$. Пороговое усиление $\gamma_{\text{пор}}(\nu_m)$ рассчитывается по формуле (9.1.15), и поэтому $\nu \approx \nu_m - (\nu_m - \nu_0)\,c\,[\alpha - \frac{1}{L}\ln(r_1 r_2)]/2\pi n\Delta\nu$, а с учетом (7.4.6)

$$\nu \approx \nu_m - (\nu - \nu_0)\,(\Delta\nu_{0,5}/\Delta\nu), \qquad (9.1.21)$$

где $\Delta\nu_{0,5}$ — ширина резонансной кривой «холодного» резонатора.

Если частота атомного перехода ν_0 не совпадает с частотой резонатора ν_m, то частота генерации будет согласно (9.1.21) сдвинута от ν_m по направлению к ν_0. Это явление носит название «затягивания частоты». Обычно $\Delta\nu_{0,5} \ll \Delta\nu$ и частота генерации близка к ν_m.

Пример.

Затягивание частоты в He—Ne *лазере.* Воспользуемся следующими значениями параметров He—Ne лазера, работающего на $\lambda = 0{,}6328$ мкм: $L = 30$ см; $\mathcal{R} = 0{,}99$; $\Delta\nu = 1{,}5 \times 10^9$ Гц; $\alpha \approx 0$. По формуле (7.4.16) $\Delta\nu_{0,5} = 1{,}6 \cdot 10^6$ Гц, поэтому $\Delta\nu_{0,5}/\Delta\nu \approx 10^{-3}$. Если ν_m и ν_0 отличаются на 10^8 Гц, частота генерации будет затянута на $10^8 \times 10^{-3} = 10^5$ Гц от ν_m. Это малый, однако для некоторых приложений вполне заметный эффект.

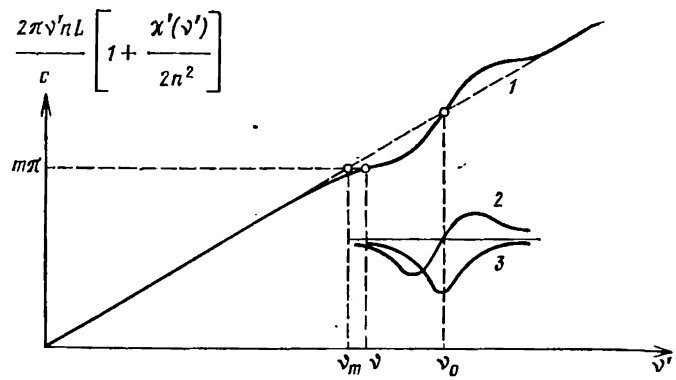


Рис. 9.2. Эффект затягивания частоты генерации лазера.

Видно, что резонансная дисперсия активной среды $\chi'(\nu')$ смещает частоту генерации ν от значения, соответствующего холодному резонатору, к частоте квантового перехода *1* — зависимость для холодного резонатора $[\chi'(\nu')=0]$; *2* — дисперсионная кривая активной среды; $\chi'(\nu')$; *3* — контур усиления активной среды, $\chi''(\nu')$

Графическое решение уравнения (9.1.17), выражающего условие генерации, представлено на рис. 9.2. Для этого случая положим в (9.1.17) $z_2/z_0 \approx 0$, $z_1/z_0 \approx 0$ и $\varphi_{m1} + \varphi_{m2} \approx 0$. Учет этих малых членов приводит к слабому смещению частоты резонатора ν_m, который в первом приближении не влияет на результаты.

9.2. Лазер в режиме генерации

При выводе условия генерации через соотношение (9.1.10) предполагалось, что лазер генерирует гауссов пучок. Это справедливо для большинства лазеров. В настоящем разделе будет развит более общий подход, который выявляет фундаментальные свойства лазерной генерации, не зависящие от геометрии.

Рассмотрим модель обобщенного резонатора, содержащего активную среду. Предположим, что генерация осуществляется на некоторой моде резонатора, отмеченной индексом l. Электрическое поле этой моды $\mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t)$ создает в активной среде поляризацию $\mathbf{P}_l(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t)$. Входящая сюда восприимчивость χ определяется по формуле (8.1.9). Цикл замкнется, если поляризация $\mathbf{P}_l(\mathbf{r}, t)$, действуя как возбуждающий источник, будет поддерживать генерируемое поле $\mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t)$. Такой подход сложился под влиянием самосогласованной теории газового лазера, разработанной Лэмбом [7][1]. Его идею поясняет рис. 9.3.

Разложение поля в резонаторе по модам

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_a -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} p_a(t)\, \mathbf{E}_a(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_a q_a(t)\, \mathbf{H}_a(\mathbf{r}), \tag{9.2.1}$$

где

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_a = k_a \mathbf{E}_a, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_a = k_a \mathbf{H}_a, \tag{9.2.2}$$

было выполнено в § 5.5. Поскольку внутри резонатора лазера находится активная среда и, следовательно, имеется распределенный источник $\mathbf{P}_{\text{рез}}(\mathbf{r}, t)$, уравнения Максвелла в этой области записываются следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{нрез}} + \mathbf{P}_{\text{рез}}) = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{\text{рез}},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{9.2.3}$$

---

[1] Описываемый ниже самосогласованный подход сложился в полуклассической теории квантовых генераторов раньше, чем была опубликована цитируемая работа Лэмба. Такой подход использовался, например, в работах [11, 12]. — *Прим. ред.*

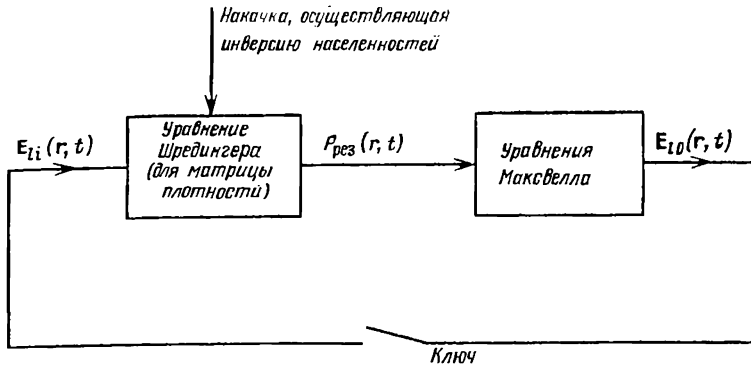


Рис. 9.3. Диаграмма, иллюстрирующая самосогласованный подход в теории лазера. Самосогласование достигается при замыкании цепи, когда $\mathbf{E}_{l0}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{li}(\mathbf{r}, t)$

Здесь σ — эффективная проводимость, введенная для учета потерь; ε — диэлектрическая проницаемость среды. Используя (9.2.1) и (9.2.2), можно получить из (9.2.3) уравнение

$$\sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_a q_a k_a \mathbf{E}_a = -\sigma \sum_a \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} p_a \mathbf{E}_a - \sum_a \sqrt{\varepsilon}\, \dot{p}_a \mathbf{E}_a + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{рез}(\mathbf{r}, t). \qquad (9.2.4)$$

Скалярно умножив (9.2.4) на $\mathbf{E}_l$, проинтегрировав по объему резонатора и применив условие ортогональности (5.5.1), приходим к уравнениям

$$\omega_l^2 q_l + \frac{\sigma}{\varepsilon} p_l + \dot{p}_l - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\mathbf{P}_{рез} \mathbf{E}_l)\, dv = 0, \qquad (9.2.5)$$

$$\omega_l^2 \dot{q}_l + \frac{\sigma}{\varepsilon} \dot{p}_l + \ddot{p}_l - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V (\mathbf{P}_{рез} \mathbf{E}_l)\, dv = 0. \qquad (9.2.6)$$

Из (9.2.1), (9.2.2) и (9.2.4) имеем $p_a = \dot{q}_a$, в результате чего (9.2.6) приобретает вид

$$\omega_l^2 p_l + \ddot{p}_l + \frac{\sigma}{\varepsilon} \dot{p}_l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V [\mathbf{P}_{рез}(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{E}_l(\mathbf{r})]\, dv. \qquad (9.2.7)$$

Это уравнение классического гармонического осциллятора с правой частью, представляющей источник возбуждения. Если этот источник отсутствует, решением (9.2.7) является

$$p_l(t) = p_l(0)\, e^{-t\omega_l [1 - (1/8)(\sigma^2/\omega_l^2 \varepsilon^2)]t} e^{-(\sigma/2\varepsilon)t}. \qquad (9.2.8)$$

Из этого выражения видно, что ω_l — резонансная частота в отсутствие потерь, а $\varepsilon/\sigma = t_c$ — постоянная времени, характеризующая скорость убывания энергии l-й моды в «холодном» резонаторе. Как следует из (7.4.5),

$$t_c = \varepsilon/\sigma = Q/\omega_l. \tag{9.2.9}$$

В высокодобротном резонаторе $p_l(t)$ не может быстро релаксировать, поэтому имеет смысл записать

$$p_l(t) = p_{l0}(t) \exp(i\omega t), \tag{9.2.10}$$

где $p_{l0}(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда, удовлетворяющая условию

$$\ddot{p}_{l0} \ll \omega \dot{p}_{l0}, \tag{9.2.11}$$

а ω — частота генерации лазера, подлежащая определению.

Подставляя (9.2.10) в (9.2.7) и отбрасывая на основе неравенства (9.2.11) член $\ddot{p}_{l0}$, приходим к уравнению генерации в адиабатической форме:

$$\left\{\left[(\omega_l^2 - \omega^2) + i\frac{\sigma\omega}{\varepsilon}\right] p_{l0}(t) + \left(2i\omega + \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\dot{p}_{l0}\right\} e^{i\omega t} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V (\mathbf{P}_{\text{рез}}\, \mathbf{E}_l)\, dv. \tag{9.2.12}$$

Для того, чтобы вывести пороговое условие генерации, можно положить, что только одна мода находится вблизи порога. В этом случае из (9.2.1) остается $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -(1/\sqrt{\varepsilon})\, p_l(t)\, \mathbf{E}_l(\mathbf{r})$ и в соответствии с (9.2.10) и (8.1.18)

$$\mathbf{P}_{\text{рез}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon}} \chi(\omega)\, p_{l0}\, e^{i\omega t}\, \mathbf{E}_l(\mathbf{r}). \tag{9.2.13}$$

Уравнение (9.2.12) определяет $p_{l0}(t)$ (т. е. поле) как функцию поляризации $\mathbf{P}_{\text{рез}}(\mathbf{r}, t)$. В (9.2.13), наоборот, поляризация является функцией поля. Условие генерации лазера находится в результате самосогласованного решения (9.2.12) и (9.2.13).

Ограничиваясь отысканием стационарного состояния $\dot{p}_{l0} = 0$, подставим (9.2.13) в (9.2.12) и заменим $\partial^2/\partial t^2$ на $-\omega^2$. В результате приходим к условию генерации лазера

$$(\omega_l^2 - \omega^2) + i\sigma\omega/\varepsilon = (\omega^2 \varepsilon_0 f/\varepsilon)(\chi' - i\chi''). \tag{9.2.14}$$

Здесь использовано обозначение $\chi = \chi' - i\chi''$ и с помощью соотношения $f = \int_{V_{\text{акт.ср.}}} (\mathbf{E}_l \mathbf{E}_l)\, dv$ введен коэффициент заполнения резонатора f. У равномерно заполненного резонатора $f = 1$, а в общем случае $f \leqslant 1$.

В качестве упражнения предлагается показать, что (9.2.14) полностью эквивалентно введенному ранее условию генерации (2.1.10).

9.3. Выходная мощность лазера

В предыдущих двух разделах рассмотрено пороговое условие генерации. Было получено выражение (9.1.16) для минимальной инверсии, необходимой для возникновения генерации. В настоящем параграфе обсуждается проблема преобразования избытка мощности накачки над пороговой в когерентное выходное лазерное излучение. В частности, будут получены выражения для выходной мощности лазера в зависимости от параметров активной среды, резонатора и накачки.

Скоростные уравнения. Анализ начнем с ознакомления с широко распространенной четырехуровневой энергетической схемой[1)], представленной на рис. 9.4. Лазерным является переход между уровнями $2 \to 1$. Уровень *0* соответствует основному состоянию системы. Полные времена жизни уровней *2* и *1* обозначены через t_1 и t_2 соответственно. Время жизни верхнего лазерного уровня определяется излучательным спонтанным переходом на уровень *1* с вероятностью $t_{сп}^{-1}$, безызлучательным переходом на уровень *1*, а также излучательными и безызлучательными переходами на другие уровни:

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{21}} + (\text{вероятность переходов на другие уровни}), \quad (9.3.1)$$

где

$$1/t_{21} = 1/t_{сп} + (1/t_{21})_{безызл}.$$

Плотности атомов на уровнях *1* и *2* обозначим через N_1 и N_2 соответственно, кратности вырождения уровней — через g_1 и g_2 и скорости накачки (атомов/с · м^3) — через R_1 и R_2. Накачка на нижней лазерный уровень нежелательна, поскольку она приводит к снижению усиления. Во многих случаях, например, при накачке свободными электронами или в результате химических реакций неко-

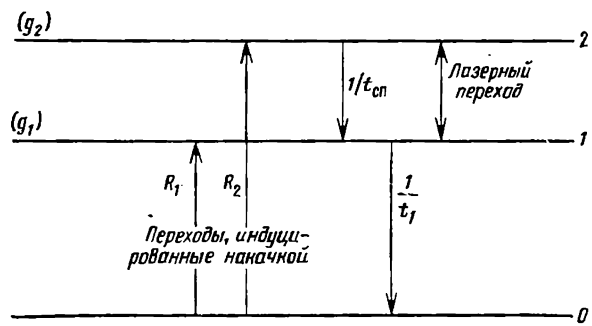


Рис. 9.4. Энергетическая диаграмма, поясняющая работу четырехуровневого лазера

0 — основное состояние, *1* — нижний лазерный уровень, *2* — верхний лазерный уровень

[1)] Название «четырехуровневый лазер» возникло благодаря тому, что в большинстве известных лазеров заселение верхнего рабочего уровня происходит через некоторое промежуточное состояние, не показанное на рис. 9.4.

торое заселение нижнего уровня неизбежно, и его необходимо учитывать при анализе работы лазера.

Воспроизведем полученные ранее выражения (8.3.9) и (8.3.10) для вероятностей индуцированных переходов между уровнями *1* и *2*

$$W_{2\to 1} \equiv W_{\text{инд}}(\nu) = \frac{\lambda^2 g(\nu)}{8\pi n^2 h\nu t_{\text{сп}}} I_\nu, \tag{9.3.2}$$

$$W_{1\to 2} = g_2 W_{\text{инд}}(\nu)/g_1. \tag{9.3.3}$$

Изменение населенностей уровней в спектрально-однородной среде в результате совместного действия накачки, спонтанных и индуцированных переходов описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 - \frac{N_2}{t_2} - \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right) W_{\text{инд}}(\nu), \tag{9.3.4}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 - \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_{21}} + \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right) W_{\text{инд}}(\nu).$$

Стационарное решение этих уравнений

$$\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 = \frac{R_2 t_2 - (R_1 + \psi R_2) t_1 g_2/g_1}{1 + [t_2 + (1-\psi) t_1 g_2/g_1] W_{\text{инд}}(\nu)}, \tag{9.3.5}$$

где

$$\psi = t_2/t_{21}. \tag{9.3.6}$$

Равновесное значение инверсии в отсутствие поля находится из (9.3.5) подстановкой $W_{\text{инд}}(\nu) = 0$:

$$\Delta N_0 = (N_2 - g_2 N_1/g_1)_0 = R_2 t_2 - (R_1 + \psi R_2)\, t_1 g_2/g_1. \tag{9.3.7}$$

Используя последнее выражение, перепишем (9.3.5)

$$\Delta N = \Delta N_0/[1 + \Phi t_{21} W_{\text{инд}}(\nu)], \tag{9.3.8}$$

$$\Phi = \psi\,[1 + (1-\psi)\, t_1 g_2/t_2 g_1]. \tag{9.3.9}$$

Вся сложная зависимость инверсии от скоростей релаксации и кратностей вырождения уровней содержится в Ф. Прежде чем записать окончательное выражение, рассмотрим простейшую идеализацию, когда $t_2 = t_{21}(\psi = 1)$ и $R_1 = 0$. В этом случае $\Delta N_0 = (N_2 - N_1 g_2/g_1) = R_2(t_2 - t_1 g_2/g_1)$, тогда усиление ($\Delta N_0 > 0$) имеет место, если

$$t_2 > t_1 g_2/g_1. \tag{9.3.10}$$

Отметим, что при $g_1 > g_2$ можно получить некоторое усиление ($\Delta N_0 > 0$) и в случае $t_2 < t_1$ (или $N_2 < N_1$), если выполнено условие (9.3.10). Объяснение очень простое: из (9.3.2) и (9.3.3) следует, что при $g_1 > g_2$ вероятность индуцированного перехода $2 \to 1$ превосходит вероятность обратного перехода $1 \to 2$.

Для подавляющего большинства лазеров условие $t_1 g_2/t_2 g_1 \ll 1$ выполняется с запасом. В таком случае $\Phi \approx \psi = t_2/t_{21}$ и (9.3.8) приобретает вид

$$\Delta N = \Delta N_0/[1 + t_2 W_{\text{инд}}(\nu)]. \tag{9.3.11}$$

Этим соотношением в дальнейшем будем пользоваться как основным при расчете выходной мощности лазера.

Выходная мощность и оптимальная связь. Рассмотрим соотношение между усилением и потерями в резонаторе лазера при наличии генерации. С помощью (9.3.11) выражение (8.4.4) можно привести к виду

$$\gamma = \gamma_0/[1 + t_2 W_{\text{инд}}(\nu)], \tag{9.3.12}$$

где

$$\gamma = \Delta N_0(\lambda^2/8\pi n^2 t_{\text{сп}})\, g\,(\nu).$$

В стационарном режиме усиление постоянно и не может превышать пороговую величину

$$\gamma_{\text{пор}} = \alpha - L^{-1}\ln r_1 r_2. \tag{9.3.12а}$$

Интенсивность генерируемого излучения дожна нарастать со временем, так как при $\gamma > \gamma_{\text{пор}}$ усиление за проход превышает потери. Если $\gamma < \gamma_{\text{пор}}$, возможно лишь затухание. Следовательно, в режиме стационарной генерации $\gamma = \gamma_{\text{пор}}$. Подставив $\gamma = \gamma_{\text{пор}}$ в (9.3.12) и разрешив это соотношение относительно $W_{\text{инд}}(\nu)$, получим в случае превышения порога

$$W_{\text{инд}}(\nu) = \frac{1}{t_2}\left(\frac{\gamma_0 L}{\alpha L - \ln r_1 r_2} - 1\right). \tag{9.3.13}$$

Полная мощность, вынужденно излучаемая атомами, оказывается равной $\mathcal{P}_{\text{изл}} = \Delta N h\nu V_m W_{\text{инд}}$, где V_m — объем, занимаемый модой. Инверсная плотность ΔN выше порога остается равной пороговой величине (9.1.16)

$$\Delta N_{\text{пор}} = \frac{8\pi n^2 t_{\text{сп}}}{g\,(\nu_0)\,\lambda^2}\left(\alpha - \frac{1}{L}\ln r_1 r_2\right) = \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{\text{сп}}}{c^3 t_c\, g\,(\nu_0)}, \tag{9.3.14}$$

поскольку $\Delta N \sim \gamma$, а последняя величина в режиме стационарной генерации стабилизируется на уровне $\gamma_{\text{пор}}$. Мощность вынужденного излучения атомов в надпороговом режиме работы лазера оказывается равной

$$\mathcal{P}_{\text{изл}} = \Delta N_{\text{пор}} h\nu V_m W_{\text{инд}} =$$
$$= \frac{[8\pi n^2 hc\,(V_m/L)\,(\alpha L - \ln r_1 r_2)}{g\,(\nu_0)\,\lambda^3 t_2/t_{\text{сп}}}\left(\frac{\gamma_0 L}{\alpha L - \ln r_1 r_2} - 1\right). \tag{9.3.15}$$

Выясним роль параметров, входящих в эту формулу. Возьмем, например, лазер с малым коэффициентом усиления и одинаково хорошо отражающими зеркалами $r_1 = r_2 \approx 1$. Тогда $-\ln r_1 r_2 \approx \approx \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} = (1 - \mathcal{R})$ — коэффициент прохождения сквозь зеркало. В этом случае $-\ln r_1 r_2$ — доля мощности, выводящаяся из резонатора наружу. В том же пределе αL представляет относительные потери, а $\gamma_0 L$ — относительное усиление за проход. Упростим несколько систему обозначений, введя: $\alpha L = \Pi$ — потери внутри резонатора; $-\ln r_1 r_2 = \mathcal{T}$ — коэффициент связи резонатора со свободным пространством; $\gamma_0 L = g_0$ — ненасыщенное усиление за проход.

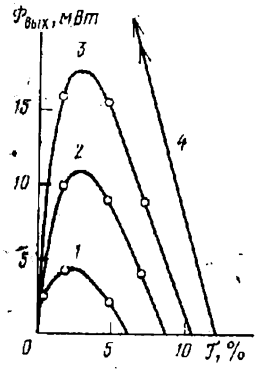


Рис. 9.5. Зависимость выходной мощности гелий-неонового лазера, генерирующего на 0,6328 мкм, от коэффициента пропускания зеркала при различных уровнях потерь в резонаторе

1 — П=6%; *2* — П=3,5%; *3* — П=1,7%; *4* — П=0. Все кривые относятся к g_0=12. Графики взяты из работы [8]

В этих обозначениях выходная мощность лазера запишется как

$$\mathcal{P}_{вых} = \mathcal{P}_{изл} \frac{\mathcal{T}}{П+\mathcal{T}} \times$$

$$\times \frac{8\pi n^3 hcA}{g(\nu_0)\lambda^3 t_2/t_{сп}} \left(\frac{g_0}{П+\mathcal{T}} - 1\right)\mathcal{T}, \quad (9.3.16)$$

где $A = V_m/L$ — площадь поперечного сечения моды.

Максимум выходной мощности $\mathcal{P}_{вых}$ достигается при

$$\mathcal{T}_{опт} = -П + \sqrt{g_0 П}. \quad (9.3.17)$$

Оптимальная величина выходной мощности находится подстановкой (9.3.17) в (9.3.16):

$$(\mathcal{P}_{вых})_{опт} = \frac{8\pi n^3 hcA}{g(\nu_0)\lambda^3 t_2/t_{сп}} (\sqrt{g_0} - \sqrt{П})^2 = 2I_{нас} A (\sqrt{g_0} - \sqrt{П})^2, \quad (9.3.18$$

где $I_{нас}$ — насыщающая интенсивность, определяемая (8.7.5).

Рассчитанные по формуле (9.3.16) графики зависимости $\mathcal{P}_{вых}$ от $\mathcal{T}$ для различных значений П, фигурирующих в качестве параметра, представлены на рис. 9.5. На рисунке точками отмечены экспериментальные значения выходной мощности He—Ne лазера, генерирующего на $\lambda = 0{,}6328$ мкм [8]. Отметим, что g_0 определяется пересечением кривой $П = 0$ с осью $\mathcal{T}$ и равна в данном случае 12%. Существование оптимального значения коэффициента связи, соответствующего максимуму выходной мощности, для каждого значения П очевидно.

Рассмотрим также зависимость энергии, запасенной в резонаторе лазера, от коэффициента связи $\mathcal{T}$. Энергия оказывается пропорциональной отношению $\mathcal{P}_{вых}/\mathcal{T}$. Графики зависимости $\mathcal{P}_{вых}$ (перенесен с рис. 9.5) и $\mathcal{E} \sim \mathcal{P}_{вых}/\mathcal{T}$ от $\mathcal{T}$ приведены на

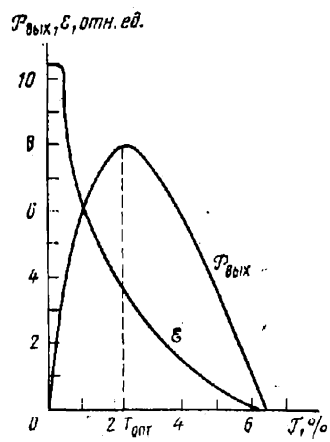


Рис. 9.6. Выходная мощность и запасенная энергия $\mathcal{E}$ в зависимости от коэффициента пропускания зеркала (П=5,5%, g_0=12%)

рис. 9.6. Как и следовало ожидать, $\mathcal{E}$ оказывается монотонно убывающей функцией коэффициента связи $\mathcal{T}$.

Влияние спонтанного излучения. При рассмотрении вопроса о выходной мощности лазера в расчет принималось только вынужденное излучение атомов. Из формулы (9.3.16) следует, что выходная мощность на пороге генерации ($g_0 = \Pi + \mathcal{T}$) равна нулю. Точные измерения, однако, показывают, что выходная мощность лазера отлична от нуля при любом уровне накачки и что различие мощности, излучаемой в подпороговом и надпороговом режимах работы лазера, не столь резкое, как это можно заключить на основе (9.3.16). Такое несоответствие возникло из-за пренебрежения спонтанным излучением.

В рамках данного рассмотрения невозможно отделить индуцированную составляющую излученной мощности от спонтанной, как это будет ясно из гл. 13. Рискуя чрезмерно упростить модель, представим некоторые соображения, приводящие к правильным результатам для излучаемой мощности. Более тонкие аспекты спектрального подхода будут изложены в гл. 13.

При некотором уровне накачки полная мощность, излучаемая атомами, помимо составляющей, обусловленной индуцированным излучением и выражаемой формулой (9.3.16), содержит вклад, связанный со спонтанным излучением

$$\mathcal{P}_{\text{сп}} = K N_2 h\nu / t_{\text{сп}}, \tag{9.3.19}$$

где N_2 — плотность атомов, находящихся на верхнем уровне; K — некоторая постоянная. Предположим теперь, что $N_2 \infty \Delta N$[1]. Следовательно, для рассматриваемого лазера

$$\mathcal{P}_{\text{сп}} = K \Delta N, \tag{9.3.20}$$

где K — новая постоянная. Полная мощность, излучаемая в некоторую моду, является суммой мощностей индуцированного и спонтанного излучения

$$\mathcal{P}_{\text{изл}} = \Delta N h\nu V_m W_{\text{инд}} + K\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + W_{\text{инд}} t_2} (h\nu V_m W_{\text{инд}} + K). \tag{9.3.21}$$

Здесь использована формула (9.3.11) для ΔN. Постоянную K можно определить из следующего соотношения, являющегося следствием (8.3.4): отношение вероятности индуцированного излучения в одну моду к вероятности спонтанного излучения в одну моду равно

$$h\nu V_m W_{\text{инд}} / K = n_m,$$

где n_m — число квантов в моде. В результате находим

$$K = h\nu c^3 / (8\pi n^3 \nu^2 \Delta\nu t_{\text{сп}}), \tag{9.3.22}$$

где $\Delta\nu = g(\nu_0)^{-1}$. Вывод выражения (9.3.22) предлагается провести в качестве упражнения.

[1] Это, согласно (9.3.5), допустимо при $t_1 \ll t_2$.

Рассмотрим два основных режима работы лазера.

1. *Лазер ниже порога генерации.* Используем определение порога, выражаемое соотношением (9.1.15),

$$\gamma_{\text{пор}} L = \alpha L - \ln r_1 r_2.$$

Тогда из (9.3.13) $W_{\text{инд}} = 0$. Учитывая это обстоятельство в (9.3.21), приходим к следующему выражению для мощности излучения лазера ниже порога самовозбуждения:

$$(\mathscr{P}_{\text{изл}})_{\substack{\text{ниже порога}\\ \text{в одну моду}}} = \Delta N K = \Delta N_0 V_m h\nu / t_{\text{сп}} p, \qquad (9.3.23)$$

где

$$p = 8\pi\nu^2 \Delta\nu n^3 V_m / c^3. \qquad (9.3.24)$$

Таким образом, найдено, что полная мощность спонтанного излучения ниже порога генерации распределяется более или менее равномерно среди мод, частоты которых попадают в интервал $\Delta\nu$ вблизи ν_0.

С целью дальнейшего упрощения обратимся к выражению для пороговой инверсии (9.1.16 а). Оно позволяет переписать (9.3.23):

$$(\mathscr{P}_{\text{изл}})_{\substack{\text{ниже порога}\\ \text{в одну моду}}} = \frac{\Delta N_0 h\nu}{\Delta N_{\text{пор}} t_c} = \frac{g_0 h\nu}{(\Pi + \mathscr{T}) t_c}. \qquad (9.3.25)$$

Это соотношение показывает, что на пороге генерации ($\Delta N_0 = \Delta N_{\text{пор}}$) мощность спонтанного излучения соответствует запасенной энергии в один квант $h\nu$ на моду.

2. *Лазер выше порога генерации.* Теперь в выражении (9.3.21) следует считать $h\nu V_m W_{\text{инд}} \gg K$ и $\Delta N = \Delta N_{\text{пор}}$. Генерируемая мощность в данном случае является суммой мощности спонтанного излучения [определяемой формулой (9.3.25) с $\Delta N_0 = \Delta N_{\text{пор}}$] и мощности индуцированного излучения (9.3.15):

$$(\mathscr{P}_{\text{изл}})_{\substack{\text{выше порога}\\ (\Delta N_0 > \Delta N_{\text{пор}})}} = \frac{\Delta N_{\text{пор}} h\nu V_m}{t_2}\left[\frac{\Delta N_0}{\Delta N_{\text{пор}}} - 1\right] + \frac{h\nu}{t_c} = \frac{\Delta N_{\text{пор}} h\nu V_m}{t_2}\left[\frac{g_0}{\Pi + \mathscr{T}} - 1\right] + \frac{h\nu}{t_c}. \qquad (9.3.26)$$

Пренебрегая в последней формуле малым спонтанным членом $h\nu/t_c$, обнаруживаем в обоих выражениях для мощности, излучаемой как ниже порога (9.3.25), так и при превышении его (9.3.26), линейную зависимость от скорости накачки ΔN_0. Отношение углов наклона графиков кривых (9.3.26) и (9.3.25), соответствующих разным режимам, дается выражением

$$\frac{[d\mathscr{P}_{\text{изл}}/d(\Delta N_0)]_{\text{выше порога}}}{[d\mathscr{P}_{\text{изл}}/d(\Delta N_0)]_{\text{ниже порога}}} = \frac{V_m t_c \Delta N_{\text{пор}}}{t_2} = \frac{8\pi\nu^2 n^3 \Delta\nu V_m}{c^3 t_2 / t_{\text{сп}}} = \frac{p}{t_2/t_{\text{сп}}}. \qquad (9.3.27)$$

Здесь использовали выражение (9.1.16 а) для $\Delta N_{\text{пор}}$ и (9.3.24) для p.

Интерпретация соотношения (9.3.27) весьма проста и интересна. Рассмотрим лазер, у которого $t_2 = t_{сп}$. В обоих режимах работы, как ниже порога, так и выше его, полная мощность накачки преобразуется в излучение. В недовозбужденном режиме ниже порога излучение распределяется по p модам (число их $p \gtrsim 10^8$) в соответствии со спектральной характеристикой перехода. Избыточная же накачка над порогом преобразуется в одну моду (речь идет об идеальном лазере на активной среде с однородно-уширенной линией).

Задав типичные значения величин: $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Гц; $\Delta\nu = 5 \cdot 10^9$ Гц; $V_m = 1$ см^3; $t_2 = t_{сп}$, получим $p \sim 4 \cdot 10^8$. Большой разницей в наклонах кривой объясняется тот факт, что экспериментальные ошибки в области ниже порога очень велики. Теоретическая зависимость, построенная на основе соотношений (9.3.25) и (9.3.26), представлена на рис. 9.7. Экспериментальный график зависимости выходной мощности от накачки приведен на рис. 9.8.

В дополнение к резкому излому зависимости излучаемой мощности от накачки имеются существенные различия в спектрах излучения, относящихся к различным режимам. Детально этот вопрос будет обсужден в гл. 13. Сейчас же, предвосхищая некоторые из результатов, будем считать, что ниже порога имеет место шумовой спектр, такой же как от широкополосного источника белого шума после

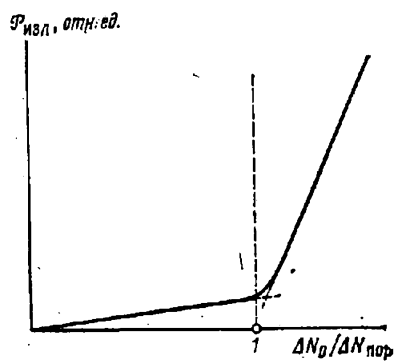


Рис. 9.7. Мощность $\mathcal{P}_{изл}$, отдаваемая атомами полю в резонаторе, как функция параметра накачки $\delta N = \Delta N_0/\Delta N_{пор}$.

Наклон кривой выше порога на много порядков больше, чем наклон кривой ниже порога генерации лазера. Для того чтобы на приведенном графике кривая ниже порога не слилась с осью абсцисс, ее наклон увеличен в 10^8 раз. Вертикальной штриховой прямой отмечен порог генерации

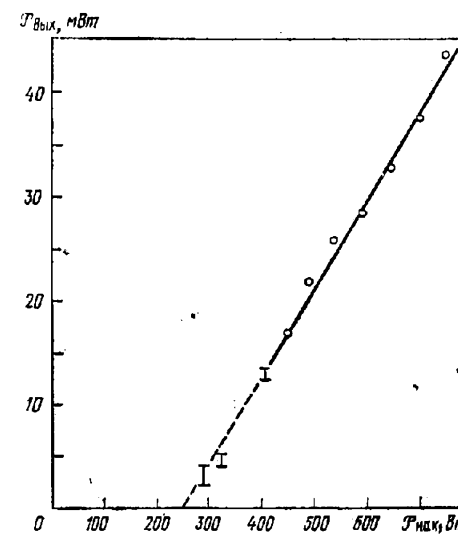


Рис. 9.8. График зависимости выходной мощности лазера непрерывного действия на $CaF_2 : U^{3+}$ с концентрацией 0,1% U от мощности, потребляемой ксеноновой лампой накачки.

Прозрачность зеркал на $\lambda = 2{,}51$ мкм равна 0,2% и соответствует связи значительно меньше критической. Рабочая температура кристалла 77 К

прохождения через лоренцев фильтр. Ширина полосы излучения лазера ниже порога генерации

$$(\Delta\nu_{\text{лаз}})_{\text{ниже порога}} = \frac{\pi h\nu\,(\Delta\nu_{0,5})^2}{\mathcal{P}_{\text{изл}}} \frac{N_2}{N_2 - N_1 g_2/g_1}, \qquad (9.3.28)$$

где $\Delta\nu_{0,5}$ — ширина кривой резонансного отклика «холодного» резонатора, описываемая (7.4.6), (7.4.7). Выше порога флуктуации интенсивности существенно ослабевают и шум обусловлен фазовыми флуктуациями в автоколебательной системе. Ширина спектра излучения лазера в этом случае

$$(\Delta\nu_{\text{лаз}})_{\text{выше порога}} = \frac{\pi h\nu\,(\Delta\nu_{0,5})^2}{\mathcal{P}_{\text{изл}}} \frac{N_{2\,\text{пор}}}{N_2 - N_1 g_2/g_1}. \qquad (9.3.29)$$

Гигантский рост $\mathcal{P}_{\text{изл}}$, сопровождающий даже небольшое превышение порога, проявляется так же, как это видно из (9.3.28) и (9.3.29), в виде резкого сужения спектра. Превышению порога на 10% ($\Delta N_0 = 1{,}1\,\Delta N_{\text{пор}}$) соответствует, например сужение спектра примерно в 10^8 раз (см. рис. 13.5).

Задачи

9.1. Выведите формулу (9.3.22).

9.2. Выясните влияние поперечной структуры моды на частоту генерации лазера. Сравните частоты генерации лазеров с одинаковой длиной резонатора, один из которых обладает конфокальной геометрией, а конфигурация другого характеризуется $z_0 \gg L$.

9.3. Покажите, что для резонатора Фабри—Перо, заполненного средой с восприимчивостью $\chi(\omega)$, межмодовый интервал равен

$$\omega_m - \omega_{m-1} = \pi c/nL \left[1 + \frac{\omega}{2n^2} \frac{\partial x'(\omega)}{\partial\omega}\right]_{\omega=\omega_m}.$$

9.4. Рассмотрите влияние резонансной дисперсии среды на групповую скорость распространения импульса при совпадении его несущей частоты с частотой перехода (*а*) в усиливающей среде, (*б*) в поглощающей среде.

9.5. Докажите эквивалентность выражений (9.2.14) и (9.1.12).

9.6. Получите формулу (9.3.5).

Глава 10

НЕКОТОРЫЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ ТИПЫ ЛАЗЕРОВ

В предыдущих главах были рассмотрены общие свойства атомных систем, взаимодействующих с электромагнитными полями. В этой главе мы познакомимся с использованием некоторых из них в качестве рабочих веществ лазеров. Детально рассмотрены такие способы инверсии населенностей, как оптическая накачка, электрический разряд, инжекция носителей.

10.1. Эффективность накачки и коэффициент полезного действия лазеров

На рис. 10.1 показан цикл «накачка—излучение» в некотором гипотетическом рабочем веществе лазера. Под действием накачки атомы переходят в возбужденное состояние на уровень *3*, с которого затем релаксируют на верхний лазерный уровень *2*. Стимулированный лазерный переход, в результате которого излучается

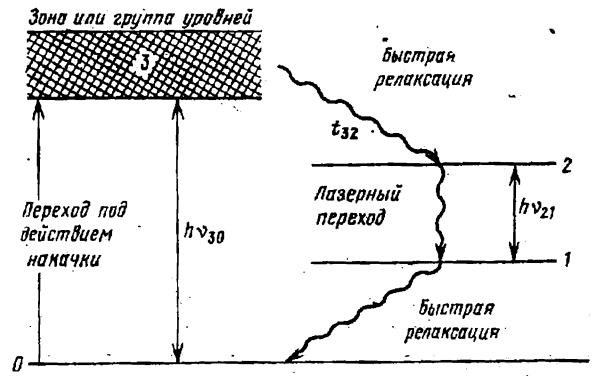


Рис. 10.1. Схема переходов в рабочем веществе, поясняющая работу лазера

фотон с частотой ν_{21} имеет место между уровнями *2* и *1*. Минимальная энергия фотона накачки равна $h\nu_{30}$. Поэтому к. п. д. лазера не может превосходить величину

$$\eta_{\text{атомн}} = \nu_{21}/\nu_{30}, \qquad (10.1.1)$$

которую будем называть «к. п. д. квантовой системы». Помимо этого, к. п. д. лазера зависит от доли энергии накачки, поглощаемой атомами и переводящей их на уровень *3*, а также от квантового выхода системы, определяемого долей атомов, которые переходят с уровня *3* на уровень *2*. Произведение двух последних величин определяет верхнюю границу к. п. д. лазеров с оптической накачкой, которая для твердотельных лазеров, таких как лазеры на YAG : Nd^{3+}, не превышает нескольких процентов. Для сравнения можно указать, что верхняя граница к. п. д. лазеров на CO_2 составляет примерно 30%, а для инжекционных лазеров на GaAs она приближается к 100%. Обсудим указанные факторы, когда перейдем к описанию конкретных типов лазеров. Заметим, что для эффективной работы лазера ν_{21} и ν_{30} согласно (10.1.1) должны быть одного порядка.

10.2. Лазер на рубине

Рубин стал первым материалом, на котором была получена лазерная генерация [1]. Он и по сей день остается одним из наиболее распространенных рабочих веществ. Длина волны излучения рубинового лазера 0,6943 мкм. Активными частицами в рубине

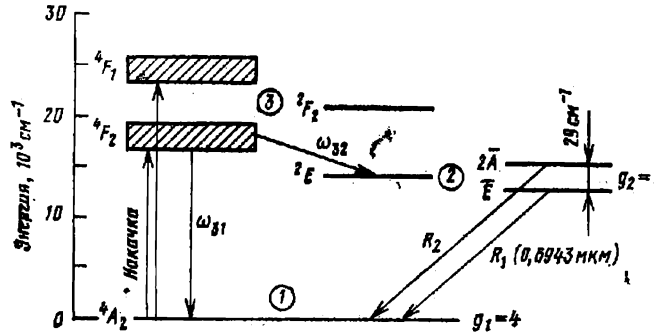


Рис. 10.2. Диаграмма энергетических уровней, имеющих отношение к работе рубинового лазера [2]

являются ионы Cr^{3+}, присутствующие как примесь в кристалле Al_2O_3. Типичная концентрация Cr^{3+} составляет 0,05% по весу. Диаграмма энергетических уровней рубина представлена на рис. 10.2.

Накачка рубина обычно осуществляется интенсивным излучением импульсных ламп, которые аналогичны лампам-вспышкам, применяемым в фотографии. Часть спектра излучения лампы, соответствующая полосам $^4F_2$ и $^4F_1$, поглощается в рубине, вызывая переход ионов Cr^{3+} на указанные уровни. Отсюда ионы релаксируют с постоянной времени $w_{32}^{-1} \approx 5 \cdot 10^{-8}$ с [2] на уровень ^2E. Уровень ^2E состоит из двух подуровней $2A$ и $\bar{E}$, которые от-

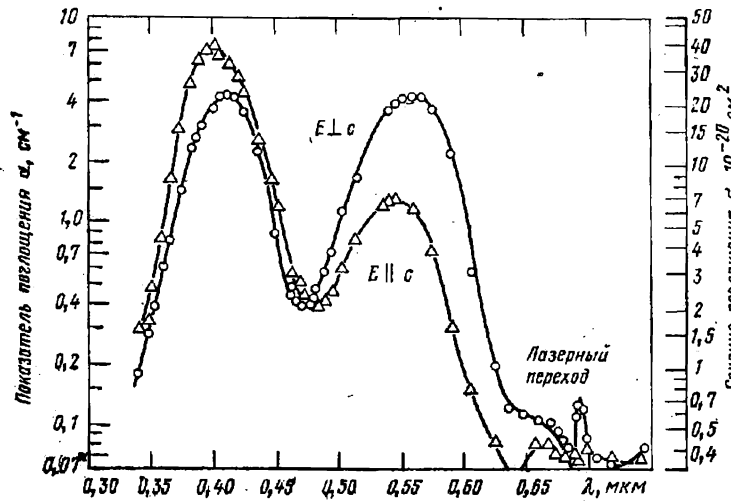


Рис. 10.3. Зависимости показателя поглощения и сечения поглощения рубина от длины волны для двух ориентаций вектора напряженности поля относительно оптической оси.

Данные приведены для розового рубина со средней концентрацией ионов Cr^{3+}, равной $1{,}86 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ при температуре 300 К [3]

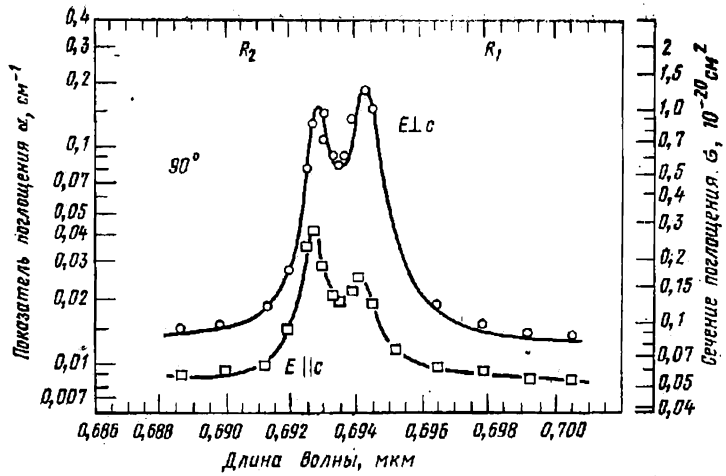


Рис. 10.4. Ход кривой показателя поглощения и сечения поглощения в окрестности рабочей длины волны рубинового лазера для двух ориентаций вектора напряженности поля волны.

Ось стержня розового рубина с концентрацией $1{,}58 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ Cr^{3+} перпендикулярна оси c [3]

стоят друг от друга на 29 см$^{-1}$[1]. Расположенный ниже подуровень $\bar{E}$ является верхним лазерным уровнем. Роль нижнего лазерного уровня играет основное состояние. Время жизни атомов на верхнем лазерном уровне $t_2 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ с. Релаксация атомов с уровня $\bar{E}$ происходит, главным образом, путем спонтанного излучения, благодаря чему $t_2 \approx t_{\text{спонт}}$.

На рис. 10.3. показаны спектры поглощения рубина для двух ориентаций вектора напряженности поля относительно оптической оси c. Два больших пика соответствуют полосам поглощения $^4F_2$ и $^4F_1$, благодаря которым рубин имеет характерную окраску. Сечение поглощения (σ) можно определить как отношение показателя поглощения (α) среды к разности населенностей в единице объема[2]. Согласно данному определению

$$\alpha(\nu) = (N_1 g_2/g_1 - N_2)\,\sigma(\nu). \qquad (10.2.1)$$

На рис. 10.4 в увеличенном масштабе показана часть кривой поглощения в окрестности рабочей длины волны рубинового лазера. Ширина $\Delta\nu$ линии лазерного перехода как функция температуры представлена на рис. 10.5. При комнатной температуре $\Delta\nu \approx 11$ см$^{-1}$.

[1] Единица измерения волнового числа 1 см$^{-1}$ соответствует $\lambda = 1$ см и $\nu = 3 \cdot 10^{10}$ Гц.

[2] Чаще встречается несколько иное определение (см., например, [57]), согласно которому сечение поглощения есть отношение мощности, поглощенной одним атомом, к потоку мощности через единицу площади. — *Прим. ред.*

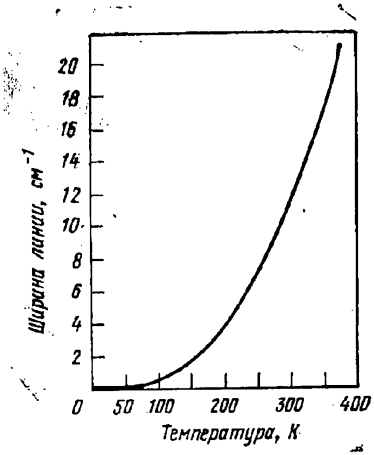


Рис. 10.5. Зависимость ширины линии ($\lambda = 0{,}6943$ мкм) от температуры [4]

На примере рубинового лазера можно продемонстрировать все характерные особенности твердотельных лазеров с оптической накачкой. Схема такого лазера изображена на рис. 10.6. Рубиновый стержень охвачен спиральной импульсной лампой. Вспышка происходит при разряде конденсаторной батареи через лампу. Вспышка представляет собой импульс света с типичной длительностью $t_{\text{вспыш}} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ с. Предположим для простоты, что импульс света имеет прямоугольную форму. Тогда световой поток через поверхность кристалла в течение $t_{\text{вспыш}}$ равен $s(\nu)$ [Вт/см^2 · Гц]. При коэффициенте поглощения кристалла, равном $\alpha(\nu)$, величина энергии, поглощенной единицей объема, составляет[1] $t_{\text{вспыш}} \int_0^\infty s(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu$. Если квантовый выход поглощения (вероятность того, что поглощение одного фотона частоты ν приведет к переходу атома на верхний лазерный уровень) равен $\eta(\nu)$, то число атомов в единице объема, переведенных накачкой на уровень 2,

$$N_2 = t_{\text{вспыш}} \int_0^\infty \frac{s(\nu)\,\alpha(\nu)\,\eta(\nu)}{h\nu}\,d\nu. \qquad (10.2.2)$$

Поскольку время жизни атомов на уровне 2 ($t_2 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ с) значительно больше длительности вспышки лампы ($t_{\text{вспыш}} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ с), можно пренебречь спонтанными переходами атомов с уровня 2 в течение всего импульса накачки. Следовательно, N_2 — это населенность уровня 2 по окончании вспышки.

Пример. Рассмотрим импульсную накачку рубинового лазера. Пусть возбуждается розовый рубин с плотностью ионов хрома $N_0 \approx 2 \cdot 10^{19}$ ионов/см^3 при длительности вспышки лампы $t_{\text{вспыш}} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ с. Чтобы оценить пороговую энергию накачки, необходимо знать пороговое значение инверсии населенностей. Зададимся следующими цифрами:

$\Delta\nu = 12$ см$^{-1}$; из рис. 10.5 при 300 К; $n = 1{,}77$; $t_2 \approx t_{\text{сп}} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ с; $\nu = 14{,}422$ см$^{-1}$; $g_2 = g(\bar{E}) = 2$; $g_1 = g(^4A_2) = 4$; $t_a = 10^{-8}$ с (для $l = 10$ см и потерь за один проход 0,04). Подставив эти данные в формулу (9.1.16а), находим $\Delta N_{\text{пор}} = (N_2 - N_1 g_2/g_1) = 10^{17}$ см$^{-3}$.

[1] Предполагаем, что поглощение в кристалле мало и поэтому берем $s(\nu)$ не зависящим от координат в объеме кристалла.

Используя соотношения $N(^4A_2)/N(\bar{E}) = \exp(-\Delta\mathscr{E}/kT) = 0{,}87$, $N(^4A_2) + N(\bar{E}) + N(2\bar{A}) = 2 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$, где $\Delta\mathscr{E} = 29$ см$^{-1}$, получим $N(2\bar{A}) = 0{,}454 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$, $N(\bar{E}) = 0{,}522 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$, $N(^4A_2) = 1{,}025 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$. Если полезное поглощение ограничено относительно узкой спектральной областью, то (10.2.2) можно аппроксимировать формулой

$$N_2 \approx \frac{t_{\text{вспыш}}\, \overline{s(\nu)}\, \overline{\alpha(\nu)}\, \overline{\eta(\nu)}\, \overline{\Delta\nu}}{h\bar{\nu}}. \qquad (10.2.3)$$

Черта здесь означает усреднение по спектральной области полезного поглощения, ширина которой равна $\overline{\Delta\nu}$.

Пользуясь рис. 10.3, можно вычислить средний для двух главных пиков показатель поглощения $\overline{\alpha(\nu)} = 2$ см$^{-1}$. Положив $\bar{\nu} = 5 \cdot 10^{14}$ Гц, $N_2 = N(2\bar{A}) + N(\bar{E}) = 10^{19}$ см$^{-3}$ и $\bar{\eta} \approx 1$, получим из (10.2.3) $s\Delta\nu t_{\text{вспыш}} \approx 1{,}5$ Дж/см^2. Такая энергия накачки в полосах полезного поглощения должна падать на каждый квадратный сантиметр поверхности кристалла, чтобы была достигнута пороговая инверсия. Для вычисления всей энергии излучения лампы необходимо знать ее спектральную характеристику. Данные о некоторых лампах приведены на рис. 10.7. Видно, что излучение ртутной лампы имеет интенсивные компоненты в области поглощения рубина, т. е. около 400 и 500 нм. Если принять для оценки, что 50% электрической энергии преобразуется лампой в оптическое излучение, 20% этого излучения попадает на поверхность кристал-

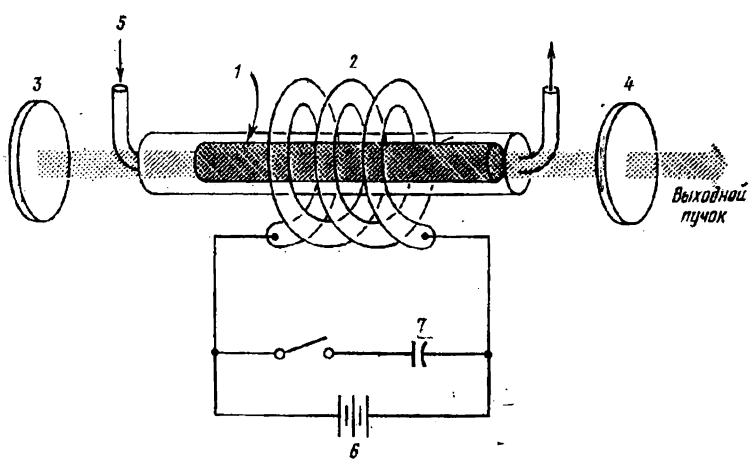


Рис. 10.6. Типичная схема импульсного рубинового лазера:
1 — рубиновый стержень; *2* — импульсная лампа; *3* — наружное глухое зеркало; *4* — наружное полупрозрачное зеркало; *5* — охлаждение; *6* — источник питания; *7* — батарея конденсаторов

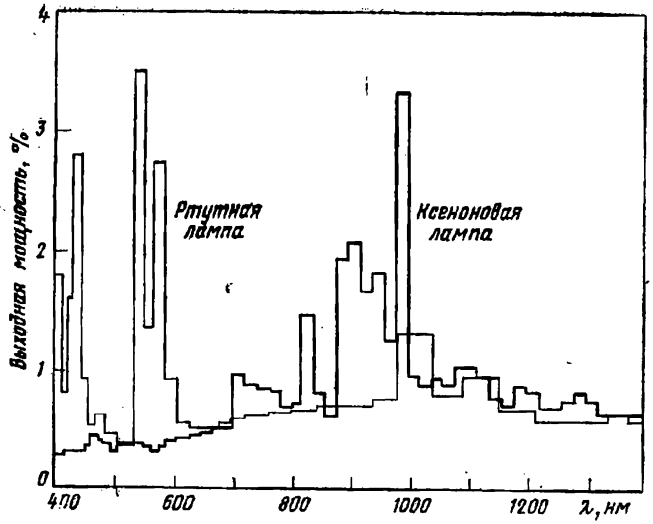


Рис. 10.7. Спектральные характеристики двух типов промышленных ламп высокого давления. Мощность излучения ламп в узких частотных интервалах (по 20 нм) дана в процентах к потребляемой электрической мощности [5]

ла и 10% составляет полезно поглощаемая спектральная компонента, то получим следующее пороговое значение электрической энергии на квадратный сантиметр поверхности активного элемента:

$$1{,}5/(0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}5) = 150 \text{ Дж/см}^2.$$

10.3. Лазер на кристалле YAG : Nd^{3+}

Алюмоиттриевый гранат (YAG-$Y_3Al_5O_{12}$) с примесью ионов неодима (Nd^{3+}) относится к числу важнейших лазерных активных сред [6, 7]. Лазер работает при комнатной температуре на длине волны $\lambda = 1{,}0641$ мкм. На рис. 10.8 показана диаграмма энергетических уровней кристалла YAG : Nd^{3+}. Нижний лазерный уровень отстоит от основного состояния на $\mathscr{E}_2 \approx 2111$ см$^{-1}$. Отличие его населенности от населенности основного состояния выражается множителем $\exp(-\mathscr{E}_2/kT) \approx e^{-10}$. В силу этого ею можно пренебречь и считать $N_2 \approx \Delta N$. Лазеры, использующие активную среду с подобными свойствами, обычно называют «четырехуровневыми».

Спектр спонтанного излучения, соответствующий лазерному переходу, представлен на рис. 10.9. При комнатной температуре ширина линии усиления $\Delta\nu \approx 6$ см$^{-1}$. Время спонтанного распада верхнего лазерного уровня, измеренное на опыте, составляет $t_{сп} = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ с [7]. Сечение индуцированного перехода на частоте центра линии при комнатной температуре $\sigma = 9 \cdot 10^{-19}$ см^2. Сравнение этого значения с $\sigma = 1{,}22 \cdot 10^{-20}$ см^2 для рубина показывает,

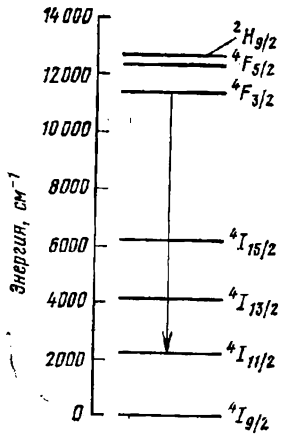


Рис. 10.8. Диаграмма энергетических уровней иона Nd^{3+} в кристалле алюмоиттриевого граната [6]

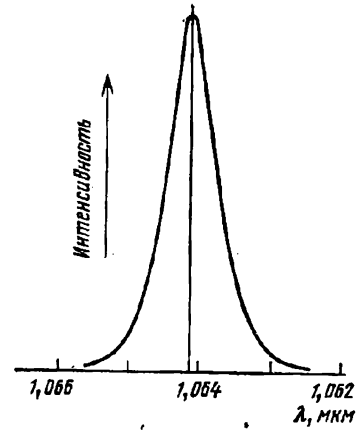


Рис. 10.9. Спектр спонтанного излучения Nd^{3+} в YAG в области лазерного перехода $\lambda = 1{,}064$ мкм [7]

что при одинаковой разности населенностей показатель усиления γ у граната примерно в 75 раз больше, чем у рубина. Это является причиной низкого порога генерации и объясняет, почему непрерывная генерация в лазере на YAG : Nd^{3+} достигается легче, чем в лазере на рубине[1].

Поглощение света накачки, приводящее к заселенности верхнего лазерного уровня, происходит в большом числе полос между 13000 и 25000 $см^{-1}$.

Пример. Рассмотрим порог генерации лазера на YAG : Nd^{3+}

а) *Импульсный режим.* Сначала оценим значение энергии, необходимой для возбуждения лазера в импульсном режиме, и сравним ее с аналогичной величиной для рубинового лазера. Зададим следующие значения параметров: $L = 20$ см (длина резонатора); $П = 4\%$ (потери за проход); $t_c = l/Пc = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ с; $n = 1{,}5$; $\lambda = 1{,}064$ мкм; $t_{сп} = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ с; $\Delta\nu = 6$ $см^{-1}$.

Подставив эти значения в (9.1.16), получим

$$N_{2пор} \approx \Delta N_{пор} = 8\pi n^2 t_{сп} \Delta\nu/(ct_c \lambda^2) = 1{,}03 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Для оценки будем считать, что 5% энергии накачки попадает в полосы полезного поглощения, 5% этого излучения действительно поглощается кристаллом, среднее значение отношения частоты генерации к частоте накачки равно 0,5 и к. п. д. лампы (оптический выход/электрический вход) составляет 0,5. Исходя из таких цифр, находим пороговую энергию на входе лампы

$$\mathscr{E}_{лампы} = N_{2пор} h\nu_{лазер}/(5 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2} \times 0{,}5 \times 0{,}5) \approx 0{,}31 \text{ Дж/см}^3.$$

[1] Правильнее сказать — одной из причин. Не менее существенно и то, что в алюмоиттриевом гранате с неодимом реализуется четырехуровневый вариант накачки, тогда как в рубине — трехуровневый. — *Прим. ред.*

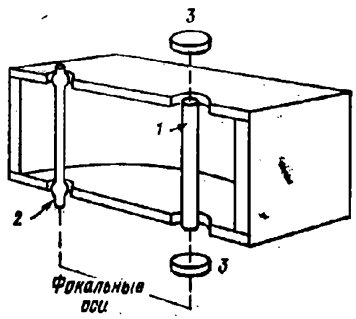


Рис. 10.10. Устройство твердотельного лазера непрерывного действия, в котором для концентрации света лампы в активном элементе используется эллиптический цилиндр:
1 — активный элемент; *2* — лампа накачки; *3* — зеркала резонатора

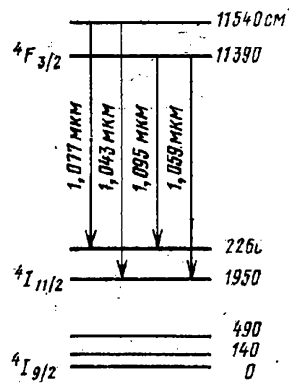


Рис. 10.11. Диаграмма энергетических уровней, включая основное состояние и уровни лазерного перехода с $\lambda = 1{,}059$ мкм, иона Nd^{3+} в рубидиево-кадмиево-бариевом силикатном стекле [8]

Для кристалла реальных размеров (длина 5 см, радиус 0,2 см) полная энергия на входе лампы на пороге генерации $\mathscr{E}_{\text{лампы}} \approx 0{,}2$ Дж.

Интересно сопоставить полученную цифру с пороговой энергией накачки рубинового лазера. В § 10.2 для рубина было найдено значение 150 Дж/см². Нетрудно подсчитать, что при одинаковых размерах активного элемента пороговая энергия накачки рубинового лазера более чем на три порядка выше, чем в случае лазера на YAG : Nd^{3+}.

б) *Непрерывный режим.* Минимальная мощность, необходимая для перевода $N_{2\text{пор}}$ атомов (в единице объема) на уровень *2* и достижения тем самым порога генерации, определяется как

$$\mathscr{P}_{\min} = N_{2\text{пор}} h\nu / t_2.$$

Для $t_2 \approx t_{\text{сп}}$ $\mathscr{P}_{\min} \approx N_{2\text{пор}} h\nu / t_{\text{сп}} \approx 0{,}35$ Вт/см³.

Взяв кристалл диаметром 0,25 см и длиною 3 см и использовав значения остальных параметров из примера (а), получим значение пороговой (электрической) мощности лампы

$$\mathscr{P}_{\text{вх лампы}} = \frac{0{,}35 \cdot (\pi/4)\,(0{,}25)^2 \cdot 3}{5 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2} \times 0{,}5 \times 0{,}5} \approx 82 \text{ Вт},$$

которая хорошо согласуется с экспериментальным значением [6].

Устройство твердотельного лазера непрерывного действия показано на рис. 10.10. Эллиптический цилиндр, поверхность которого отполирована с высокой чистотой, фокусирует свет лампы, расположенной вдоль одной из его фокальных осей, в активный элемент, который располагается вдоль другой фокальной оси. Эта конфигурация обеспечивает наиболее полное использование света лампы. Зеркала резонатора располагаются вне осветителя.

10.4. Лазер на неодимовом стекле

Стекло с примесью ионов неодима Nd^{3+} является одним из наиболее распространенных лазерных рабочих веществ [8]. На рис. 10.11 показана диаграмма энергетических уровней (включая лазерный переход) типичного неодимового стекла. Длина волны излучения 1,059 мкм. Нижний рабочий уровень находится приблизительно на 1950 $см^{-1}$ выше основного состояния. Неодимовое стекло, также как и YAG : Nd^{3+}, относится к числу четырехуровневых активных сред, поскольку тепловой заселенностью нижнего уровня можно пренебречь.

На рис. 10.12 показан спектр флуоресценции в области $\lambda = 1{,}06$ мкм. Ширина линии флуоресценции для стекол близка к 300 $см^{-1}$. Это в 50 раз больше ширины линии флуоресценции YAG : Nd^{3+}. Такое отличие обусловлено аморфной структурой стекла, благодаря которой различные ионы Nd^{3+} имеют слегка отличное окружение, что в свою очередь приводит к небольшому отличию в расщеплении их энергетических уровней. Следовательно, различные ионы излучают на несколько разных частотах, что вызывает уширение спектра спонтанного излучения. Полосы поглощения, используемые для накачки лазера, представлены на рис. 10.13. Вероятность того, что поглощение одного фотона в любой из этих полос приведет к переходу иона на верхний лазерный уровень (квантовый выход), равна примерно 0,4 [8].

Время жизни на верхнем лазерном уровне зависит от сорта стекла и концентрации ионов неодима. На рис. 10.14 показаны вариации времени жизни для двух сортов стекла.

Пример. Рассмотрим порог непрерывной и импульсной генерации лазеров на неодимовом стекле. Оценим вначале порог лазера непрерывного действия, используя при этом следующие данные: $\Delta\nu = 200\ см^{-1}$ (см. рис. 10.12); $n = 1{,}5$; $t_{сп} \approx t_2 = 3 \cdot 10^{-4}$ с;

$$\left.\begin{array}{l} L = 20\ см\ (длина\ резонатора) \\ П = 2\%\ (потери\ за\ проход) \end{array}\right\}$$

$$t_c \approx L/Пc = 3{,}3 \cdot 10^{-8}\ с.$$

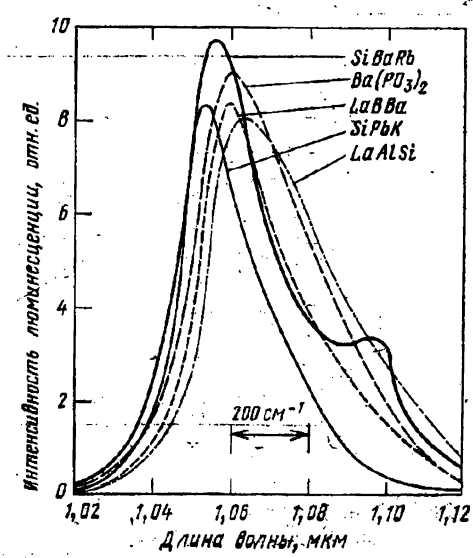


Рис. 10.12. Спектр люминесценции Nd^{3+} в различных стеклянных матрицах в области $\lambda = 1{,}06$ мкм при $T = 300$ К [8]

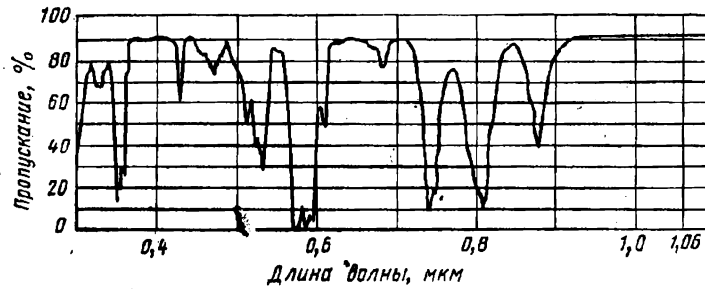


Рис. 10.13. Спектр поглощения Nd^{3+} в стекле. Толщина образца 6,4 мм. Состав стекла: 66% (по весу) SiO_2; 5% Nd_2O_3; 16% N_2O; 5% BaO; 2% Al_2O_3 и 1% Sb_2O_3 [8]. Выше $\lambda = 0{,}9$ мкм пропускание ограничено лишь френелевским отражением от торцов образца и достигает 92,2%

Основываясь на формуле (9.1.16), получим выражение для пороговой разности населенностей

$$N_{2\text{пор}} = \Delta N_{\text{пор}} = 8\pi t_{\text{сп}}\, n^2\, \Delta\nu/(ct_c\, \lambda^2) = 9 \cdot 10^{15} \text{ атомов/см}^3.$$

Мощность накачки кристалла объемом $V = 1$ см^3, минимально необходимая для достижения порога,

$$\mathcal{P}_{\min} \approx N_{2\text{пор}}\, h\nu V/t_{\text{сп}} = 5{,}6 \text{ Вт}.$$

Если предположить, что: а) только 10% излучения лампы приходится на спектральные полосы полезного поглощения; б) вследствие несовершенства осветителя и относительной прозрачности кристалла только 10% излучения лампы, которое приходится на полосы полезного поглощения, действительно поглощается; в) квантовый выход равен 40%; г) средняя частота излучения накачки в два

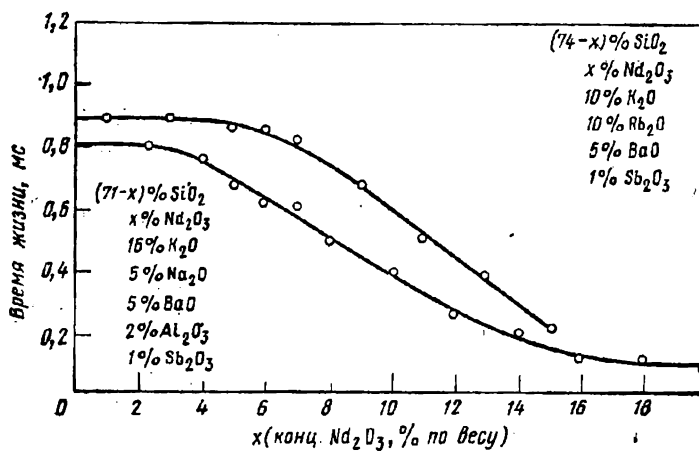


Рис. 10.14. Зависимость времени жизни на верхнем лазерном уровне от концентрации Nd_2O_3 для двух сортов стекла [8]. Состав стекла дан в процентах по весу

раза больше частоты генерации, то пороговое значение мощности излучения лампы оказывается равным

$$2 \times 5{,}6/(0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}4) = 2800 \text{ Вт}.$$

При эффективности преобразования электрической энергии в световую, равной 50%, для достижения порога непрерывной генерации необходима мощность около 5 кВт. Из сравнения полученного значения с аналогичной величиной для лазера на YAG : Nd^{3+}, которая равна примерно 100 Вт, становится понятным, почему лазеры на неодимовом стекле не применяются для работы в непрерывном режиме.

Рассмотрим импульсный лазер на стекле с неодимом, возбуждаемый лампой-вспышкой, и найдем минимальную энергию, обеспечивающую достижение порога генерации. Предположим, что потери, связанные, главным образом, с пропусканием зеркал, равны $\Pi = 20\%$[1]. Вычисления дают значение $N_{2\text{пор}} = 9 \cdot 10^{16}$ атомов/см^3. Энергия, необходимая для перевода $N_{2\text{пор}}$ атомов на уровень 2,

$$\mathscr{E}_{\min}/V = N_{2\text{пор}} h\nu = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/см}^3.$$

Взяв объем кристалла $V = 10$ см^3 и используя параметры из численного примера для непрерывного лазера находим, что пороговая энергия на входе лампы-вспышки равна $1{,}7 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10/0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 85$ Дж. Практически лазеры на неодимовом стекле с указанными в численном примере параметрами достигают порога при энергии в 150 ... 300 Дж.

10.5. Гелий-неоновый лазер

В первом лазере непрерывного действия, который был и первым газовым лазером, для генерации использовался переход между $2s$ и $2p$ уровнями атома Ne с длиной волны излучения 1,15 мкм [9]. Затем генерация была получена на длинах волн $\lambda = 0{,}6328$ мкм [10] и $\lambda = 3{,}39$ мкм, соответствующих другим переходам в Ne.

Действие гелий-неонового лазера поясняет рис. 10.15. Разряд на постоянном токе (или высокочастотный разряд) зажигается в смеси газов, содержащей обычно гелий при давлении 1 мм рт. ст. и неон при давлении 0,1 мм рт. ст. Обладающие достаточной энергией электроны разряда переводят атомы гелия в целый ряд возбужденных состояний. В процессе каскадных переходов возбужденных атомов вниз большая часть их накапливается на долгоживущих уровнях 2^3S и 2^1S, времена жизни которых равны 10^{-4} с и $5 \cdot 10^{-6}$ с соответственно. Поскольку эти метастабильные уровни близки по энергии к уровням $2s$ и $3s$ неона, то может происходить возбуждение атомов неона в указанные состояния. Переход атомов Ne в состояния $2s$ и $3s$ осуществляется при столкновениях возбужденных атомов гелия и атомов неона, находящихся в основном состоянии, в резуль-

[1] Из-за более высокой скорости накачки, обеспечиваемой импульсными лампами, для оптимальной связи (см. § 9.3) требуются зеркала с большим пропусканием, по сравнению с непрерывным режимом.

тате чего атомы обмениваются энергиями. Небольшая разность энергий (около 400 $см^{-1}$ для уровня 2*s*) переходит в кинетическую энергию атомов после столкновения. Таков основной механизм накачки, действующий в He—Ne лазерах.

Генерация на длине волны $\lambda = 0{,}6328$ *мкм.* Верхним рабочим уровнем является один из подуровней 3*s* неона, а нижним — один из подуровней 2*p*. Релаксация с нижнего лазерного уровня 2*p* с постоянной времени порядка 10^{-8} с осуществляется посредством спонтанного излучения с переходом атомов в долгоживущее состояние 1*s*. Указанное время значительно короче времени жизни верхнего лазерного уровня 3*s*, которое равно 10^{-7} с. Таким образом, условие $t_1 < t_2$, при которой возможна инверсия населенностей (см. § 9.3), для перехода 3*s*—2*p* выполнено.

Другим важным моментом является существование уровня 1*s*. Из-за большого времени жизни этого уровня на нем происходит накопление атомов в результате радиационных переходов с нижнего

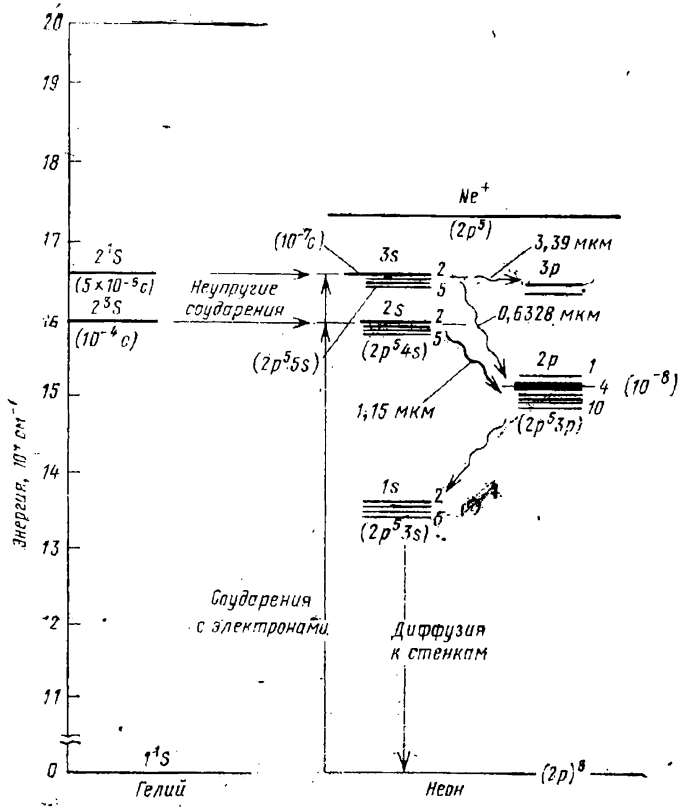


Рис. 10.15. Диаграмма энергетических уровней смеси He—Ne. Показаны пути преимущественного возбуждения красного и инфракрасных лазерных переходов [11]

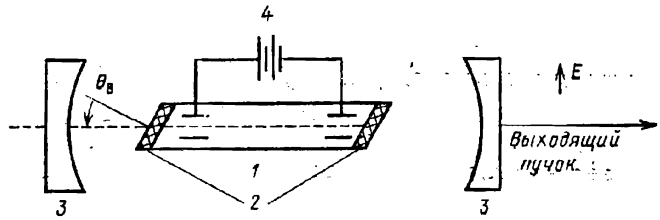


Рис. 10.16. Схематическое изображение газового лазера:
1 — разрядная трубка; *2* — брюстеровские окна; *3* — внешние сферические зеркала; *4* — источник энергии для поддержания разряда

лазерного уровня. Атомы в состоянии 1*s* сталкиваются с электронами разряда и возвращаются обратно на нижний лазерный уровень 2*p*. Это уменьшает разность населенностей. Из состояния 1*s* атомы релаксируют в основное состояние, главным образом, за счет столкновений со стенками разрядной трубки. Поэтому усиление на переходе с $\lambda = 0{,}6328$ мкм возрастает при уменьшении диаметра трубки.

Генерация на длине волны $\lambda = 1{,}15$ *мкм.* Накачка верхнего лазерного 2*s*-уровня неона происходит в результате резонансных (т. е. с сохранением внутренней энергии) столкновений с атомами гелия, находящимся на уровне 2^3S. Нижний лазерный уровень здесь тот же, что и для перехода с $\lambda = 0{,}6328$ мкм.

Генерация на длине волны $\lambda = 3{,}39$ *мкм.* Вынужденные переходы идут между уровнями 3*s* и 3*p*. Теперь верхний лазерный уровень тот же, что и для перехода с $\lambda = 0{,}6328$ мкм. Примечательно, что ненасыщенное усиление примерно 50 дБ/м[1]. Столь большое усиление объясняется зависимостью γ от λ^2, см. формулу (8.4.4), а также коротким временем жизни уровня 3*p*, благодаря которому возможно создание большой инверсной разности населенностей.

Большое усиление на переходе с $\lambda = 3{,}39$ мкм препятствует возникновению генерации на длине волны 0,6328 мкм. Дело в том, что порог раньше достигается для $\lambda = 3{,}39$ мкм, а после начала генерации населенность уровня 3*s* стабилизируется. Для возбуждения генерации на $\lambda = 0{,}6328$ мкм необходимо поместить внутрь резонатора элементы, сильно поглощающие на $\lambda = 3{,}39$ мкм, такие, например, как кварцевые или стеклянные окна Брюстера. Благодаря им порог генерации для $\lambda = 3{,}39$ мкм становится выше, чем для $\lambda = 0{,}6328$ мкм.

На рис. 10.16 представлена схема газового лазера. Окна разрядной трубки наклонены под углом Брюстера $\theta_Б$, так что излучение с вектором электрического поля, лежащим в плоскости рисунка, проходит через них без отражения. Выходное излучение лазера по-

[1] Речь идет об усилении очень слабой волны, распространяющейся вдоль области разряда, за один проход. В генерирующем лазере усиление за проход уменьшается вследствие насыщения перехода до значения, равного потерям за один проход.

ляризовано так, как показано на рисунке, поскольку ортогональная поляризация (вектор **E** перпендикулярен плоскости рисунка) испытывает отражение от окон и поэтому имеет более высокий порог генерации.

10.6. Лазер на углекислом газе

До сих пор в этой главе речь шла о лазерных переходах между состояниями, которым отвечают разные электронные орбитали, т. е. распределения зарядов вокруг ядра атома. Обратимся для примера к переходу с $\lambda = 0{,}6328$ мкм в неоне (см. рис. 10.15). Уровни $2p^55s$ и $2p^53p$ являются лазерными уровнями. При переходе атома с верхнего уровня на нижний один из шести внешних электронов меняет состояние $5s$ (т. е. $n = 5$, $l = 0$) на состояние с $n = 3$, $l = 1$.

Лазер на CO_2 [12] представляет семейство так называемых молекулярных лазеров, для которых рабочими являются колебательные уровни молекулы, связанные с относительным движением входящих в нее атомов. Атомные электроны находятся в состоянии с наименьшей энергией и не меняют его.

Обратимся к простому примеру — молекуле азота N_2. Ее атомы колеблются друг относительно друга с характерной частотой $\nu_0 =$

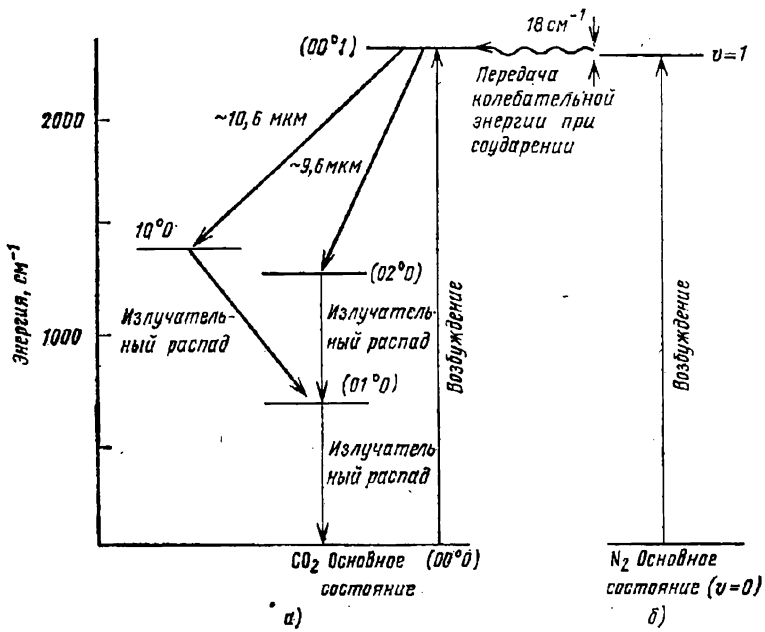


Рис. 10.17. Некоторые низколежащие колебательные уровни молекулы CO_2, включая нижние и верхние уровни лазерных переходов 10,6 мкм и 9,6 мкм (*а*). Основное состояние ($\upsilon = 0$) и первое возбужденное состояние ($\upsilon = 1$) молекулы азота (*б*)

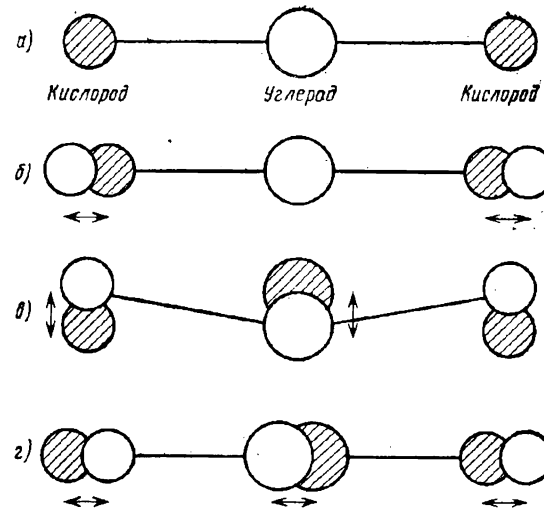


Рис. 10.18. Невозбужденная молекула CO_2 (*а*), продольное симметричное колебание (*б*). Деформационное (изгибное) колебание (*в*), продольное антисимметричное колебание (*г*)

$= 2326$ см$^{-1}$, которая определяется как массой молекулы, так и возвращающей упругой силой, действующей между атомами [13]. Квантовое рассмотрение указывает на глубокое сходство между этой системой и простым гармоническим осциллятором, рассмотренным в § 2.2. Колебания молекул квантованы и их энергия может принимать дискретный ряд значений $h\nu_0(v + 1/2)$, где $v = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Диаграмма колебательных уровней N_2, принадлежащих низшему электронному состоянию, представляет собой эквидистантный набор с шагом $h\nu_0$. Справа на рис. 10.17 показаны основное ($v = 0$) и первое возбужденное ($v = 1$) состояния молекулы N_2.

Молекула CO_2 сложнее рассмотренной молекулы N_2. Она состоит из трех атомов и поэтому ей присущи три нормальных типа колебаний, которые схематически изображены на рис. 10.18. В случаях: а) молекула находится в состоянии покоя; б) атомы совершают симметричное продольное колебание вдоль оси, соединяющей ядра; в) атомы колеблются в направлении, перпендикулярном указанной оси — это деформационное колебание; г) колебание является продольным антисимметричным. В первом приближении нормальные типы колебаний независимы, так что состояние молекулы CO_2 можно описать набором целых чисел (v_1, v_2, v_3), которые соответствуют степеням возбуждения нормальных типов колебаний. Таким образом, полная колебательная энергия молекулы

$$\mathscr{E}(v_1, v_2, v_3) = h\nu_1\left(v_1 + \frac{1}{2}\right) + h\nu_2\left(v_2 + \frac{1}{2}\right) + h\nu_3\left(v_3 + \frac{1}{2}\right), \quad (10.6.1)$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — частоты нормальных типов колебаний: продольного симметричного, деформационного и продольного антисимметричного соответственно.

Некоторые из низших колебательных уровней CO_2 показаны на рис. 10.17. Верхний лазерный уровень (00°1) соответствует возбуждению только продольного антисимметричного колебания и имеет энергию, равную энергии одного кванта $h\nu_3$. Лазерный переход с $\lambda = 10{,}6$ мкм имеет место между уровнями (00°1) и (10°0). Радиационное время жизни верхнего лазерного уровня $t_{сп} \approx 3$ с. Истинное же время жизни t_2 определяется столкновениями молекул и изменяется от 10^{-3} с при давлении в несколько мм рт. ст. до $3 \cdot 10^{-6}$ с при атмосферном давлении. Время жизни зависит от парциального давления входящих в смесь газов и может быть вычислено из опубликованных данных о поперечных сечениях столкновений [15].

Доплеровская ширина линии лазерного перехода при давлении, меньшем 5 мм рт. ст. (666,5 Па) и $T = 300$ К составляет $\Delta\nu_D \approx$ $\approx$ 60 МГц. При давлении, большем 666,5 Па, линия уширяется. Более детально этот вопрос будет обсужден ниже.

Возбуждение активной среды осуществляется при разряде в CO_2 с добавлением N_2 и He. Лазер на CO_2 имеет высокий к. п. д. — до 30%. Высокий к. п. д. обусловлен тремя основными причинами: к. п. д. квантовой системы ν_{21}/ν_{30}, который был введен в § 10.1, равен примерно 45%, так как лазерные уровни близки к основному состоянию; велика доля молекул CO_2, которые совершают каскадные переходы с уровней первоначального возбуждения, достигнутых в результате соударений с электронами, и накапливающихся на долгоживущем уровне (00°1); велико число молекул N_2, которые в разряде возбуждаются в состояние с $v = 1$. Столкновения с молекулами CO_2, находящимися в основном состоянии, приводят к передаче им энергии и переходу молекул CO_2 в состояние (00°1) (см. рис. 10.17). Небольшая разность энергий (около 18 $см^{-1}$) возмещается за счет уменьшения суммарной кинетической энергии сталкивающихся молекул. Столкновения этого типа могут быть представлены следующим образом:

$$(v = 1) + (00°0) + \text{к.э.} = (v = 0) + (00°1), \qquad (10.6.2)$$

где к. э. — кинетическая энергия. Достаточно большое поперечное сечение столкновений[1] имеет следствием то, что большинство молекул N_2 с $v = 1$ при рабочих давлениях и температурах лазера на CO_2 теряют энергию возбуждения именно таким путем.

Лазер на углекислом газе не только обладает большим к. п. д., но может иметь большую выходную мощность. Лабораторные макеты лазеров с длиной разрядной трубки в несколько метров достигают мощностей в несколько киловатт. Дело тут не только в резкой селективности возбуждения, но и в том, что молекула, совершив

[1] Определение поперечного сечения σ было дано в § 10.2. В данном контексте σ можно определить из следующего равенства: число столкновений типа (10.6.2) в единичном объеме в единицу времени равно $N(v = 1) \times$ $\times N(00°0)\,\bar{\sigma v}$, где $N(v = 1)$ и $N(00°0)$ плотности молекул в состояниях с $v = 1$ и (00°1) соответственно, $\bar{v}$ — средняя относительная скорость сталкивающихся молекул.

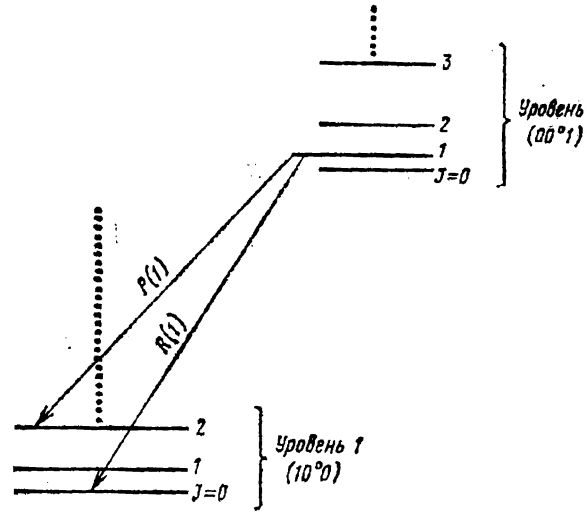


Рис. 10.19. Колебательно-вращательная структура уровней лазерного перехода с $\lambda = 10{,}6$ мкм

Переходы $J \to J+1$ принадлежат $P(J)$ — ветви, переходы $J \to J-1$ — $R(J)$ — ветви. Показаны только некоторые низшие вращательные (малые J) уровни

вынужденный переход, быстро возвращается в основное состояние и вновь может участвовать в работе лазера. Распад нижнего уровня достигается, главным образом, посредством столкновений с другими молекулами, такими как молекулы He, добавляемые к смеси газов CO_2 и N_2.

Инверсия на колебательно-вращательных переходах. Молекулярные состояния, переходы между которыми обеспечивают работу CO_2 лазера, характеризуются не только колебательным квантовым числом v, но также вращательными квантовыми числами J, m. Таким образом, собственное состояние молекулы задается числами v_1, v_2, v_3, J, m, причем v_1, v_2, v_3 — колебательные квантовые числа, соответствующие трем типам колебаний (рис. 10.18). Вращательная энергия молекулы, находящейся в колебательном состоянии i с квантовыми числами v_1, v_2, v_3, определяется по формуле [13]

$$\mathscr{E}_{i,J}/hc = B_i J(J+1) - DJ^2(J+1)^2, \qquad (10.6.3)$$

где B_i — некоторая константа i-го колебательного состояния, а $D \ll B$ — спектроскопическая константа молекулы. Более подробно этот вопрос изложен в приложении 3.

Колебательно-вращательная структура уровней лазерного перехода с $\lambda = 10{,}6$ мкм показана на рис. 10.19.

Используя соотношения (8.4.4) и (8.4.10), можно написать выражение для максимума коэффициента усиления на переходе 2, $J \to$ $\to (1, J \pm 1)$ при низком давлении

$$\gamma_{2,J\to 1,J\pm 1} = \left(N_{2,J} - N_{1,J\pm 1}\frac{g_J}{g_{J\pm 1}}\right)\frac{\lambda^2}{4\pi (t_{\text{сп}})_{2,J\to 1,J\pm 1}}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\Delta\nu_D}. \qquad (10.6.4)$$

Цифра 2 обозначает верхнее, а цифра 1 — нижнее колебательное состояние, λ — длина волны перехода, $(t_{\text{сп}})_{2,J\to1,J\pm1}$ — время жизни, обусловленное спонтанным переходом $(2, J)\to(1, J\pm1)$. Кратность вырождения g_i составляет [13] $g_J = 2J + 1$. Плотность населенности $N_{i,J}$ вращательного уровня равно

$$N_{i,J} = \frac{N_i g_J \exp(-\mathscr{E}_{i,J}/kT_{\text{вр}})}{\sum\limits_J g_J \exp(-\mathscr{E}_{i,J}/kT_{\text{вр}})}, \qquad (10.6.5)$$

где N_i — суммарная плотность населенности i-го колебательного уровня ($i = 1,2$).

Соударения между молекулами приводят к очень быстрому установлению теплового равновесия в системе вращательных уровней и поэтому заселенность этих уровней можно характеризовать распределением Больцмана и температурой $T_{\text{вр}} > 0$ даже в условиях динамического возбуждения. При этом заселенность колебательных уровней может быть инвертированной ($N_2 > N_1$), т. е. $T_{\text{кол}} < 0$. Кинетическую энергию поступательного движения характеризует температура $T_{\text{кин}}$, которая в общем случае отлична от $T_{\text{вр}}$, и поэтому распределение населенностей по вращательным уровням описывается следующим выражением:

$$N_{i,J}/N_{i,J'} = (g_J/g_{J'})\exp[-(\mathscr{E}_{i,J}-\mathscr{E}_{i,J'})/kT_{\text{вр}}]. \qquad (10.6.6)$$

В случае больших $T_{\text{вр}}$ и малых B_i сумму в знаменателе (10.6.5) можно заменить интегралом и затем вычислить, воспользовавшись формулой (10.6.3),

$$\sum_J g_J \exp(-\mathscr{E}_{i,J}/kT_{\text{вр}}) \approx kT_{\text{вр}}/hcB_i. \qquad (10.6.7)$$

Вероятность спонтанного перехода определяется уравнением (см. приложение 3)

$$\left(\frac{1}{t_{\text{сп}}}\right)_{2,J\to1,J\pm1} = \frac{G_{12}}{\lambda^3}\,\frac{J+{}^1/_2 \pm {}^1/_2}{g_J}, \qquad (10.6.8)$$

в котором G_{12} — константа, зависящая только от колебательных квантовых чисел. Верхний знак относится к переходам, принадлежащим P-ветви ($J \to J + 1$), а нижний — R-ветви ($J \to J - 1$). Подставляя (10.6.5), (10.6.6) и (10.6.8) в (10.6.4), получаем

$$\gamma_{2,J\to1,J\pm1} = \frac{G_{12}hc}{8\pi kT_{\text{вр}}(2\pi kT_{\text{кин}}/M)^{1/2}}\left(J+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left[N_2B_2\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_{2,J}}{kT_{\text{вр}}}\right) - N_1B_1\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_{1,J\pm1}}{kT_{\text{вр}}}\right)\right]. \qquad (10.6.9)$$

Здесь использована формула (8.6.9) $\Delta\nu_D = (2/\lambda)(2kT_{\text{кин}}/M)^{1/2}(\ln 2)^{1/2}$, связывающая доплеровскую ширину линии с кинетической температурой.

На рис. 10.20 представлен график зависимости нормированного коэффициента усиления (10.6.9) от J при различных значениях па-

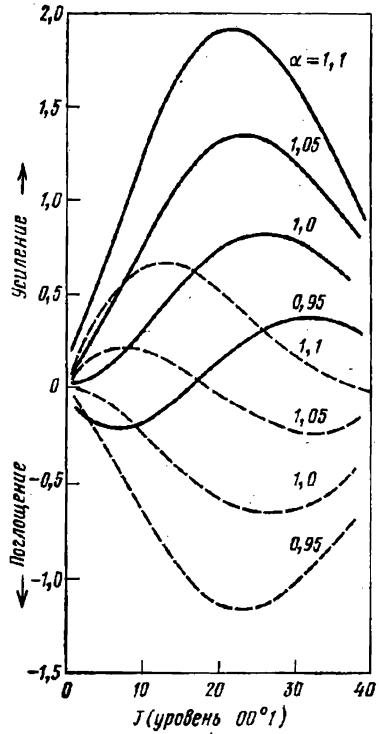


Рис. 10.20. Зависимость нормированного коэффициента усиления от квантового числа J верхнего уровня для переходов R-ветви (— — —) и P-ветви (———) при $N_2/N_1=0{,}95$; 1; 1,05; 1,1 и $T_{вр}=T_{кин}=400$ K [12]

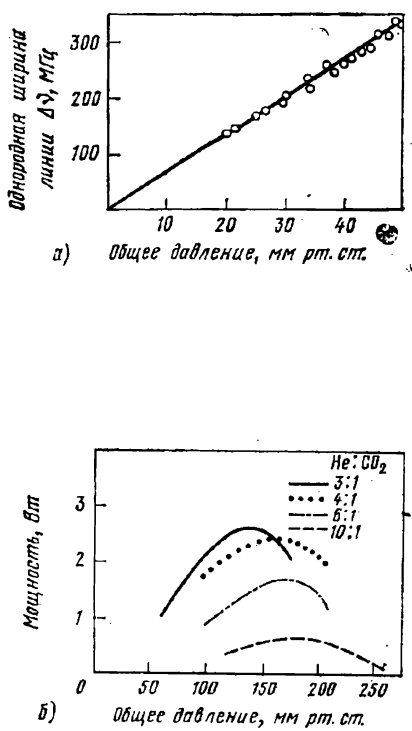


Рис. 10.21. Зависимости ширины линии 10,6 мкм от давления смеси при равных парциальных давлениях CO_2 и N_2 ($а$) и выходной мощности — от давления при оптимальной накачке смеси He : CO_2 [17] ($б$)

раметра N_2/N_1. Заметим, что в случае $N_2 > N_1$ (полная инверсия) усиление имеет место для всей P-ветви ($J \to J + 1$) и для части R-ветви, для которой J меньше некоторого J_{max} [16]. При $N_2 < N_1$ (частичная инверсия) усиливающими оказываются переходы P-ветви, которым отвечает $J > J_{min}$, а на переходах R-ветви усиление не достигается вообще.

CO_2 лазеры высокого давления. Лазеры на CO_2 работают также и при высоких давлениях, когда общая ширина линии $\Delta\nu = \Delta\nu_D + \sum_i (1/\pi\tau_i)$ значительно превосходит доплеровскую ширину $\Delta\nu_D$. Посредством τ_i обозначено среднее время между столкновениями молекул CO_2 с молекулами i-го сорта. Для широкой области давлений [15] сечение соударений остается постоянным, так что τ_i^{-1} и $\Delta\nu$ пропорциональны давлению (рис. 10.21, $а$).

Остановимся на вопросе о достижении генерации с помощью разряда при высоком давлении. Во-первых, чтобы достичь требуемого

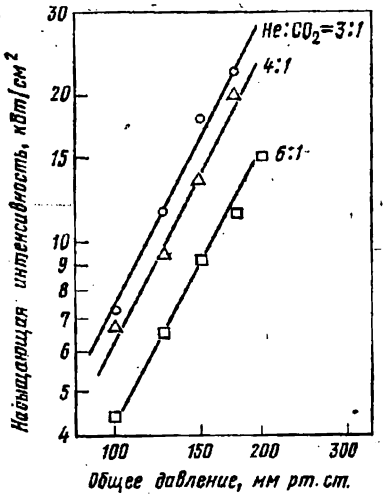


Рис. 10.22. Зависимость насыщающей интенсивности от давления в CO_2 лазере [17]

усиления, необходимо в соответствии с (8.7.1) увеличивать инверсию населенностей пропорционально давлению P, компенсируя тем самым рост $\Delta\nu$. Во-вторых, поскольку время жизни t_2 изменяется как P^{-1}, мощность накачки, приходящаяся на одну молекулу, увеличивается пропорционально P. В результате общая мощность накачки растет пропорционально P^2. Выходная мощность также должна расти пропорционально P^2. Формально этот вывод следует из выражения (9.3.16) для выходной мощности:

$$\mathscr{P}_{\text{вых}} = \frac{8\pi hcn^2\,\Delta\nu A}{(t_2/t_{\text{сп}})\,\lambda^3}\,\mathscr{T}\left(\frac{g_0}{\Pi_i + \mathscr{T}} - 1\right),$$

в котором $\Delta\nu \sim P$ и $t_2 \sim P^{-1}$. Учтено здесь и то, что $1/g(\nu_0) = \Delta\nu$.

Из рис. 10.21, *б* видно, как зависит мощность от давления. Максимум вблизи $P = 150$ мм рт. ст. означает, что в области высоких давлений усиление падает. Более фундаментальная связь имеет место между давлением и величиной насыщающей интенсивности, см. формулу (8.7.5),

$$I_{\text{нас}} = 4\,\pi n^2 \Delta\nu h\nu/[(t_2/t_{\text{сп}})\lambda^2].$$

По причинам, указанным выше, $T_{\text{нас}} \sim P^2$. Экспериментальная зависимость $I_{\text{нас}}$ от P приведена на рис. 10.22. Мощные импульсные CO_2 лазеры, работающие при атмосферном давлении [18], находят широкое применение в промышленности.

10.7. Полупроводниковые лазеры

О наблюдении вынужденного когерентного излучения из области p — n-перехода в полупроводниковых кристаллах GaAs и GaAsP в 1962 г. сообщили четыре группы исследователей [19—21, 45]. Выполненный ранее Думке теоретический анализ [22] показал, что лазерный эффект в полупроводниках возможен [1].

Два существенных различия между лазерами, рассмотренными раньше, и полупроводниковыми лазерами делают необходимым обособленное рассмотрение последних.

[1] Использование полупроводника в качестве активной среды квантового генератора предложено Н. Г. Басовым, Б. М. Вулом и Ю. М. Поповым [58] Идея получения инверсии населенностей путем инжекции неравновесных но

1. В «обычных лазерах» активные атомы (ионы, молекулы и т. п.) рассматриваются как независимые, так что энергетические уровни, между которыми совершается лазерный переход, идентичны для всех атомов, т. е. имеют одни и те же квантовые числа. В полупроводниковых кристаллах имеется частичное пространственное перекрытие волновых функций атомов, и каждый энергетический уровень в силу принципа Паули может быть занят самое бо́льшее двумя электронами. Вероятность заполнения энергетического уровня описывается функцией распределения Ферми-Дирака, а не функцией Больцмана. Следовательно, при рассмотрении межзонного поглощения или излучения на данной частоте необходимо говорить о переходах между двумя распределениями энергетических уровней, а не между двумя отдельными уровнями.

2. Второе различие связано с локализованным распространением электромагнитного излучения вдоль p — n-перехода. Пространственные характеристики этого излучения определяются оптическими свойствами лазерной среды, а не внешним резонатором, как в «обычных» лазерах. Этот результат, как будет показано ниже, оказывает сильное влияние на пороговое значение накачки в инжекционном лазере.

Некоторые сведения о полупроводниках. В этом разделе будут изложены некоторые первоначальные сведения из теории полупроводников. Подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в многочисленных книгах по физике твердого тела [23, 24].

Волновую функцию электрона в данной зоне (например, в валентной) можно записать в виде

$$\Psi_v(\mathbf{r}) = u_{v\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{kr}), \tag{10.7.1}$$

где $u_{v\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — периодическая функция с периодом кристаллической решетки. Постоянные «распространения» k_i квантованы аналогично (4.2.7), и поэтому

$$k_i = 2\pi s/L_i, \tag{10.7.2}$$

где $i = x, y, z$; s = целое число; L_i — длина кристалла в i-м направлении. Объем в $\mathbf{k}$-пространстве, приходящийся на одно электронное состояние, равен $8\pi^3/V$, где $V = L_xL_yL_z$. Следовательно, число электронных состояний, соответствующих значениям k в интервале от k до $k + dk$, равно объему шарового слоя радиуса k и толщины dk, деленному на объем, приходящийся на одно электронное состояние, т. е.

$$\rho(k)\, dk = (k^2V/\pi^2)\, dk. \tag{10.7.3}$$

Сюда добавлен коэффициент 2, учитывающий тот факт, что каждому значению k соответствует два спиновых состояния.

сителей через p—n-переход высказана Н. Г. Басовым, О. Н. Крохиным и Ю. М. Поповым [59]. Более подробно с историей вопроса читатель может ознакомиться, обратившись к книге [60]. Для углубленного изучения полупроводниковых лазеров могут быть рекомендованы монографии [61, 62]. — *Прим. ред.*

Энергия, отвечающая данному состоянию k, скажем, в зоне проводимости, в приближении параболической зоны

$$\mathscr{E}(k) = \hbar^2 k^2/2m_c \qquad (10.7.4)$$

является функцией k, а не k. Здесь m_c — эффективная масса электрона в зоне проводимости, а $\mathscr{E}(k)$ отсчитывается от дна зоны. На рис. 10.23 показана типичная зависимость $\mathscr{E}$ от k для полупроводника с прямыми переходами, т. е. для полупроводника, в котором минимум зоны проводимости и максимум валентной зоны имеют место в одной и той же точке k-пространства. В общем случае должно быть задано направление k, однако в приближении параболической зоны это излишне. Черными точками, равномерно распределенными по k, на рисунке отмечены разрешенные энергетические состояния. Согласно (10.7.4) картина на рис. 10.23 соответствует случаю $m_v > m_c$.

• Из выражения (10.7.3) для плотности состояний в k-n пространстве и из (10.7.4) легко получить выражение для плотности состояний в энергетическом пространстве

$$\rho_v(\mathscr{E}) = \frac{1}{V}\rho_v(k)\frac{dk}{d\mathscr{E}} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_v}{\hbar^2}\right)^{3/2}\mathscr{E}^{1/2},$$

$$\rho_c(\mathscr{E}) = \frac{1}{V}\rho_c(k)\frac{dk}{d\mathscr{E}} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_c}{\hbar^2}\right)^{3/2}\mathscr{E}^{1/2}, \qquad (10.7.5)$$

где индексы c и v обозначают зону проводимости и валентную зону соответственно, а энергия $\mathscr{E}$ измеряется от экстремума зоны.

Распределение Ферми-Дирака. Вероятность того, что состояние с энергией $\mathscr{E}$ занято электроном, дается распределением Ферми-Дирака.

$$f(\mathscr{E}) = \frac{1}{\exp[(\mathscr{E}-\mathscr{E}_F)/kT]+1}, \qquad (10.7.6)$$

где $\mathscr{E}_F$ — энергия уровня Ферми. В тепловом равновесии, валентная зона и зона проводимости имеют общий уровень Ферми. В условиях, когда тепловое равновесие нарушено, например, при протекании тока через p — n-переход или при большой концентрации электронов проводимости и дырок, вызванной оптическим возбуждением полупроводника, для каждой зоны вводятся свои уровни Ферми, называемые в этом случае квазиуровнями Ферми. Концепция квазиуровней Ферми в неравновесных системах имеет смысл, если вре-

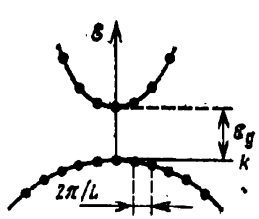


Рис. 10.23. Зонная структура полупроводника с прямым переходом при $m_c < m_v$
Эквидистантно расположенные точки соответствуют электронным состояниям

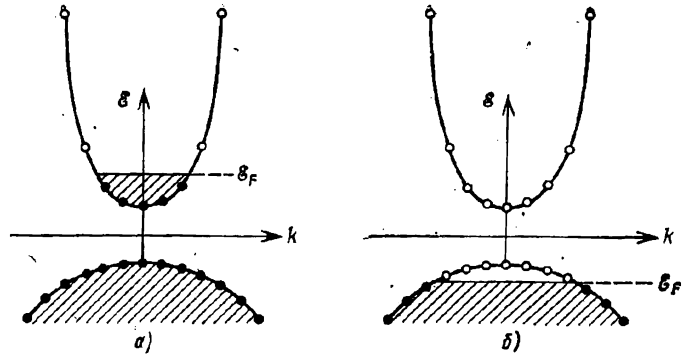


Рис. 10.24. Энергетические зоны вырожденных полупроводников *n*-типа (*а*), *p*-типа (*б*) при 0 К

... обозначают занятые электронные состояния; ооо соответствуют незанятым состояниям

мя внутризонной релаксации значительно короче времени установления равновесия между зонами. Именно так обычно обстоит дело при больших плотностях носителей в инжекционных полупроводниковых лазерах.

В сильно легированных полупроводниках уровень Ферми смещается в зону проводимости при легировании донорными примесями (рис. 10.24, *а*) или в валентную зону при легировании акцепторными примесями (рис. 10.24, *б*). Из (10.7.6) следует, что при $T = 0$ К все состояния с энергией, меньшей $\mathscr{E}_F$, заняты, в то время как состояния с энергией, большей $\mathscr{E}_F$, незаняты. В этом смысле вырожденный полупроводник[1)] ведет себя подобно металлу, проводимость которого не исчезает при низких температурах. Незанятые состояния в валентной зоне называются дырками и рассматриваются подобно электронам, за исключением того, что их заряд, соответствующий отсутствию электрона, положителен, а их энергия отсчитывается вниз от потолка валентной зоны [23].

Межзонные переходы и поглощение в полупроводниках. Как и в любых лазерах, усиление света в полупроводниках является процессом, прямо противоположным поглощению. Следовательно, усилению отвечает и обратное расположение занятых и незанятых энергетических уровней.

Энергия взаимодействия электрона в полупроводнике с электрическим полем световой волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = {}^1/_2\, \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_{\text{опт}}\mathbf{r})] + \text{к. с.}$$

дается выражением

$$\mathscr{H}' = (eE_0 x/2)\{\exp[i(\omega t - \mathbf{k}_{\text{опт}}\mathbf{r})] + \text{к. с.}\},$$

если предположить, что $\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}E_0$. Применяя формулу (3.12.14) нестационарной теории возмущений для вычисления вероятности

[1)] Полупроводник называется вырожденным, если уровень Ферми лежит в зоне проводимости или в валентной зоне. — *Прим. ред.*

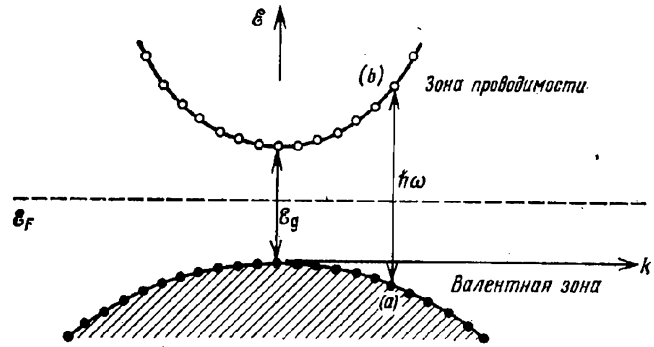


Рис. 10.25. Поглощение фотона в полупроводнике при переходе электрона из занятого состояния (*a*) валентной зоны в свободное состояние (*б*) зоны проводимости

перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости под действием поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, необходимо использовать матричный элемент оператора возмущения

$$\mathcal{H}'_{vc} = \frac{eE_0}{2} \int u^*_{v\mathbf{k}}(\mathbf{r})\, u_{c\mathbf{k}'}(\mathbf{r})\, x \exp\left[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{k}_{\text{опт}})\mathbf{r}\right] dv, \quad (10.7.7)$$

где волновые функции электрона взяты в виде (10.7.1). Благодаря наличию быстро осциллирующего фазового множителя $\exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{k}_{\text{опт}})\mathbf{r}]$, величина $\mathcal{H}'_{vc}$ оказывается исчезающе малой во всех случаях, кроме $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\text{опт}}$. В оптическом диапазоне $k_{\text{опт}} = 2\pi/\lambda \approx 10^5$ см$^{-1}$, в то время как для электронов, исключая непосредственную окрестность экстремума зоны, $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \sim \mathbf{k} \sim 10^8$ см$^{-1}$. Следовательно, можно положить $k_{\text{опт}} = 0$ и записать условие возможных переходов как

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad (10.7.8)$$

т. е. переходы имеют место, в основном, между состояниями с одинаковыми k. Это означает сохранение импульса.

Определим теперь показатель поглощения $\alpha(\omega)$ плоской электромагнитной волны частоты ω, распространяющейся в объеме полупроводника со структурой зон, показанной на рис. 10.25. Как уже говорилось, при переходе импульс электрона сохраняется и поэтому переход изображен на рисунке вертикальной стрелкой. Предположим, что полупроводник находится в состоянии термодинамического равновесия и уровень Ферми достаточно удален от границ зон, так что все уровни в валентной зоне заполнены, а в зоне проводимости — свободны. Анализ удобно начать с выражения (3.12.14) для вероятности перехода в единицу времени из состояния a в состояние b:

$$W_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}'_{ab}|^2 \delta(E_b - E_a - \hbar\omega). \quad (10.7.9)$$

Согласно (10.7.4) для перехода, указанного стрелкой на рис. 10.25, имеем

$$\mathscr{E}_b - \mathscr{E}_a = (\hbar^2 k^2/2)(1/m_c + 1/m_v) + \mathscr{E}_g.$$

Тогда вероятность перехода может быть записана как

$$W(k) = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathscr{H}'_{ve}(k)|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + \mathscr{E}_g - \hbar\omega\right), \qquad (10.7.10)$$

где $m_r = m_v m_c/(m_v + m_c)$ — приведенная эффективная масса. Общее число N переходов в секунду для кристалла объемом V получается умножением (10.7.10) на плотность состояний $\rho(k)$ (в объеме V) с последующим интегрированием по всем значениям k. Используя (10.7.3), получаем

$$N = \frac{2V}{\pi\hbar} \int_0^\infty |\mathscr{H}'_{vc}(k)|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + \mathscr{E}_g - \hbar\omega\right) k^2 dk. \qquad (10.7.11)$$

Введя переменную $x = \hbar^2 k^2/2m_r + \mathscr{E}_g - \hbar\omega$, преобразуем последний интеграл к виду

$$N = \frac{2V}{\pi\hbar} \int |\mathscr{H}'_{vc}(k)|^2 \frac{m_r}{\hbar^2} \delta(x) \sqrt{\frac{2m_r}{\hbar^2}(x + \hbar\omega - E_g)}\, dx =$$

$$= \frac{V}{\pi} |\mathscr{H}'_{vc}(k)|^2 \frac{(2m_r)^{3/2}}{\hbar^4} (\hbar\omega - \mathscr{E}_g)^{1/2}, \qquad (10.7.12)$$

где $\hbar^2 k^2/2m_r + \mathscr{E}_g = \hbar\omega$. Показатель поглощения $\alpha(\omega)$ определяется как

$$\alpha(\omega) = \frac{\text{мощность, поглощенная в единице объема}}{\text{мощность, проходящая через единицу площади}} = \frac{N\hbar\omega/V}{\varepsilon_0 n E_0^2 c/2},$$

где n — показатель преломления; c — скорость света в вакууме и E_0 — амплитуда поля. Используя (10.7.12), получаем

$$\alpha_0(\omega) = \frac{\omega e^2 x_{vc}^2 (2m_r)^{3/2}}{2\pi\varepsilon_0 nc\hbar^3} (\hbar\omega - \mathscr{E}_g)^{1/2}, \qquad (10.7.13)$$

где в соответствии с (10.7.7) $\mathscr{H}'_{vc}(k)$ заменен на $eE_0 x_{vc}/2$ с $x_{vc} = \langle u_{vk} | x | u_{ck} \rangle$. Практически удобно объединить численные коэффициенты и записать $\alpha_0(\omega)$ в виде

$$\alpha_0(\omega) = K(\hbar\omega - \mathscr{E}_g)^{1/2}. \qquad (10.7.14)$$

Величину K можно определить из данных по поглощению. Для арсенида галлия GaAs, например, данные таковы: $\mathscr{E}_g \approx 1{,}5$ эВ; $m_v = 0{,}1\ m_{эл}$; $m_c = 0{,}065\ m_{эл}$; $K \approx 6 \cdot 10^3$ см$^{-1}$ (эВ)$^{-1/2}$. На частоте, которой соответствует энергия фотона, превышающая ширину энергетической щели между зонами $\mathscr{E}_g$ на 0,01 эВ, показатель поглощения $\alpha_0(\omega) = 6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1} = 600$ см$^{-1}$.

Предположим теперь, что каким-либо образом удалось создать такое состояние в полупроводниковом кристалле, когда все уровни в

зоне проводимости вплоть до некоторого уровня заняты, а все уровни выше некоторого в валентной зоне свободны. Такая ситуация изображена на рис. 10.26, где при $T = 0$ К все состояния в зоне проводимости заняты вплоть до квазиуровня Ферми $\mathscr{E}_{Fc}$, тогда как все состояния выше квазиуровня Ферми $\mathscr{E}_{Fv}$ в валентной зоне свободны. Вычисление показателя поглощения на частоте ω аналогично ранее выполненному при выводе формулы (10.7.13), за исключением того, что знак изменяется на обратный, т. е. излучение усиливается, а не поглощается. Таким образом для полупроводника, изображенного на рис. 10.26, имеем

$$\alpha(\omega) = \alpha_0(\omega) = 0 \quad \text{при } \hbar\omega < \mathscr{E}_g,$$

$$\alpha(\omega) = -\alpha_0(\omega) = -K(\hbar\omega - \mathscr{E}_g)^{1/2} \text{ при } \mathscr{E}_g < \hbar\omega < \mathscr{E}_{Fc} - \mathscr{E}_{Fv} - \text{усиление}, \tag{10.7.15}$$

$$\alpha(\omega) = \alpha_0(\omega) = K(\hbar\omega - \mathscr{E}_g)^{1/2} \text{ при } \hbar\omega > \mathscr{E}_{Fc} - \mathscr{E}_{Fv} - \text{поглощение}.$$

В рассмотренном выше численном примере для GaAs было получено значение показателя поглощения $\alpha_0 \approx 600$ см$^{-1}$ на частоте, удовлетворяющей равенству $\hbar\omega - \mathscr{E}_g = 0{,}01$ эВ.

По причинам, которые будут обсуждены ниже, выражения (10.7.15) непосредственно нельзя применить к вычислению усиления в инжекционном лазере на p — n-переходе. Однако исторически получилось так, что именно эти соображения привели к выводу, о возможности получения лазерного эффекта в полупроводниках и показали преимущества полупроводников с прямыми переходами как обладающих огромным поглощением (а следовательно, и усилением).

Обобщим результаты данного раздела на системы с конечной температурой. При вычислении числа переходов снизу вверх нужно умножить в (10.7.11) подынтегральное выражение на вероятность того, что нижнее состояние a занято, а верхнее состояние b свободно, ибо переход не может начинаться из состояния, которое свобод-

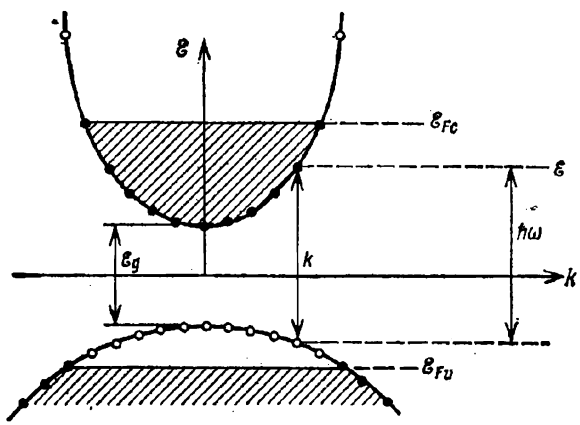


Рис. 10.26. Полупроводник с вырожденными электронной и дырочной населенностями

На частоте ω знак показателя поглощения противоположен тому, который имеется в ситуации, изображенной на рис. 10.25, т. е. налицо усиление

но, и заканчиваться в состоянии, которое уже занято. Таким образом, переходам снизу вверх отвечает множитель $f_v(\mathscr{E}_a)[1-f_c(\mathscr{E}_b)]$, а обратным переходам — множитель $f_c(\mathscr{E}_b)[1-f_v(\mathscr{E}_a)]$. Чтобы получить выражение для чистого числа переходов с поглощением, из общего числа переходов $a \to b$ следует вычесть число переходов $b \to a$. Это выражение отличается от (10.7.11) наличием указанных множителей:

$$N_{a\to b} - N_{b\to a} = \frac{2V}{\pi\hbar}\int_0^\infty |\mathscr{H}'_{vc}(k)|^2 [f_v(1-f_c) - f_c(1-f_v)] \times$$

$$\times \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + \mathscr{E}_g - \hbar\omega\right) k^2\, dk = \frac{2V}{\pi\hbar}\int_0^\infty |\mathscr{H}'_{vc}(k)|^2 [f_v(\mathscr{E}_a) - f_c(\mathscr{E}_b)] \times$$

$$\times \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + \mathscr{E}_g - \hbar\omega\right) k^2\, dk, \qquad (10.7.16)$$

где $\mathscr{E}_b - \mathscr{E}_a = \mathscr{E}_g + \hbar^2 k^2/2m_r = \hbar\omega$.

Признаком наличия усиления является выполнение неравенства $N_{a\to b} < N_{b\to a}$, из которого согласно (10.7.16) следует

$$f_c(\mathscr{E}_b) - f_v(\mathscr{E}_a) > 0. \qquad (10.7.17)$$

Используя (10.7.6) со значениями квазиуровней Ферми $\mathscr{E}_{Fv}$ для валентной зоны и $\mathscr{E}_{Fc}$ для зоны проводимости, можно свести последнее неравенство к

$$\mathscr{E}_{Fc} - \mathscr{E}_{Fv} \geqslant \hbar\omega. \qquad (10.7.18)$$

Его иногда называют условием инверсии Бернара-Дюрафурга для полупроводников [25]. Заметим, что при тепловом равновесии $\mathscr{E}_{Fc} = \mathscr{E}_{Fv}$ и полупроводник прозрачен или поглощает на всех частотах.

Вернемся к (10.7.16) и заметим, что интегрирование здесь идентично тому, которое проводилось в (10.7.13), а следовательно, результатом будет $\alpha(\omega) = \alpha_0(\omega)[f_v(\mathscr{E}_a) - f_c(\mathscr{E}_b)]$. Показатель усиления $\gamma(\omega) = -\alpha(\omega)$. т. е.

$$\gamma(\omega) = \alpha_0(\omega)[f_c(\mathscr{E}_b) - f_v(\mathscr{E}_a)]. \qquad (10.7.19)$$

Максимально возможное усиление в данном полупроводнике на частоте ω равно $\alpha_0(\omega)$ — поглощению при нулевой температуре. Для получения предельного усиления необходимо так возбудить систему, чтобы $f_c(\mathscr{E}_b) = 1$ и $f_v(\mathscr{E}_a) = 0$.

Поскольку $\alpha_0(\omega)$ есть собственное предельное поглощение при нулевой температуре, зависимость усиления $\gamma(\omega)$ от температуры и степени возбуждения в (10.7.19) содержится в] множителе $[f_c(\mathscr{E}_b) - f_v(\mathscr{E}_a)]$. Чтобы лучше это увидеть, обратимся к рис. 10.27, на котором изображен график зависимости (10.7.19), и выделим два момента. По мере увеличения возбуждения возрастает число носителей в зонах, а значит, и максимальное значение показателя усиления γ_{max}. Это показано на рис. 10.27, *в*, *г* штриховой линией. Уве-

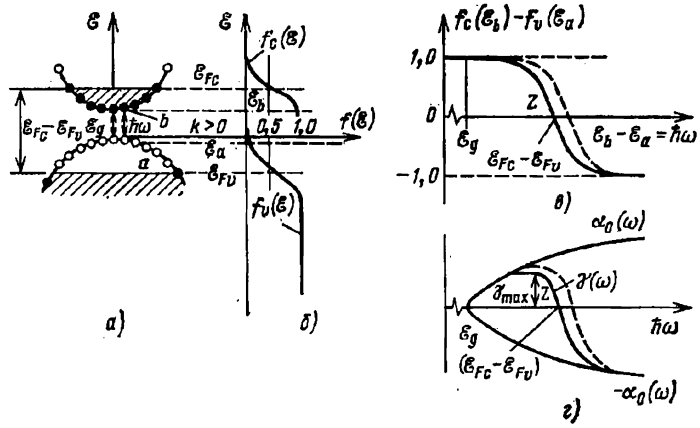


Рис. 10.27. Последовательное графическое построение функции $\gamma(\omega)$, описываемой формулой (10.7.19)

Штриховые кривые соответствуют более высокому уровню возбуждения. При этом точка z сдвигается вправо, так что значение γ_{max} и частота, на которой это значение достигается, возрастают

личение температуры сопровождается уширением переходного участка функции Ферми, что в соответствии с рис. 10.27, *г* означает уменьшение γ_{max}.

Описанную выше процедуру нахождения усиления не удается довести до конца в аналитической форме. Результаты численных расчетов, выполненных для кристалла GaAs с p — n-переходом, представлены на рис. 10.28 и 10.29.

Лазер на p—n-переходе. Впервые лазерный эффект в полупроводниках был получен на вырожденном p — n-переходе. При больших токах инжекции через p — n-переход вблизи обедненного слоя существует область, которая содержит одновременно электроны и дырки в вырожденном состоянии. На рис. 10.30 показан вырожденный p — n-переход. При нулевом смещении (рис. 10.30, *а*) (или при малом напряжении смещения) условие $\mathscr{E}_{Fc} - \mathscr{E}_{Fv} > \hbar\omega$ не выполняется и усиления быть не может. Если приложенное в прямом направлении напряжение примерно равно $\mathscr{E}_g/e$ (рис. 10.30, *б*), то имеется «активная» область, содержащая одновременно электроны и дырки [1]. На частотах, для которых выполняется условие $\hbar\omega < \mathscr{E}_{Fc} - \mathscr{E}_{Fv}$ часть излучения попадает в активную область и усиливается.

[1] На рис. 10.30, *б* и 10.33 дело представлено так, что активной является область кристалла, содержащая p—n-переход. Ниже, на рис. 10.35, *а* изображена иная ситуация: здесь активный слой расположен в части кристалла с дырочной проводимостью, примыкающей к p—n-переходу. Инверсия достигается благодаря инжекции неосновных носителей (электронов) в этот слой через p—n-переход. В гомолазерах на GaAs реализуется второй из указанных вариантов (см., например, [62, с. 26]). — *Прим. ред.*

Толщина активного слоя в этом простом случае по порядку величины совпадает с расстоянием, на которое диффундируют электроны, инжектированные в p-область, до рекомбинации их с дырками, т.е. до момента перехода в валентную зону. Если, основываясь на результатах работы [27], принять коэффициент диффузии $D = 10$ см^2/с и время рекомбинации $t_{\text{рекомб}} \approx 10^{-9}$ с, то мы получим для толщины активной области значение $\sqrt{Dt_{\text{рекомб}}} \approx 1$ мкм.

Первые лазерные диоды на основе GaAs изготавливались путем диффузии акцепторных атомов, например Zn, из приповерхностного слоя с очень высокой концентрацией $N_A \approx 10^{-20}$ атомов/см^3 вглубь кристалла GaAs n-типа, легированного до концентрации 10^{18} атомов/см^3 теллуром, используемым в качестве донорной примеси. В настоящее время полупроводниковые лазерные структуры изготавливаются с помощью эпитаксиальной технологии: выращиваются чередующиеся слои различного состава, которые образуют гетероструктуру типа GaAlAs — GaAs. К этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем.

На рис. 10.31 схематически изображен лазер на p — n-переходе. Оптический резонатор образуется парой полированных поверхностей кристалла. В GaAs такими поверхностями обычно служат естественные сколы по плоскости (110).

Усиление и генерация в лазерах на p—n-переходе. Формула (10.7.19) определяет показатель уси-

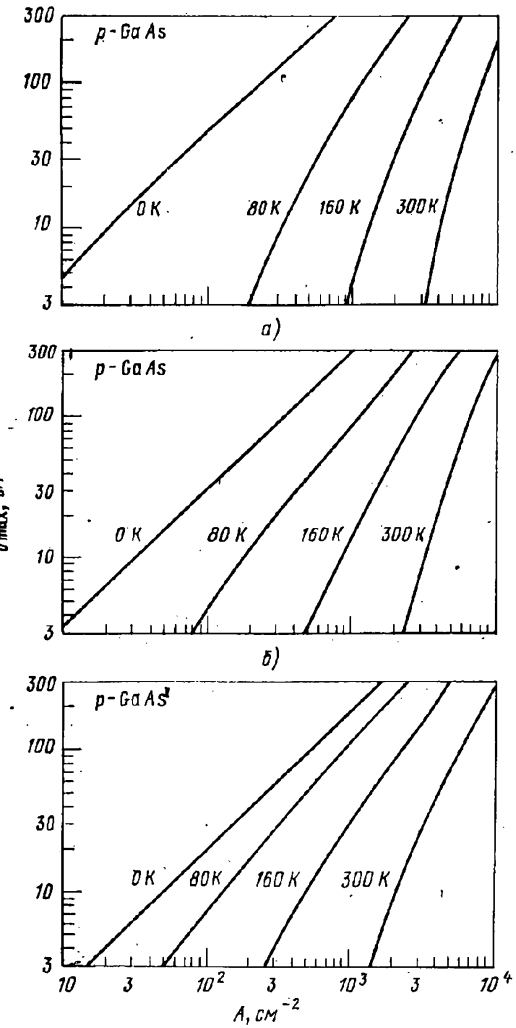


Рис. 10.28. Зависимость максимального значения показателя усиления γ_{max} от плотности тока для различных температур
а) $N_D = 3 \cdot 10^{18}$, $N_A = 6 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$;
б) $N_D = 3 \cdot 10^{18}$, $N_A = 4 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$;
в) $N_D = 10^{19}$, $N_A = 1{,}3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$
[26]

ления $\gamma(\omega)$ в полупроводнике с инверсной населенностью, т. е. в полупроводнике, который имеет заполненные уровни в зоне проводимости и свободные уровни в валентной зоне. Вполне естественно желание применить это выражение к лазеру на p—n-переходе. Но это невозможно по целому ряду причин, из которых рассмотрим основные.

1. В вырожденных полупроводниках, которые используются в лазерах, высокая концентрация примесей приводит к существенному искажению энергетических зон по сравнению с собственным полупроводником. Параболическая аппроксимация зоны и закон сохранения импульса, используемые при выводе (10.7.19), здесь неприменимы. При высоких концентрациях доноров ($>10^{18}$ см$^{-3}$) примесные донорные уровни образуют зону, которая перекрывается с зоной проводимости [26, 28—30]. Верхние лазерные уровни — часть этой зоны. Лазерные переходы, по-видимому, заканчиваются на акцепторных уровнях, которые из-за большой концентрации акцепторов ($\approx 10^{18}$ см$^{-3}$) также образуют сплошную зону [31]. Такая ситуация изображена на рис. 10.32.

2. Пространственная локализация мод электромагнитного поля решающим образом сказывается на величине порога генерации и обязательно должна учитываться при анализе [32].

Поскольку ни точно, ни даже приближенно закон распределения энергетических уровней, участвующих в переходе, неизвестен, подойдем к делу так же, как в теории обычных лазеров. Обозначим об-

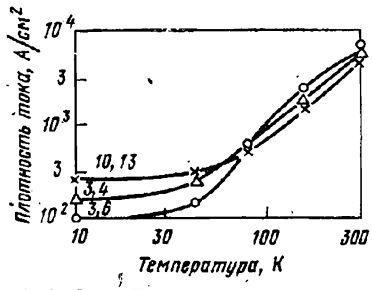


Рис. 10.29. Температурная зависимость плотности тока, необходимой для достижения показателя усиления $\gamma_{max}=50$ см$^{-1}$, которая получена на основании данных рис. 10.28

Концентрации донорных и акцепторных примесей приведены в единицах 10^{18} см$^{-3}$

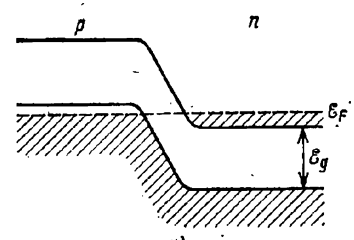
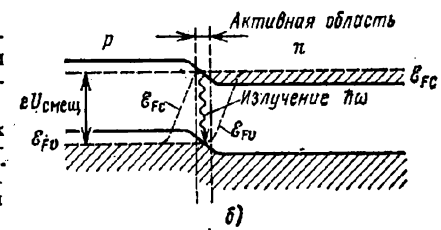


Рис. 10.30. Вырожденный p—n-переход при нулевом смещении (*а*) и при напряжении смещения в прямом направлении $U_{смещ} \approx \mathscr{E}_g/e$ (*б*)

Область, содержащая как электроны, так и дырки, называется активной. Извилистой стрелкой обозначен процесс рекомбинации электрона и дырки в активной области с испусканием фотона с энергией $\hbar\omega < \mathscr{E}_{Fc} - \mathscr{E}_{Fv}$.



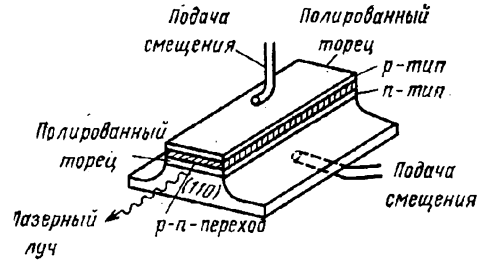


Рис. 10.31. Лазер на p—n-переходе в GaAs. В качестве отражателей резонатора служат две параллельные плоскости сколов (110)

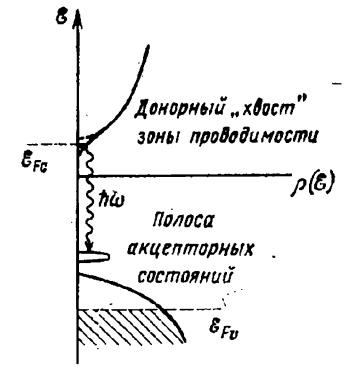


Рис. 10.32. Качественная картина распределения плотности состояний в активной области сильно вырожденного p—n-перехода.

Экспоненциальный «хвост» донорной примеси соприкасается с зоной проводимости. Акцепторная зона, по-видимому, также может перекрываться с валентной зоной, но на рисунке они изображены отдельно. Штриховая кривая вблизи донорного «хвоста» соответствует собственному полупроводнику. Лазерный переход на частоте ω указан стрелкой

щее число электронов в зоне проводимости в пределах активного слоя через n_2, а через n_1 — аналогичную величину в валентной зоне [1]. Рассмотрим n_2 и n_1 как эквивалентную населенность верхнего и нижнего уровней активной среды обычного лазера. Инверсия населенностей достигается в активном слое толщиной $t \lesssim 1$ мкм. Моды электромагнитного поля занимают область, поперечный размер которой d может быть как больше, так и меньше t. Предположим, что лазер (рис. 10.33) имеет длину L и протяженность в направлении y, равную w. Инверсная населенность по объему моды $V = dLw$ распределена более или менее однородно, так как вначале было задано $d = t$.

Поскольку данная ситуация аналогична рассмотренной в § 8.4, можно воспользоваться выражением для показателя усиления $\gamma(\nu)$, подобным (8.4.4),

$$\gamma(\nu) = \frac{c^2 (n_2 - n_1)/dLw}{8\pi n^2 \nu^2 t_{\text{рекомб}}} g(\nu), \qquad (10.7.20)$$

где $g(\nu)$ — нормированная функция формы линии спонтанного рекомбинационного излучения, а $t_{\text{рекомб}}$ — время жизни электрона в p — области до момента спонтанной рекомбинации с дыркой. На рис. 10.34 показана типичная форма спектра спонтанного излучения p — n-перехода в GaAs.

Посмотрим теперь, как ведет себя $\gamma(\nu)$, если размер моды d сделать больше t. Этот случай имеет прямое отношение к лазерам на p — n-переходе. Если общая энергия в моде при увеличении ее раз-

[1] Точнее сказать, n_2 — суммарная населенность тех уровней валентной зоны, на которых может заканчиваться лазерный переход с частотой ω, т. е. уровней, расположенных вблизи потолка зоны, включая полосу примесных акцепторных уровней. — *Прим. ред.*

мера остается постоянной, то плотность энергии излучения, взаимодействующего с электронами в активном слое, убывает. Это приводит к уменьшению вероятности индуцированного перехода на один электрон $W_{инд}$ и падению общей мощности излучения всего активного слоя $W_{инд}(n_2 - n_1)h\nu$. Отсюда следует обратная пропорциональность величин γ и d при $d > t$, которая зафиксирована в формуле (10.7. 20). В случае же $d < t$ в формуле (10.7.20) следует заменить d на t. Этот последний случай, когда активная среда занимает большую область, нежели поле, реализуется в большинстве лазеров других типов.

Населенность зоны проводимости n_2 можно связать с током, проходящим через диод. Полагая, что в равновесии скорость рекомбинации равна скорости инжекции, запишем

$$n_2/t_{рекомб} = I\eta_{внут}/e, \qquad (10.7.21)$$

где $\eta_{внут}$ — внутренний квантовый выход излучательной рекомбинации, определяемый как доля инжектированных электронов, рекомбинация которых сопровождается излучением; e — заряд электрона. Подставив (10.7.21) в (10.7.20) и вспомнив, что $Lw = A$ — площадь перехода, получим

$$\gamma(\nu) = \frac{c^2 g(\nu)\eta_{внут}\zeta}{8\pi n^2 \nu^2 ed} J, \qquad (10.7.22)$$

где $J = I/A$ (А/м^2) — плотность тока инжекции. Параметр $\zeta(T) = 1 - (n_1/n_2)$ учитывает температурную зависимость инверсии, которая в (10.7.19) определялась множителем $(f_c - f_v)$. Из рис. 10.29 видно, что при $T < 50$ К $\zeta \approx 1$, а при больших T $\zeta \to 0$.

Пороговое условие. Прежде чем приступить к нахождению условия возникновения генерации в инжекционном лазере, необходимо понять природу оптических потерь. На рис.10.33 показано, что лишь часть излучения распространяется внутри активной облас-

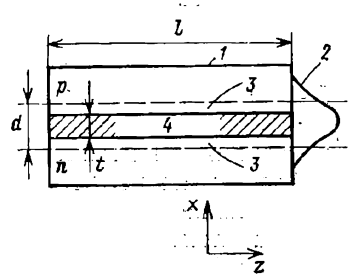


Рис. 10.33. Схематическое изображение активного слоя и поперечного (в направлении x) распределения интенсивности в лазерной моде; d — поперечный размер лазерной моды, t — толщина усиливающего слоя.

1 — полупроводниковый кристалл; *2* — профиль интенсивности поля; *3* — объем, занятый модой; *4* — активный слой

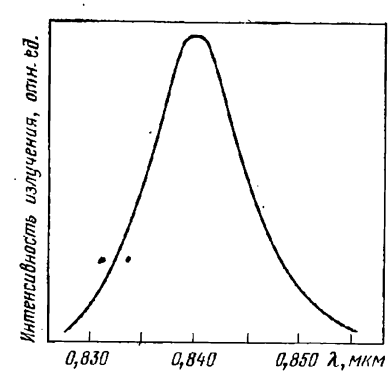


Рис. 10.34. Форма спектральной линии рекомбинационного излучения p—n-перехода в GaAs

Плотность тока инжекции 2000 А/см^2

ти, где имеет место усиление. Оставшаяся ее часть распространяется вне этой области и испытывает ослабление[1]. Обозначим показатель распределенных потерь для генерирующейся моды через α (см. задачу 10.3). Другой источник потерь — это излучение через зеркала. Для резонатора с коэффициентом отражения зеркал $\mathcal{R}$ пороговое условие (9.1.14а) принимает вид

$$\mathcal{R} \exp [(\gamma_{\text{пор}} - \alpha) L] = 1. \qquad (10.7.23)$$

Прологарифмировав это равенство и воспользовавшись (10.7.22), находим пороговую плотность тока

$$J_{\text{пор}} = \frac{8\pi\nu^2 e d n^2 \Delta\nu}{c^2 \eta_{\text{внут}} \zeta} \left(\alpha - \frac{1}{L} \ln \mathcal{R}\right), \qquad (10.7.24)$$

где $\Delta\nu = 1/g(\nu_0)$ — ширина линии перехода. Заметим, что пороговый ток пропорционален большей из величин d и t.

Пример. Рассмотрим пороговый ток инжекционного лазера на GaAs. Оценим пороговый ток инжекции лазера на GaAs при низких температурах, задавшись следующими значениями параметров: $\Delta\nu = 200$ см$^{-1}$, $\eta_{\text{внут}} \approx 1$, $\zeta \approx 1$, $(\alpha - \frac{1}{L} \ln \mathcal{R}) = 20$ см$^{-1}$, $\lambda = 0{,}84$ мкм, $n = 3{,}35$, $d = 1$ мкм. По формуле (10.7.24) получаем $J_{\text{пор}} \approx 75$ А/см^2, т. е. значение, близкое к измеренному.

Лазеры на гетеропереходах. Пороговая плотность тока, как это видно из (10.7.24), снижается по мере уменьшения размеров области локализации электромагнитного поля d и области, в которой создана инверсия t (наличие d в формуле (10.7.24) соответствует случаю $d > t$). В первых диффузионных диодах, подобных показанному на рис. 10.31, не принималось никаких мер по локализации носителей, а локализация электромагнитного поля была вызвана случайным волноводным эффектом [32—34], обусловленным перепадами показателя преломления менее, чем на 1% (рис. 10.35, *а*). Использование технологии гетеропереходов GaAs — GaAlAs [35—37] привело к созданию лазерных диодов со структурой, показанной на рис. 10.36. Здесь активная область представляет собой тонкий слой с $t \approx$ $\approx 0{,}3$ мкм. Электроны и дырки инжектируются в него из соседних n —Ga_{1-x} Al_x As и p — Ga_{1-x} Al_x As областей соответственно (рис. 10.35, *б*). Полупроводник состава Ga_{1-x} Al_x As обладает более широкой запрещенной зоной, нежели GaAs, причем ширина ее зависит от x. Благодаря этому имеются потенциальные барьеры, препятствующие диффузии инжектированных носителей из слоя GaAs.

Существенно, что у Ga_{1-x} Al_x As показатель преломления меньше, чем у GaAs. Разница Δn зависит от x и $\Delta n \approx -0{,}4x$. Это означает наличие диэлектрического волновода, обеспечивающего сильную локализацию поля (см. гл. 19). Локализация поля не только снижает пороговый ток вследствие его зависимости от d, см.

[1] Затухание в значительной мере обусловлено наличием свободных носителей (электронов в n-области и дырок в p-области), которые ускоряются полем, а затем теряют энергию при столкновениях [24].

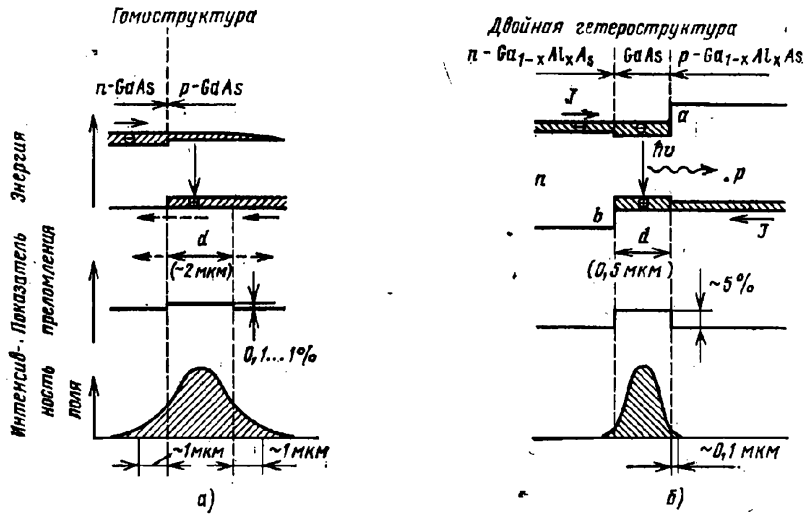


Рис. 10.35. Схематическое представление краев зон, профиля показателя преломления и распределение поля излучения в диодах GaAs с гомоструктурой и GaAlAs с двойной гетероструктурой

(10.7.24), но и уменьшает показатель потерь α, ограничивая проникновение поля в соседние p- и n-области с большими потерями. Различие по потерям обычных лазерных диодов и диодов с гетероструктурой показано в табл. 10.1. Фигурирующая там величина β_t определяется равенством $\gamma = \beta_t J$. Перечень полупроводниковых лазеров и диапазонов их генерации содержится в табл. 10.2.

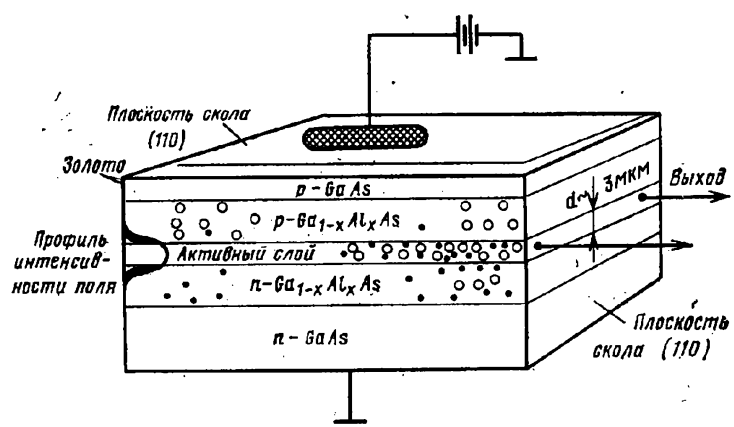


Рис. 10.36. Лазер с двойной гетероструктурой GaAs—GaAlAs.
Электроны и дырки инжектируются в активный слой GaAs и n и p слои $Ga_{1-x}Al_xAs$ соответственно. ...электроны; ooo дырки

Таблица 10.1

Характерные величины усиления и потерь для лазерных диодов с двойной гетероструктурой (ДГ) и гомоструктурой [38]. Длина диода $L=250$ мкм в обоих случаях

Параметр	ДГ (Т-300 К, $d\approx 0{,}5$ мкм)	Гомоструктура
Потери d, $см^{-1}$	~ 10	30...100
Фактор усиления, β_t, см/кА	~ 20	1...3
Пороговый ток, $J_{пор}$, $кА/см^2$	~ 1	50...100

Выходная мощность инжекционных лазеров. Вопросы, касающиеся насыщения и выходной мощности инжекционного лазера, рассматриваются в общих чертах, как и в теории обычных лазеров, изложенной в § 9.3. При увеличении тока инжекции выше порогового значения (10.7.24) возникает генерация. Вынужденное излучение укорачивает время жизни инвертированных носителей до такой величины, которой отвечает инверсия, равная пороговому значению. Зная внутренний квантовый выход излучательной рекомбинации $\eta_{внут}$, можно записать следующее выражение для мощности вынужденного излучения;

$$\mathcal{P}_{изл} = (I - I_{пор})\,\eta_{внут}\,h\nu/e. \qquad (10.7.25)$$

Часть этой мощности диссипируется внутри резонатора, а остаток выводится наружу через зеркала. Согласно (10.7.24) указанные час-

Таблица 10.2

Длина волны генерируемого излучения и рабочая температура некоторых полупроводниковых инжекционных лазеров

Материал	λ, мкм (при T К)	Источник
GaAs	0,837(4,2) 0,843(77)	[19—21]
InP	0,907(77)	[39]
InAs	3,1(77)	[40, 41]
InSb	5,26(10)	[42]
PbSe	8,5(4,2)	[43]
PbTe	6,5(12)	[44]
Ga (As_xP_{1-x})	0,65...0,84	[45]
(Ga_xIn_{1-x})As	0,84...3,5	[46]
In (As_xP_{1-x})	0,91...3,5	[47]
GaSb	1,6(77)	[48]
	9,5...28(12)	[49]
	↓ ↓	
($Pb_{1-x}Sn_x$) Te	$x=0{,}15$ $x=0{,}27$	
($Ga_{1-x}Al_x$) As	0,69...0,85	
InGaP	0,5...0,7	

ти мощности пропорциональны α и $-L^{-1}\ln R$ соответственно. Теперь можно написать выражение для выходной мощности

$$\mathscr{P}_{\text{вых}} = \frac{(I - I_{\text{пор}})\,\eta_{\text{внут}}\,h\nu}{e}\left[\frac{(1/L)\ln(1/\mathscr{R})}{\alpha + (1/L)\ln(1/\mathscr{R})}\right]. \qquad (10.7.26)$$

Внешний квантовый выход определяется как отношение прироста числа фотонов к приросту числа инжектируемых носителей

$$\eta_{\text{внеш}} = \frac{d(\mathscr{P}_{\text{вых}}/h\nu)}{d\,[I - I_{\text{пор}})/L]}. \qquad (10.7.27)$$

Используя (10.7.26), получаем соотношение

$$\eta_{\text{внеш}}^{-1} = \eta_{\text{внут}}^{-1}\,[\alpha L/\ln(1/\mathscr{R}) + 1], \qquad (10.7.28)$$

которое дает возможность определить $\eta_{\text{внут}}$ по снятой экспериментально зависимости $\eta_{\text{внеш}}$ от L. При температуре $T = 0$ К в GaAs $\eta_{\text{внут}} \approx 0{,}7$.

К. п. д. инжекционных лазеров. Если к диоду приложено напряжение U, то вводимая в него электрическая мощность равна VI. Следовательно, к. п. д. преобразования входной мощности электрического тока в выходную мощность излучения лазера можно записать как

$$\eta = \frac{\mathscr{P}_{\text{вых}}}{VI} = \eta_{\text{внут}}\frac{I - I_{\text{пор}}}{I}\left(\frac{h\nu}{eV}\right)\frac{\ln(1/\mathscr{R})}{\alpha L + \ln(1/\mathscr{R})}. \qquad (10.7.29)$$

Из рис. 10.30 видно, что $eU \gtrsim h\nu$. Практически небольшое падение напряжения на объемном сопротивлении диода приводит к тому, что eU несколько больше $h\nu$. Поэтому при значительном превышении порога ($I \gg I_{\text{пор}}$) и оптимальном коэффициенте отражения выходного зеркала (см. § 9.3), удовлетворяющем условию $(1/L)\ \text{Ln}\ (1/\mathscr{R}) \gg \alpha$, значение η приближается к $\eta_{\text{внут}}$. Поскольку параметр $\eta_{\text{внут}}$ велик (0,7 для GaAs), инжекционные лазеры обладают наибольшим к. п. д. среди всех известных типов лазеров.

10.8. Лазеры на органических красителях

Множество органических красителей (т. е. соединений, обладающих сильным поглощением в видимой части спектра) эффективно люминесцируют. Спектр их люминесценции, как правило, широк и располагается в видимом диапазоне. С последним обстоятельством связана возможность значительной перестройки частоты лазеров на красителях [50—52].

Рис. 10.37 дает схематическое представление об энергетических уровнях молекулы органического красителя, такого, например, как родамин 6G.

Состояние S_0 — основное, а S_1, S_2, T_1, T_2 — возбужденные электронные состояния, т. е. состояния, в которых один из электронов переведен на возбужденную орбиту. Характерное расстояние между S_0 и S_1 составляет около 20 000 см$^{-1}$. В синглетном состоя-

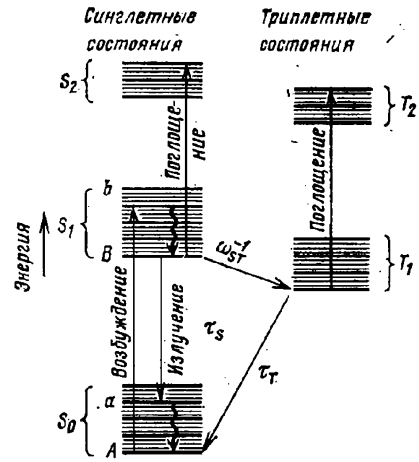


Рис. 10.37. Схематическое представление энергетических уровней молекулы органического красителя.

——— колебательные состояния; ——— вращательная тонкая структура. Возбуждение и лазерное излучение представлены переходами $A \longrightarrow b$ и $B \longrightarrow a$ соответственно

нии (S) спин возбужденного электрона антипараллелен спину остальной части молекулы, тогда как в триплетном состоянии (T) спины параллельны. Синглет-триплетный и триплет-синглетный переходы сопровождаются изменением спина и они значительно слабее переходов между двумя синглетными или триплетными состояниями.

Переходы между уровнями одинаковой мультиплетности разрешены правилами отбора по спину (они происходят без изменения спина) и играют основную роль в поглощении и флуоресценции. Характерная окраска органического красителя обусловлена поглощением на переходе $S_0 \rightarrow S_1$.

Каждому из синглетных и триплетных состояний соответствует система колебательных подуровней, которые изображены на рис.10.37 жирными горизонтальными линиями. Дискретный спектр колебательных состояний органической молекулы был детально рассмотрен в § 10.6. Типичное расстояние между двумя соседними колебательными подуровнями составляет примерно 1500 $см^{-1}$. Тонкая структура колебательных подуровней обусловлена вращением молекулы. Расстояние между вращательными компонентами составляет примерно 15 $см^{-1}$.

В процессе накачки лазера молекула сначала переходит на некоторый колебательно-вращательный подуровень состояния S_1, поглощая фотон. Затем следует быстрый безызлучательный переход на нижние подуровни того же состояния S_1. Большинство возбужденных молекул далее переходят спонтанно в состояние a, излучив при этом фотон частоты $\nu = (\mathscr{E}_b - \mathscr{E}_a)/h$. Этот процесс характеризуется временем $\tau_s \sim 10^{-8} \ldots 10^{-9}$ с. Однако имеется некоторая небольшая вероятность $w_{ST}\,\tau_s$ того, что возбужденная молекула перейдет в триплетное состояние T_1. Здесь w_{ST} — вероятность перехода $S_1 \rightarrow T_1$ для одной молекулы. Так как этот переход запрещен правилами отбора по спину, то w_{ST} обычно значительно меньше τ_s^{-1} и, следовательно, $w_{ST}\,\tau_s \ll 1$. Время жизни τ_T, ограниченное переходом $T_1 \rightarrow S_0$, относительно велико, этот переход также запрещен и может варьироваться от 10^{-7} до 10^{-3} с в зависимости от условий эксперимента [53]. Вследствие относительно большого времени жизни триплетное состояние T_1 действует как ловушка для возбужденных молекул. Молекулярное поглощение, ассоциирующееся с разре-

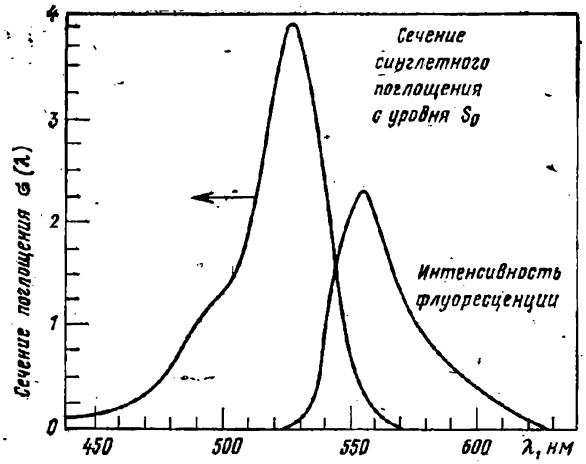


Рис. 10.38. Спектры синглетного поглощения и флуоресценции раствора родамина *6G* с концентрацией 10^{-4} моля в этаноле [53]

Интенсивность флуоресценции приведена в относительных единицах, за единицу сечения поглощения принято 10^{-16} см^2

шенным переходом $T_1 \rightarrow T_2$, весьма значительно. Если рабочая частота лазера $\nu \approx (\mathscr{E}_b - \mathscr{E}_a)/\hbar$ попадает в полосу триплетного поглощения, то накопление молекул в состоянии T_1 увеличивает потери, а значит, повышает порог генерации лазера. Поэтому на многих органических красителях лазеры генерируют только в импульсном режиме. В этом случае импульсы накачки с крутыми фронтами (для накачки часто используются другие лазеры [51]) создают необходимую для генерации населенность уровня S_1. Генерация продолжается до тех пор пока в состоянии T_1 не накопится слишком много молекул.

Еще одним важным свойством молекул является сдвиг спектра поглощения, обычно в область более коротких длин волн, по отношению к соответствующему спектру флуоресценции. На рис. 10.38 показаны спектры поглощения и флуоресценции водного раствора родамина 6G, используемого в качестве активной среды лазера непрерывного действия [54]. Благодаря указанному сдвигу генерируемое излучение, спектр которого лежит вблизи максимума линии флуоресценции, поглощается слабо.

Типичные формы импульсов накачки и генерации лазера на красителе показаны на рис. 10.39. Тушение генерации, по всей видимости, происходит за счет триплетного поглощения.

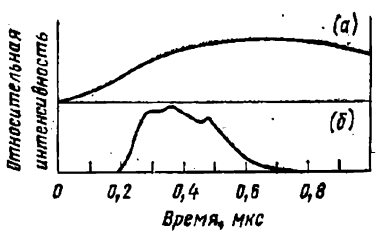


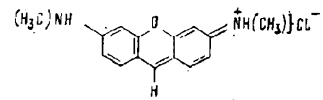
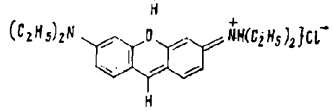
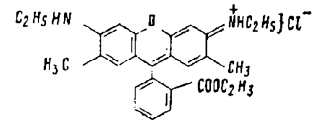
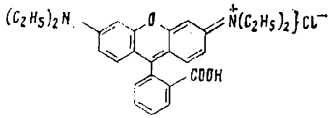
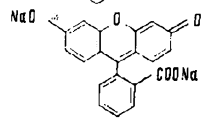
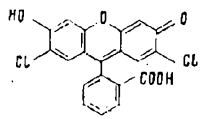
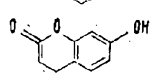
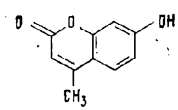
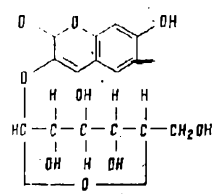
Рис. 10.39. Импульс накачки линейной ксеноновой лампы, включенной в контур с малой индуктивностью (*а*). Импульс, генерируемый лазером на растворе родамина *6G* с концентрацией 10^{-5} моля в метаноле [52] (*б*)

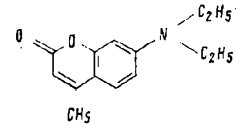
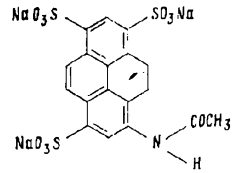
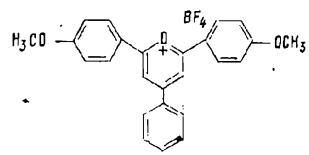
Таблица 10.

Молекулярные
нерации соотве

Краситель
Акридиновый красный
Пиронин В
Родамин 6G
Родамин В
Na-флуоресцеин
2, 7-дихлорфлуоресцеин
7-гидроксикумарин
4-метилумбеллиферон
Эскулин

тýры красителей, типы растворителей и длины волн ге-ющих лазеров (53)

Структура	Растворитель	Диапазон генерации, нм
	EtOH	Красный 600—630
	MeOH H_2O	Желтый 570—610
	EtOH MeOH H_2O DMSO	Желтый
	Полиметилметакрилат EtOH MeOH	Красный 605—635
	Полиметилметакрилат EtOH H_2O	Зеленый 530—560
	EtOH	Зеленый 530—560
	H_2O ($pH \sim 9$)	Синий 450—470
	H_2O ($pH \sim 9$)	Синий 450—470
	H_2O ($pH \sim 9$)	Синий 450—470

Краситель	Структура	Растворитель	Диапазон генерации, нм
7-диэтиламино-4-метилкумарин		EtOH	Синий
Ацетомидопирен-сульфоновая кислота (натриевая соль)		MeOH H_2O	Желто-зеленый
Пирилиевая соль		MeOH	Зеленый

В табл. 10.3 приведены сведения о некоторых распространенных красителях, используемых в качестве активных сред лазеров. Широкий спектр флуоресценции органических красителей предопределяет большой диапазон перестройки частоты генерации лазеров на их основе. Спектр флуоресценции, показанный на рис. 10.38, имеет, например, ширину $\Delta\nu \approx 1000$ см$^{-1}$.

Один из изящных способов перестройки реализуется при замене одного из зеркал резонатора дифракционной решеткой [55]. Дифракционная решетка отражает падающее излучение точно в обратном направлении, если выполнено условие

$$2d\cos\theta = m\lambda, \quad m = 1,2, \ldots, \qquad (10.8.1)$$

где d — постоянная решетки, θ — угол между падающим лучом и его проекцией на поверхность решетки, m — порядок дифракции. Такая схема использования решетки известна как схема Литрова. Когда в качестве одного из зеркал резонатора лазера используется решетка, то длина волны генерируемого излучения будет такой, которая удовлетворяет условию (10.8.1).

Перестройка частоты может также достигаться помещением дисперсионных элементов (призм, фильтров и т. п.) внутрь резонатора [56] [1].

[1] Данный параграф носит весьма конспективный характер и позволяет составить лишь самое общее представление об очень важном классе лазеров. Читателю, заинтересованному в получении более конкретных сведений о лазерах на красителях, можно рекомендовать изданную в руском переводе книгу [63]. — *Прим. ред.*

Задачи

10.1. Рассмотрите задачу о выжигании провала для перехода с длиной волны 1,15 мкм в He — Ne лазере. Задано: $t_1 = 10^{-8}$с; $t_2 = 10^{-7}$ с, индексы 1 и 2 относятся к уровням $2p_4$ и $2s_2$ соответственно.

(а) Вычислите доплеровскую ширину $\Delta\nu_D$ при $T = 300$ К.

(б) Найдите величину однородного уширения линии $\Delta\nu_{\text{одн}}$. Чему равно $\Delta\nu_D/\Delta\nu_{\text{одн}}$?

(в) Вычислите поток мощности внутри оптического резонатора, при котором $\Delta\nu_{\text{провала}} = 2\Delta\nu_{\text{одн}}$.

(г) Какой будет при этом выходная мощность (задать какое-либо реальное значение пропускания зеркал и диаметра моды)?

(д) При каком уровне мощности внутри резонатора уширяется вся линия в целом?

(е) Какой длины должен быть резонатор, чтобы «провалы» соседних продольных мод не перекрывались: 1) для мощности, близкой к нулю; 2) для $\mathscr{P}_{\text{внут}} = 10$ Вт/см^2?

10.2. Используя данные из этой главы и работы [15], оцените насыщающую интенсивность для лазера на CO_2 при следующих парциальных давлениях: CO_2 — 10 торр (1333 Па), N_2 — 20 торр (2666 Па).

10.3. Как можно определить постоянную распределенных потерь α инжекционного лазера по результатам измерений порогового тока для двух различных значений коэффициента отражения зеркал $\mathscr{R}$?

10.4. Покажите, что если ширина моды d в инжекционном лазере меньше ширины активной области t, то показатель усиления выражается формулой (10.7. 22), но с заменой d на t.

10.5. Покажите, что матричный элемент возмущения $\mathscr{H}'_{vc}$ можно записать не только в форме (10.7.7), но и как

$$\mathscr{H}'_{vc} = \frac{eh^2\mathscr{E}}{m(\mathscr{E}_c - \mathscr{E}_v)} \int u^*_{vk} \frac{\partial u_{ck'}}{\partial x} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}}\, dV,$$

где $\mathscr{E}_c$ и $\mathscr{E}_v$ — энергии состояний. Считайте, что $k_{\text{опт}} = 0$.

10.6. Вычислите максимальный показатель усиления $\gamma(\omega)$ и частоту, которая ему соответствует, задавшись следующими значениями для кристалла GaAs: $N_{\text{дыр}} = 10^{18}$ см$^{-3}$; $N_{\text{эл}} = 10^{18}$ см$^{-3}$; $K = 6\cdot10^3$ см$^{-1}$ (эВ)$^{-1/2}$; $T = 0$ К; $m_v = 0{,}1$; $m_e = 0{,}07$; $\mathscr{E}_g = 1{,}45$ эВ.

10.7. Спектр мод резонатора Фабри — Перо не эквидистантен, если заполняющая его среда обладает дисперсией. Покажите, что интервал между соседними продольными модами в этом случае составляет $\Delta\lambda = \lambda^2/2nL\,[1 - (\lambda/n)(dn/d\lambda)]$, где n — показатель преломления; L — длина резонатора. Этим объясняется наблюдаемая на опыте неэквидистантность частот в спектре генерации инжекционных лазеров.

10.8. Выведите формулу, выражающую сечение поглощения некоторого перехода через спонтанное время жизни.

10.9. Выведите условие (10.8.1) применительно к схеме Литрова с дифракционной решеткой, для которой направления падения и отражения параллельны.

10.10. Оцените: а) величину показателя усиления $\gamma(\nu)$ раствора родамина 6G в этаноле (концентрация $\cdot 10^{-4}$ моль/литр), полагая, что максимальные значения сечений флуоресценции и поглощения сравнимы. Используйте данные из рис. 10.38;

б) спонтанное время жизни для перехода $S_1 - S_0$;

в) пороговую мощность накачки в непрерывном режиме, считая, что поглощается 50% мощности накачки, а квантовый выход равен 100%.

Глава 11

МОДУЛЯЦИЯ ДОБРОТНОСТИ И СИНХРОНИЗАЦИЯ МОД В ЛАЗЕРАХ

В гл. 9 и 10 изложен материал по лазерам в режиме непрерывной генерации. Однако с точки зрения многих прикладных задач более важным оказывается импульсный режим работы лазера. В процессе генерации импульсов накопленная активной средой энергия накачки может быть излучена в течение очень короткого промежутка времени, вследствие чего резко возрастает пиковая мощность. Это имеет решающее значение для таких технических применений лазера, как обработка и сварка материалов. Если касаться вопроса о применениях предельно коротких лазерных импульсов, то уместно вспомнить об исследовании быстро протекающих переходных процессов, длящихся зачастую менее 10^{-12} с.

В данной главе детально рассмотрены способы модуляции добротности и синхронизации мод, используемые для генерации коротких импульсов.

11.1. Модуляция добротности

Метод модуляции добротности [1—3] широко применяется для получения интенсивных коротких импульсов генерации в лазерах. Принцип работы лазера с модулированной добротностью состоит в следующем: добротность резонатора лазера снижается (т. е. потери увеличиваются) на время накачки с тем, чтобы коэффициент усиления возрос до очень большого значения, но не превзошел нового порога генерации. В этот период времени активная среда накапливает энергию. Когда инверсия достигает своего максимального значе-

ния, добротность резонатора быстро восстанавливается до прежнего высокого значения. При этом усиление оказывается намного выше порогового, что приводит к быстрому возрастанию поля излучения и одновременному сбросу инверсии вследствие индуцированных переходов. В итоге значительная часть энергии накачки, запасенной возбужденными атомами, преобразуется в энергию фотонов, заполняющих резонатор. С каждым пробегом по резонатору при отражении от зеркал часть их, равная $1 - \mathcal{R}$, просачивается наружу. Спад интенсивности за вершиной импульса определяется величиной потерь и происходит с постоянной времени

$$t_c \approx L/c\,(\alpha L - \ln \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}),$$

которая совпадает с (7.4.3)[1].

Как из теории, так и из эксперимента следует, что процесс излучения гигантского импульса длится около $2 \cdot 10^{-8}$ с [2]. На таком отрезке времени можно пренебречь релаксацией населенностей и действием накачки. Будем также считать, что переключение добротности резонатора происходит мгновенно.

Для описания процесса генерации можно использовать в качестве переменных: Φ — полное число фотонов в резонаторе; $n \equiv \equiv [N_2 - (g_2/g_1)N_1]\,V$ — общую инверсию, где V — объем моды. Показатель усиления пропорционален n. Интенсивность излучения I возрастает по мере прохождения активной среды по закону $I(z) = \equiv I_0 \exp(\gamma z)$ в соответствии с уравнением $dI/dz = \gamma I$. Наблюдатель, движущийся вместе с волной, обнаружит нарастание интенсивности со скоростью

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dz}\frac{dz}{dt} = \gamma c I,$$

откуда следует, что инкремент нарастания интенсивности во времени равен γc. Если лазерный стержень имеет длину l, а длина всего резонатора L, тогда в каждый момент времени только l/L часть фотонов испытывает усиление и усредненный инкремент оказывается равным $\gamma c l/L$. Следуя [4], запишем

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi\left(\frac{\gamma c l}{L} - \frac{1}{t_c}\right), \qquad (11.1.1)$$

где $-\Phi/t_c$ — число фотонов, в единицу времени покидающих резонатор благодаря наличию внутренних потерь, а также выводу излучения через зеркала. С переходом к безразмерному времени $\tau = \equiv t/t_c$ уравнение (11.1.1) приобретает вид

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \Phi\left(\frac{\gamma}{L/c l t_c} - 1\right) = \Phi\left(\frac{\gamma}{\gamma_{\text{пор}}} - 1\right),$$

[1] Предполагается, что c — скорость света в среде, заполняющей резонатор. Поэтому показатель преломления в явном виде в эту и последующие формулы не входит. — *Прим. ред.*

[2] Имеются в виду твердотельные лазеры. — *Прим. ред.*

где $\gamma_{\text{пор}} = L/clt_c$ — минимальная величина показателя усиления, при которой еще поддерживается генерация (т. е. $d\Phi/d\tau = 0$). Согласно (8.4.4), γ пропорциональна инверсии n, последнее уравнение можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \Phi\left(\frac{n}{n_{\text{пор}}} - 1\right), \qquad (11.1.2)$$

где $n_{\text{пор}} = \Delta n_{\text{пор}} V$ — полная инверсия на пороге, определяемая выражением (9.1.16). Член $\Phi n/n_{\text{пор}}$ в (11.1.2) определяет число фотонов, генерируемых за время t_c, принятое в качестве новой единицы. Поскольку каждый фотон возникает в результате индивидуального акта индуцированного излучения, его появление сопровождается уменьшением полной инверсии на $\Delta n = -2$. Следовательно, можно сразу записать

$$\frac{dn}{d\tau} = -2\Phi\frac{n}{n_{\text{пор}}}. \qquad (11.1.3)$$

Оба уравнения (11.1.2.) и (11.1.3) совместно описывают изменение Φ и n в процессе генерации. Они довольно просто решаются численными методами. Но некоторые результаты удается получить аналитически.

Поделив (11.1.2) на (11.1.3), приходим к уравнению

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{n_{\text{пор}}}{2n} - \frac{1}{2},$$

интегрируя которое, находим

$$\Phi - \Phi_{\text{нач}} = \frac{1}{2}\left[n_{\text{пор}} \ln\frac{n}{n_{\text{нач}}} - (n - n_{\text{нач}})\right].$$

Считая, что начальное число фотонов в резонаторе ($\Phi_{\text{нач}}$) пренебрежимо мало, получим

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[n_{\text{пор}} \ln\frac{n}{n_{\text{нач}}} - (n - n_{\text{нач}})\right] \qquad (11.1.4)$$

— соотношение между числом фотонов в резонаторе Φ и инверсией n в произвольный момент времени. В пределе $t \gg t_c$ плотность фотонов Φ обращается в нуль. Подставляя это значение в (11.1.4), приходим к следующему выражению для инверсии $n_{\text{кон}}$, оставшейся после генерации импульса:

$$\frac{n_{\text{кон}}}{n_{\text{нач}}} = \exp\left(\frac{n_{\text{кон}} - n_{\text{нач}}}{n_{\text{пор}}}\right). \qquad (11.1.5)$$

Это уравнение вида $x/a = \exp(x - a)$, где $x = n_{\text{кон}}/n_{\text{пор}}$, $a = n_{\text{нач}}/n_{\text{пор}}$, и его можно решить графически (или численно). Результат представлен на рис. 11.1.

Заметим, что доля запасенной в активной среде энергии, которая преобразуется в энергию лазерного излучения, составляет $(n_{\text{нач}} - n_{\text{кон}})/n_{\text{нач}}$. С ростом $n_{\text{нач}}/n_{\text{пор}}$ эта величина стремится к единице.

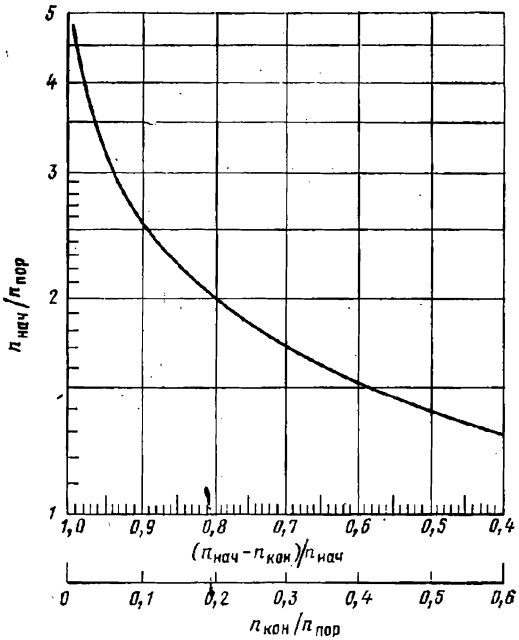
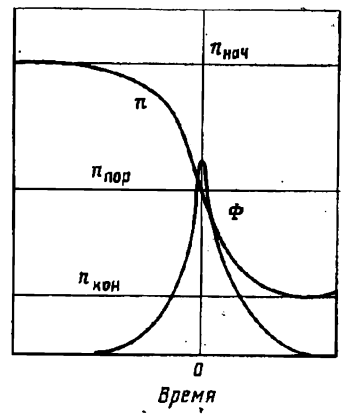


Рис. 11.1. Коэффициент использования запасенной в активной среде энергии $(n_{нач}-n_{кон})/n_{нач}$ и остаточная инверсия $n_{кон}/n_{нач}$ после окончания гигантского импульса [4]

Рис. 11.2. Изменения инверсии n и числа фотонов в резонаторе Ф в процессе генерации гигантского импульса [4]



Мгновенная мощность выходного излучения лазера $\mathcal{P} = \Phi h\nu/t_c$ с помощью (11.1.4) записывается как

$$\mathcal{P} = \frac{h\nu}{2t_c}\left[n_{пор}\ln\frac{n}{n_{нач}} - (n - n_{нач})\right]. \qquad (11.1.6)$$

Особый интерес представляет пиковая мощность. Полагая $d\mathcal{P}/dn = 0$, находим, что максимум мощности излучения достигается при $n = n_{пор}$. Подстановка $n = n_{пор}$ в (11.1.6) дает для пиковой мощности выражение

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{h\nu}{2t_c}\left[n_{пор}\ln\frac{n_{пор}}{n_{нач}} - (n_{пор} - n_{нач})\right]. \qquad (11.1.7)$$

Если начальная инверсия намного превосходит пороговую величину (велика добротность), из (11.1.7) следует:

$$\mathcal{P}_{max} \approx n_{нач}\, h\nu/2t_c. \qquad (11.1.8)$$

Так как мощность $\mathcal{P}$ в каждый момент времени связана с числом фотонов соотношением $\mathcal{P} = \Phi h\nu/t_c$, из (11.1.8) вытекает, что максимальное число фотонов, запасенных внутри резонатора, равно $n_{нач}/2$. Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Если $n_{нач} \gg n_{пор}$, фронт импульса до его максимума короче t_c, так что в максимуме импульса, когда $n = n_{пор}$, большинство фотонов, излученных ранее, все еще находится в резонаторе. Кроме

того, при $n_{нач} \gg n_{пор}$ число этих фотонов $(n_{нач} - n_{пор})/2$ весьма близко к $n_{нач}/2$.

Типичное численное решение системы (11.1.2), (11.1.3) приведено на рис. 11.2. Для того чтобы инициировать процесс излучения импульса, необходимо, чтобы $\Phi_{нач} \neq 0$. В противном случае реализуется тривиальное решение $\Phi = 0$, $n = n_{нач}$.

Величина $\Phi_{нач}$ обычно отождествляется с числом спонтанно излученных фотонов, присутствующих в рассматриваемой моде в момент $t = 0$.

Как уже было установлено выше, плотность фотонов, равно как и мощность излучения, достигает максимального значения в тот момент, когда $n = n_{пор}$. Поэтому индуцированные переходы атомов

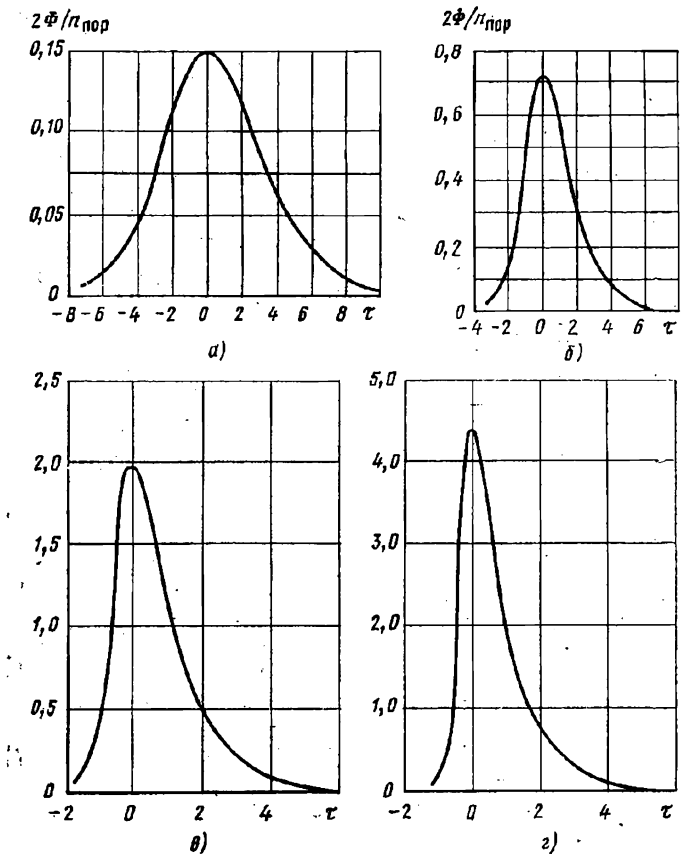


Рис. 11.3. Форма гигантского импульса при различных начальных превышениях порога:

а) $n_{нач}/n_{пор} = 1{,}649$; б) $n_{нач}/n_{пор} = 2{,}718$; в) $n_{нач}/n_{пор} = 4{,}482$; г) $n_{нач}/n_{пор} = 7{,}389$

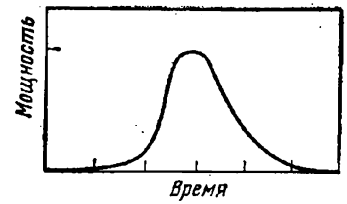


Рис. 11.4. Осциллограмма гигантского импульса рубинового лазера. Цена деления временной шкалы 20 нс

с верхнего уровня на нижний продолжают уменьшать инверсию, которая достигает в конце концов значения $n_{кон} < n_{пор}$.

Численные решения (11.1.2), (11.1.3) при различной начальной инверсии $n_{нач}/n_{пор}$ представлены на рис. 11.3. Заметим, что при $n_{нач} \gg n_{пор}$ время нарастания импульса оказывается короче t_c, тогда как время спада близко к t_c. Дело в том, что указанным этапам формирования импульса соответствуют существенно разные соотношения между усилением и потерями в резонаторе. В частности, спад интенсивности происходит почти так же, как в «холодном» резонаторе, так как потери на этом этапе превалируют, и поэтому характерная постоянная времени спада приближается к t_c.

На рис. 11.4 приведена осциллограмма гигантского импульса. Гигантские импульсы излучения лазеров широко используются на практике в тех случаях, когда необходима высокая пиковая мощность и малая длительность. Конкретными областями применения гигантских импульсов являются: нелинейная оптика, дальнометрия, механическая обработка материалов, сварка, инициирование химических реакций, диагностика плазмы.

Пример.

Рубиновый лазер в режиме генерации гигантского импульса. Рассмотрим стержень рубина с плотностью ионов хрома $N = 1{,}58 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$. Его показатель поглощения $\alpha \approx 2$ см$^{-1}$ при 300 К. Другие характеристики таковы: $l =$ (длина рубинового стержня) $= 10$ см, $A =$ (поперечное сечение моды) $= 1$ см^2, $1 - \mathcal{R} =$ (потери за один проход) $= 20\%$. Потери выражены через эффективный коэффициент отражения с включением в него всех источников потерь.

Согласно (8.4.4) показатель поглощения пропорционален $N_1 g_2/g_1 - N_2$ и в конкретно рассматриваемом случае равен

$$\alpha\,(\text{см}^{-1}) = 2\,\frac{N_1 - N_2\,(g_1/g_2)}{1{,}58 \cdot 10^{20}}. \qquad (11.1.9)$$

Отсюда при комнатной температуре, когда $N_2 = 0$, $N_1 = 1{,}58 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$, как раз и получается $\alpha = 2$ см$^{-1}$. Выражение для показателя усиления следует непосредственно из (11.1.9):

$$\gamma\,(\text{см}^{-1}) = 2\,\frac{N_2\,(g_1/g_2) - N_1}{1{,}58 \cdot 10^{20}} = \frac{2ng_1/g_2}{1{,}58 \cdot 10^{20}\,V}, \qquad (11.1.10)$$

где n — общая инверсия в образце, а $V = Al$ — объем кристалла.

Порог достигается, если коэффициент усиления за проход равняется единице:

$$e^{\gamma_{\text{пор}} L}\mathcal{R} = 1 \text{ или } \gamma_{\text{пор}} = -\frac{1}{L}\ln\mathcal{R}. \qquad (11.1.11)$$

Подставив (11.1.10) в пороговое условие (11.1.11), задав приведенные выше значения параметров, а также $g_1/g_2 = 2$, получим $n_{\text{пор}} = 8{,}8\cdot 10^{18}$. (11.1.12)

Считая, что начальная инверсия $n_{\text{нач}} = 1{,}64 n_{\text{пор}} = 1{,}44\cdot 10^{19}$, находим из (11.1.8), что пиковая мощность

$$\mathcal{P}_{\max} \approx n_{\text{нач}} h\nu/2t_c, \qquad (11.1.13)$$

где $t_c \approx L/c\,(1-\mathcal{R}) \approx 2{,}5\cdot 10^{-9} c$. Подстановка численных значений величин в (11.1 8) дает для пиковой мощности $\mathcal{P}_{\max} = 8\cdot 10^8$ Вт. Полная энергия импульса оказывается равной $E \approx n_{\text{нач}} h\nu/2 \approx 2$ Дж, в то время как длительность импульса составляет (см. рис. 11.3) примерно $7t_c = 17{,}5\cdot 10^{-9}$ с.

Методы модуляции добротности. Вот некоторые из способов, используемых для модуляции добротности лазера.

1. Один из двух концевых отражателей (зеркал) равномерно вращается вокруг оси. Оптические потери оказываются очень высокими на протяжении всего цикла, за исключением короткого интервала, когда расположение зеркал близко к параллельному.

2. В оптический резонатор лазера вводится насыщающийся поглотитель, например, просветляющийся краситель [5]. Его поглощение уменьшается (насыщается) с ростом интенсивности света, предотвращая снятие инверсии в течение всей ранней стадии генерации, где медленно нарастающая интенсивность излучения еще недостаточна для насыщения поглотителя. С ростом интенсивности потери падают, хотя и не так резко, как при мгновенном включении добротности[1]).

3. В резонатор лазера помещается электрооптический кристалл (или жидкостная ячейка Керра, играющая роль затвора), управляемый внешним напряжением. Этот способ обеспечивает возможность точного контроля потерь в резонаторе. Работа электрооптического затвора иллюстрируется рис. 11.5 и будет подробно обсуждаться ниже. Управление фазовыми сдвигами в электрооптическом кристалле при подаче на него напряжения подробно рассмотрено в гл. 14.

На время накачки активной среды светом газоразрядной лампы к кристаллу прикладывается напряжение, обеспечивающее фазовый сдвиг (запаздывание) $\pi/2$ между двумя ортогональными компонентами (x' и y'), на которые может быть разложено линейно-поляризованное (по x) лазерное поле. По выходе из кристалла в точке f

[1]) Второй способ отличается от первого и третьего тем, что потери в резонаторе регулируются автоматически, без какого-либо вмешательства извне. По этому признаку он относится к категории пассивных способов модуляции добротности, а два других — к активным. Аналогично классифицируются и методы синхронизации мод, о которых речь пойдет далее. — *Прим. ред.*

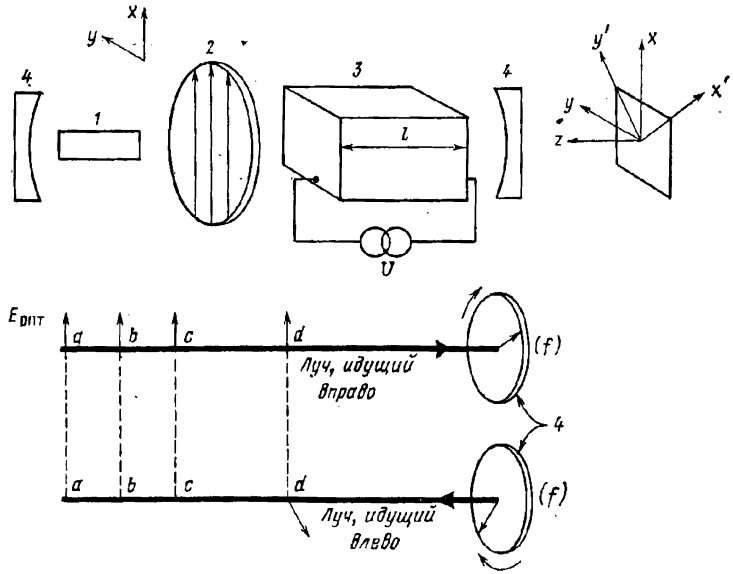


Рис. 11.5. Схема лазера с электрооптической модуляцией добротности резонатора:

1 — активный элемент; *2* — поляризатор; *3* — электрооптический кристалл; *4* — зеркала резонатора.

Луч, распространяющийся вправо. В точке d поле линейно поляризовано вдоль оси x:

$$E_{x'} = (E/\sqrt{2}) \cos \omega t;$$

$$E_{y'} = (E/\sqrt{2}) \cos \omega t.$$

В точке f поле поляризовано по кругу:

$$E_{x'} = (E/\sqrt{2}) \cos (\omega t + kl + \pi/2);$$

$$E_{y'} = (E/\sqrt{2}) \cos (\omega t + kl).$$

Луч, распространяющийся влево. В точке f поле поляризовано по кругу

$$E_{x'} = -(E/\sqrt{2}) \cos (\omega t + kl + \pi/2);$$

$$E_{y'} = -(E/\sqrt{2}) \cos (\omega t + kl);$$

В точке d поле линейно поляризовано вдоль оси y:

$$E_{x'} = (E/\sqrt{2}) \cos (\omega t + 2kl + \pi);$$

$$E_{y'} = (E/\sqrt{2}) \cos (\omega t + 2kl).$$

пучок, распространяющийся вправо, будет иметь круговую поляризацию. После отражения от правого зеркала свет вновь проходит через кристалл. В результате полное запаздывание по фазе на π приводит к тому, что поле в точке d оказывается линейно-поляризованным вдоль y и не пропускается поляризатором. Таким образом, при подаче напряжения на кристалл потери возрастают и генерация оказывается невозможной. Включение добротности производится в тот момент, когда инверсия достигает максимума. Оно осуществляется снятием напряжения с электрооптического кристалла, что устраняет запаздывание по фазе между нормальными волнами. Поляризация излучения потерь не меняется при прохождении через кристалл и добротность восстанавливается до первоначальной величины [1)].

[1)] Вопросы, касающиеся режима генерации гигантских импульсов, изложены в монографиях [30, 31]. О лазерах с просветляющимися фильтрами см. монографию [32]. — *Прим. ред.*

11.2. Синхронизация мод лазера с неоднородно-уширенной линией усиления [6—8]

Синхронизация мод представляет собой одно из наиболее важных направлений развития лазерной техники. Она позволяет получать интенсивные импульсы длительностью короче чем 10^{-12} с.

Вначале рассмотрим явление синхронизации мод в лазере с неоднородно уширенной линией усиления наиболее простым образом, уделяя основное внимание физике процесса. За этим последует строгий математический анализ.

В активных средах с неоднородно-уширенной линией атомы, отличающиеся энергией перехода, независимы. Сильное монохроматическое поле насыщает лишь ограниченный участок спектральной линии, проявляясь в виде провала на ее контуре (см § 8.7). Линия же с однородным уширением насыщается как целое, и это видно из рис. 8. 4, *а*. Специфика уширения отражается на характере спектра генерации. Если линия уширена однородно, то в генерации участвует (рис. 11.6, *а*) только одна мода, обладающая наименьшим порогом. Дело в том, что установившееся усиление на частоте генерирующей моды ν_0 в точности равно потерям (см. § 9.3.) Поскольку на контуре однородной линии не могут образовываться провалы, усиление для всех других мод оказывается ниже пороговой величины.

Посмотрим теперь, как поведет себя лазер с неоднородным уширением, если постепенно увеличивать усиление (рис. 11.6, *г*). Вна-

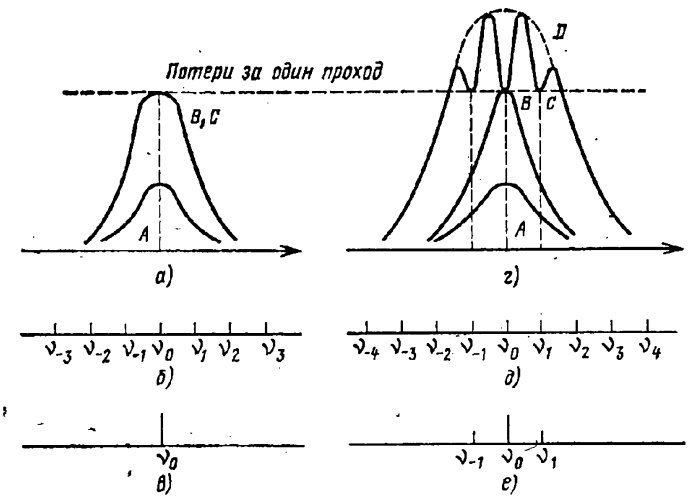


Рис. 11.6. Контур усиления за один проход через спектрально-однородную активную среду:

A — ниже порога, *B* — на пороге, *C* — значительно выше порога (*а*). Спектр собственных частот резонатора (*б*). Спектр генерации (возбуждается одна мода) (*в*). Контур усиления за один проход через спектрально-неоднороднуюю активную среду (*г*): *A* — ниже порога, *B* — на пороге, *C* — значительно выше порога, *D* — при той же накачке, что и *C*, но в отсутствие насыщения (вне резонатора). Спектр собственных частот резонатора (*д*). Спектр генерации, соответствующий уровню накачки *C* (*е*).

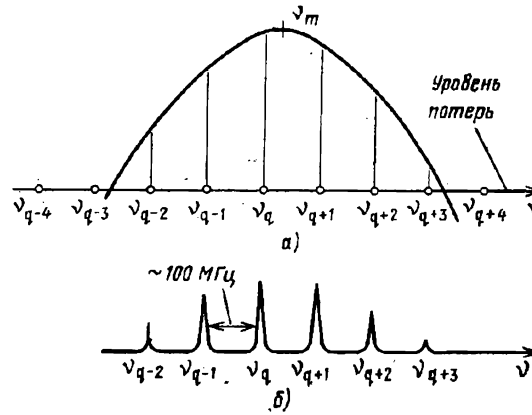


Рис. 11.7. Доплеровский контур усиления Ne на длине волны $\lambda=0{,}6328$ мкм и частоты продольных мод резонатора, попадающие внутрь этого контура (*а*). Снятый с помощью сканирующего интерферометра спектр генерации He—Ne лазера, соответствующий возбуждению шести продельных мод [9] (*б*)

чале порога достигает только одна мода (кривая B на рис. 11.6, *г*) и усиление на частоте ν_0 фиксируется точно на уровне потерь. Однако ничто не мещает усилению на других частотах возрастать по мере увеличения накачки. Этот рост усиления достигается за счет атомов, резонансные частоты которых отличаются от ν_0. Таким образом, повышение уровня накачки выводит в генерацию другие продольные моды. Поскольку коэффициент усиления на каждой из генерирующихся частот фиксирован, контур усиления имеет провалы на этих частотах [1)].

Спектр многомодовой генерации He — Ne лазера на линии 0,6328 мкм показан на рис. 11.7.

Синхронизация мод. В лазере на активной среде с неоднородным уширением генерация осуществляется на нескольких частотах, разделенных согласно (7.3.4) интервалом [2)] $\omega_{q+1} - \omega_q = \Omega = \pi c/L$. Обратимся теперь к электромагнитному полю, отвечающему такой многомодовой генерации. Рассмотрим поле в некоторой произвольной точке, например, на зеркале резонатора. В комплексной форме оно запишется как

$$E(t) = \sum_n E_n e^{i[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi_n]}, \qquad (11.2.1)$$

где сумма распространяется на все моды, участвующие в генерации, а ω_0 — частота одной из них, выбранная в качестве опорной. Символом ω_n обозначена фаза n-й моды. Одно из свойств (11.2.1)

[1)] Такая картина может наблюдаться лишь в том случае, когда однородная компонента уширения линии меньше межмодового частотного интервала. — *Прим. ред.*

[2)] Ниже для простоты предполагается, что коэффициент преломления равен единице. В случае $n \neq 1$ следует заменить c на c/n.

состоит в том, что $E(t)$ является периодической функцией с периодом $T = 2\pi/\Omega = 2L/c$, равным времени полного обхода резонатора,

$$E(t+T) = \sum_n E_n \exp\left\{i\left[(\omega_0 + n\Omega)\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) + \varphi_n\right]\right\} =$$

$$= \sum_n E_n \exp\{i[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi_n]\} \exp\left\{i\left[2\pi\left(\frac{\omega_0}{\Omega} + n\right)\right]\right\} = E(t), \tag{11.2.2}$$

поскольку ω_0/Ω — целое число.

Заметим, что периодичность $E(t)$ имеет место лишь при фиксированных фазах φ_n. Обычно в лазерах фазы φ_n меняются случайно со временем. Это вызывает случайные пульсации выходного излучения[1] и препятствует применениям лазеров, для которых необходима временная когерентность поля.

Существует два пути решения проблемы регуляризации выходного излучения лазера. Один из них состоит в достижении генерации только на одной частоте. Таким образом вообще устраняется интерференция мод. Одночастотную генерацию можно осуществить множеством способов, включая укорочение резонатора до такой длины L, когда в полосу усиления попадает только одна мода, вследствие возрастания межмодового интервала ($\Omega = \pi c/L$).

Второй подход заключается в принудительном воздействии на фазы φ_n с целью поддержания определенных соотношений между ними, т. е. в синхронизации мод [6]. При этом интенсивность излучения во времени имеет вид периодического цуга импульсов с периодом $T = 2L/c = 2\pi/\Omega$.

Одной из самых практичных является такая синхронизация, при которой все фазы φ_n равны нулю. Для того чтобы предельно упростить анализ, предположим, что генерируются N мод с равными амплитудами. Полагая в (11.2.1) $E_n = 1$ и $\varphi_n = 0$, получаем

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{i(\omega_0 + n\Omega)t}, \tag{11.2.3}$$

$$E(t) = e^{i\omega_0 t} \frac{\sin^2(N\Omega t/2)}{\sin^2(\Omega t/2)}. \tag{11.2.4}$$

Средняя мощность[2] выходного излучения лазера пропорциональна $E(t)\,E^*(t)$:

$$\mathcal{P}(t) \propto \sin^2(N\Omega t/2)/\sin^2(\Omega t/2). \tag{11.2.5}$$

Некоторые из свойств $\mathcal{P}(t)$ очевидны [6].

---

[1] Речь идет о флуктуациях, вызванных случайной интерференцией мод, а не о флуктуациях интенсивностей отдельных мод.

[2] Усреднение выполняется за интервал времени, значительно больший периода оптического колебания $2\pi/\omega_0$ и значительно меньший периода модуляции $2\pi/\Omega$.

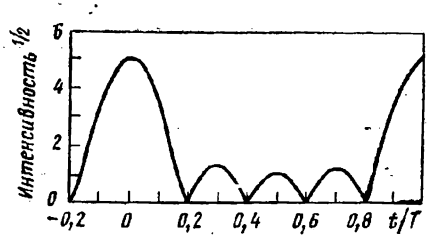


Рис. 11.8. Теоретическая форма огибающей поля. $\sqrt{\mathcal{P}}(t) \propto \sin(N\Omega t/2)/\sin(\Omega t/2)$ при фазовой синхронизации пяти мод с равными амплитудами. Частотный интервал между модами $\Omega = 2\pi/T$

1. Мощность излучается в виде последовательности импульсов с периодом $T = 2\pi/\Omega = 2L/c$.

2. Пиковая мощность $\mathcal{P}^0$ (sT) (для $s = 1, 2, 3, \ldots$) в N раз больше средней мощности, где N — число синхронизованных мод.

3. Пиковая амплитуда поля равна амплитуде одной моды, умноженной на N.

4. Ширина отдельного импульса, определенная как время от вершины импульса до первого нуля, равна $\tau_и = T/N$. Число генерируемых мод оценивается как $N = \Delta\omega/\Omega$ — отношение ширины линии усиления $\Delta\omega$ к межмодовому интервалу Ω. Используя это соотношение и подставляя его в $\tau_и = T/N$, получаем выражение для длительности импульса

$$\tau_и = 2\pi/\Delta\omega = 1/\Delta\nu. \qquad (11.2.6)$$

Таким образом, длительность импульсов, генерируемых лазером с синхронизацией мод, приблизительно равна обратной ширине линии лазерного перехода $\Delta\nu$.

График зависимости $\sqrt{\mathcal{P}_N^0(t)}$, построенный по формуле (11.2.5) для случая $N = 5$, представлен на рис. 11.8. Можно считать, что ордината на графике пропорциональна амплитуде поля.

Предшествующее рассмотрение синхронизации мод ограничивалось анализом временных характеристик излучения. Поскольку, однако, решение уравнений Максвелла в резонаторе имеет форму бегущих волн (стоячую волну можно рассматривать как сумму двух бегущих навстречу волн равной амплитуды), синхронизация мод приводит к конденсации генерируемой энергии в пакет, распространяющийся со скоростью света от одного зеркала к другому и обратно. Период пульсаций $T = 2L/c$ попросту равен временному интервалу между двумя последовательными приходами импульса к зеркалу. Пространственная протяженность импульса $L_и$ должна соответствовать его временной длительности, умноженной на скорость света c. Используя соотношение $\tau_и = T/N$, получаем

$$L_и \approx c\tau_и = cT/N = 2\pi c/\Omega N = 2L/N. \qquad (11.2.7)$$

Можно проверить последний результат, представляя резонаторные моды в виде $\sin k_n z \sin \omega_n t$. Полное поле запишется тогда следующим образом:

$$E(z, t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sin\left[(m+n)\frac{\pi z}{L}\right] \sin\left[(m+n)\frac{\pi c}{L}t\right], \qquad (11.2.8)$$

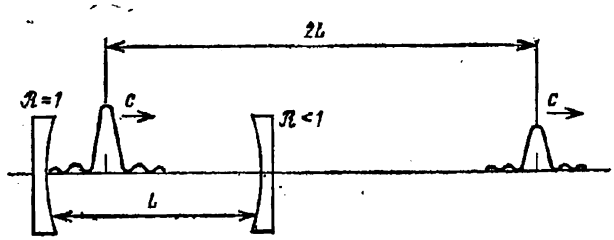


Рис. 11.9. Форма импульса, соответствующая синхронизации мод резонатора, вычисленная по формуле (11.2.9)

где $\omega_n = (m + n)(\pi c/L)$, $k_n = \omega_n/c$ и m — целочисленный индекс, относящийся к центральной моде. Можно переписать (1.2.8) в форме

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \left\{ \cos\left[(m+n)\frac{\pi}{L}(z - ct)\right] - \right.$$
$$\left. - \cos\left[(m+n)\frac{\pi}{L}(z + ct)\right] \right\}, \qquad (11.2.9)$$

из которой видны пространственные и временные свойства излучения, упоминавшиеся выше. На рис. 11.9. изображено пространственное распределение поля в некоторый момент времени t согласно (11.2.9).

Методы синхронизации мод. Из предшествующего обсуждения ясно, к каким последствиям приводит фиксация фаз продольных мод лазера. Синхронизацию мод можно достигнуть путем модуляции потерь (или усиления) лазера с частотой $\Omega = \pi c/L$, которая равна межмодовому интервалу. Чтобы получить правильное представление об этом процессе, рассмотрим модуляцию потерь с помощью тонкого затвора, помещенного внутрь резонатора лазера. Будем считать, что большую часть времени затвор закрыт и открывается лишь в течение короткого промежутка $t_{откр}$ через каждые $T = 2\pi/\Omega$ секунд (рис. 11.10). Одномодовый лазер не может генерировать в таких условиях вследствие высоких потерь (полагаем, что $t_{откр}$ намного меньше времени развития генерации). То же самое относится и к многомодовой генерации с произвольными фазами мод. Тем не менее существует исключение, когда фазы заданы, как в (11.2.3), и распределение энергии внутри резонатора имеет тот же вид, что и на рис. 11.9, т. е. представляет собой узкий ($L_и \approx 2L/N$)

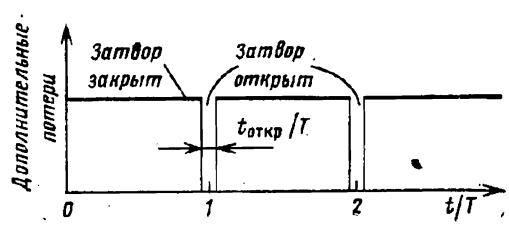


Рис. 11.10. Периодическая модуляция потерь, осуществляемая затвором с целью синхронизации мод.

Периодическое изменение потерь приводит к установлению таких фазовых соотношений, что импульс проходит затвор в то время, когда он полностью открыт

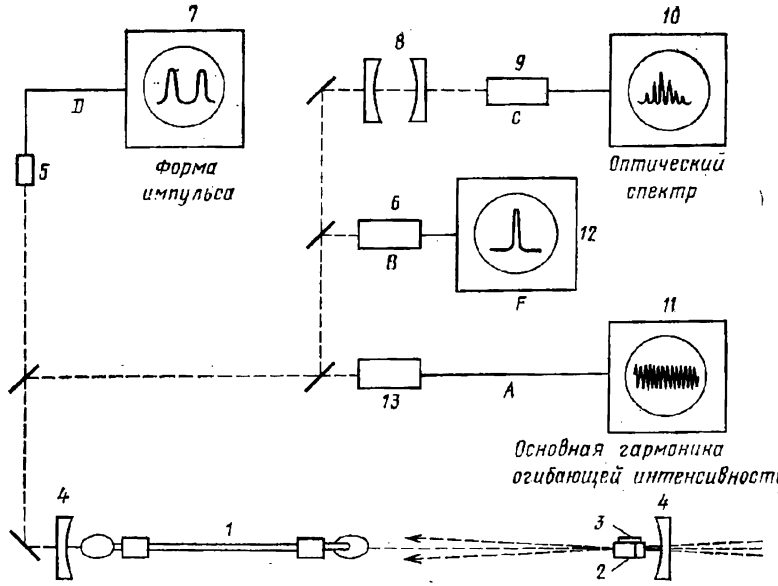


Рис. 11.11. Экспериментальная установка для исследования синхронизации мод лазера при акустической модуляции потерь:

1 — активная среда; *2* — ультразвуковая ячейка из плавленного кварца; *3* — возбудитель ультразвука; *4* — зеркала резонатора; *5* — точечно-контактный диод; *6* — ФЭУ; *7* — стробирующий осциллограф; *8* — сканирующий интерферометр, *9* — ФЭУ; *10, 11* — осциллографы; *12* — радиочастотный спектроанализатор; *13* — перестраиваемый фотоприемник. Из *A, B, C, D* на экраны электронно-лучевых приборов выводятся: основная гармоника модуляции интенсивности, спектр модуляции интенсивности, спектр оптического излучения и интенсивность оптического излучения соответственно [8]

бегущий импульс. Если такой пакет попадает на затвор, когда последний открыт, и если длительность импульса ($\tau_и$) меньше времени пребывания затвора в открытом состоянии, тогда импульс не будет ощущать присутствия затвора в резонаторе и соответственно не будет ослабляться им. Можно сделать вывод, что периодическая модуляция потерь вызывает синхронизацию мод посредством действия своего рода механизма «естественного отбора». На самом деле, затвор, работающий в периодическом режиме, отсекает «хвосты», возникающие вследствие отклонения фаз от идеальных ($\varphi_n = 0$) значений. Таким образом, происходит непрерывное восстановление фазовых соотношений.

Схема экспериментальной установки для исследования синхронизации мод в He — Ne лазере показана на рис. 11.11. Периодическая модуляция потерь [8] достигалась вследствие брэгговской дифракции генерируемой световой волны на стоячей ультразвуковой акустической волне (см. гл. 14). Частота модуляции потерь, пропорциональных интенсивности акустической волны, равна удвоенной частоте акустических колебаний.

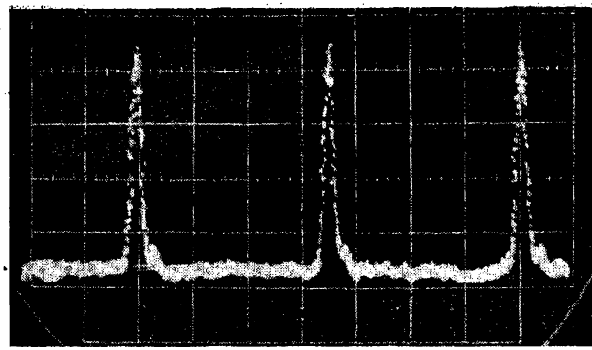


Рис. 11.12. Осциллограмма импульсов излучения He—Ne лазера, генерирующего на $\lambda=0{,}6328$ мкм при синхронизации мод. Цена деления временной шкалы 5 нс [12]

На рис. 11.12 представлена осциллограмма выходной интенсивности лазера, внутрь которого помещена ультразвуковая дифракционная ячейка.

В лазерах, содержащих насыщающийся поглотитель (среду, поглощение в которой снижается с ростом интенсивности оптического излучения), синхронизация мод осуществляется без внешнего воздействия. Этот метод синхронизации мод нашел широкое применение в мощных импульсных твердотельных лазерах [5, 10, 11]. В табл. 11.1 представлены сведения о лазерах с синхронизацией мод и длительности генерируемых ими импульсов.

Синхронизация мод путем модуляции потерь в резонаторе. Теоретическое рассмотрение. Теоретический подход, развитый в [6], состоит в решении уравнений Максвелла для резонатора генерирующего лазера, потери которого модулированы. Моды, рассматривавшиеся в гл. 5, не удовлетворяют теперь уравнениям Максвелла. Однако новое решение удается представить в виде разложения по старым модам (стационарного резонатора). Коэффициенты этого разложения связаны друг с другом как по модулю, так и по фазе, и они являются комплексными амплитудами «синхронизованных» мод.

Таблица 11.1

Ширина линии усиления $\Delta\nu$ некоторых активных сред и длительность импульсов, генерируемых соответствующими лазерами в режиме синхронизации мод

Активная среда	$\Delta\nu$, Гц	$\Delta\nu^{-1}$, с	Длительность импульса, с
He—Ne, непр. 0,6328 мкм	$1{,}5\cdot10^{9}$	$6{,}66\cdot10^{-10}$	$6\cdot10^{-10}$
YAG:Nd^{3+}, непр. 1,06 мкм	$1{,}2\cdot10^{10}$	$8{,}34\cdot10^{-11}$	$7{,}6\cdot10^{-11}$
Рубин, имп. 0,6943 мкм	$6\cdot10^{10}$	$1{,}66\cdot10^{-11}$	$1{,}2\cdot10^{-11}$
Стекло: Nd^{3+}, имп. 1,06 мкм	$3\cdot10^{12}$	$3{,}33\cdot10^{-13}$	$4\cdot10^{-13}$
Родамин 6G, $\sim$0,6 мкм	$5\cdot10^{12}$	$2\cdot10^{-13}$	$4\cdot10^{-13}$

Модуляцию потерь можно ввести в уравнения Максвелла, представив, что эффективная проводимость σ среды, находящейся внутри резонатора, меняется во времени и в пространстве:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\sigma(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \qquad (11.2.10)$$

Подставив в эти уравнения вместо $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ их разложения (5.5.11) и используя соотношения (5.5.3), (5.5.4), получим

$$\sum_a \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\omega_a q_a k_a \mathbf{E}_a = -\frac{\sigma(\mathbf{r},t)}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_a p_a\mathbf{E}_a - \sqrt{\varepsilon}\sum_a \dot{p}_a\mathbf{E}_a \qquad (11.2.11)$$

из первого уравнения (11.2.10) и

$$\dot{q}_b = p_b \qquad (11.2.12)$$

из второго. Скалярно умножая (11.2.11) на $\mathbf{E}_b$ и интегрируя по объему резонатора, приходим к уравнению

$$\omega_b^2 q_b = -\sum_a S_{b,a}(t)\,p_a - \dot{p}_b, \qquad (11.2.13)$$

где

$$S_{b,a}(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{\text{рез}}}\sigma(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}_a\mathbf{E}_b\,dv. \qquad (11.2.14)$$

В этом месте представляется удобным ввести амплитуду моды

$$C_a(t)=(2\omega_a)^{-1/2}[\omega_a q_a(t)+ip_a(t)]. \qquad (11.2.15)$$

Используя (11.2.15) и комплексно сопряженную ей величину, запишем (11.2.12), (11.2.13) в новой форме:

$$\frac{dC_a^*}{dt}=i\omega_a C_a^* - \sum_b \varkappa_{b,a}(t)\,(C_b^* - C_b),\quad \frac{dC_a}{dt} =$$

$$= -i\omega_a C_a + \sum_b \varkappa_{b,a}(t)\,(C_b^* - C_b), \qquad (11.2.16)$$

где $\varkappa_{b,a}(t) = 1/2\,S_{b,a}(t)\sqrt{\omega_b/\omega_a}$. Если представить проводимость в виде суммы постоянной составляющей и гармонического возмущения; $\sigma(\mathbf{r},t)=\sigma_0+\sigma_1(\mathbf{r})\cos(\omega_м t+\varphi)$ и обратиться к формуле (11.2.14), то выражение для $\varkappa_{b,a}(t)$ приобретет вид

$$\varkappa_{b,a}(t)=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\delta_{a,b}+\frac{\varkappa_{b,a}}{2}\left[e^{i(\omega_м t+\varphi)}+e^{-i(\omega_м t+\varphi)}\right], \qquad (11.2.17)$$

где

$$\varkappa_{b,a}=\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_a}}\int_{V_{\text{рез}}}\delta_1(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_b\,\mathbf{E}_a\,dv. \qquad (11.2.18)$$

Подстановка (11.2.17) в уравнение движения (11.2.16) дает

$$\frac{dC_a^*}{dt} = i\omega_a C_a^* - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon}(C_a^* - C_a) -$$

$$-\sum_b \frac{\varkappa_{b,a}}{2}\left[e^{i(\omega_м t+\varphi)} + e^{-i(\omega_м t+\varphi)}\right](C_b^* - C_b) \quad (11.2.19)$$

и комплексно-сопряженное уравнение для dC_a^*/dt. Эти уравнения составляют основу рабочего аппарата теории. Введем параметр расстройки $\Delta\omega_м$ при помощи равенства

$$\omega_{a+1} - \omega_a = \pi c/L = \omega_м - \Delta\omega_м, \quad (11.2.20)$$

из которого видно, что $\Delta\omega_м$ — это отклонение частоты модуляции от межмодового интервала. Перейдя к медленно меняющейся переменной $D_a^*(t)$ посредством соотношения

$$C_a^* = D_a^*(t)\, e^{i[(\omega_a + a\Delta\omega_м)t + a\varphi + a\pi/2]} e^{-(\sigma_a/2\varepsilon)t},$$

подставляя последнее в (11.2.19) с учетом (11.2.20), получаем

$$\frac{dD_a^*}{dt} + ia\Delta\omega_м D_a^* = i\frac{\varkappa}{2}(D_{a+1}^* - D_{a-1}^*). \quad (11.2.21)$$

Стационарным решением ($dD_a^*/dt = 0$) этого уравнения является

$$D_a^* = I_a(\varkappa/\Delta\omega_м), \quad (11.2.22)$$

где I_a — гиперболическая функция Бесселя a-го порядка. Выражение для $C_a^*(t)$ приобретает вид

$$C_a^*(t) = I_a\left(\frac{\varkappa}{\Delta\omega_м}\right) e^{i[(\omega_a + a\Delta\omega_м)t + a\varphi + a\pi/2]} e^{-\sigma_0 t/2\varepsilon}, \quad (11.2.23)$$

где согласно (11.2.20) и с учетом $\omega_a = \omega_0 + a\pi c/L$ имеем $\omega_a + a\Delta\omega_м = \omega_0 + a\omega_м$. При $\varkappa/\Delta\omega_м \gg 1$ можно заменить $I_a(\varkappa/\Delta\omega_м)$ на $[2\pi(\varkappa/\Delta\omega_м)]^{-1/2}$ и записать

$$C_a^*(t) = \left(2\pi\frac{\varkappa}{\Delta\omega_м}\right)^{-1/2} e^{i[(\omega_0 + a\omega_м)t + a\varphi + a\pi/2]}. \quad (11.2.24)$$

Член $\exp(-\sigma_0 t/2\varepsilon)$, учитывающий затухание, здесь опущен, потому что усиление в активной среде уравновешивает потери и способствует установлению стационарного режима.

Характерной особенностью выражения (11.2.24) является то, что все генерирующиеся моды имеют одинаковые фазы, а вследствие предположения об отсутствии дисперсии усиления,— и одинаковые амплитуды [1].

Решение (11.2.24) идентично выражению (11.2.3), описывающему систему идеально синхронизованных мод. Можно показать, что фа-

[1] В действительности стационарные значения амплитуд генерируемых мод определяются формой контура усиления в лазере и зависят от частоты. Однако это не нарушает справедливости нашего заключения.

зовый множитель $\exp[ia(\varphi + \pi/2)]$ соответствует тривиальному сдвигу начала отсчета времени.

Моды удается синхронизовать не только посредством модуляции потерь, обсуждавшейся выше, но и при фазовой модуляции. Теоретический анализ в этом случае [6] внешне схож с только что проведенным, правда, модуляции подвергается не проводимость σ, а диэлектрическая проницаемость ε. Нелинейная теория синхронизации мод, которая строится на основе численных методов решения уравнений, позволяет выяснить более тонкие аспекты этого явления [13, 14].

11.3. Синхронизация мод лазера с однородно-уширенной линией усиления

Анализ явления синхронизации мод в лазерах с неоднородно-уширенной линией заставляет думать, что роль внутренней модуляции ограничивается взаимной фазовой синхронизацией генерируемых мод, которые в отсутствие модуляции имеют случайные фазы.

В случае однородного уширения условие генерации может быть выполнено только для одной моды. На опыте, однако, выясняется, что осуществление синхронизации мод приводит к излучению лазером коротких импульсов наподобие описанных в § 11.2. Противоречие удается разрешить, предположив, что внутренняя модуляция обеспечивает перекачку энергии от моды с наибольшим усилением к более слабым модам (которые в обычных условиях генерироваться не могут). Перекачку можно рассматривать как следствие того, что частоты $\omega_0 \pm n\Omega$ представляют собой боковые компоненты колебания с несущей частотой ω_0, возникающие из-за модуляции с частотой Ω. Отсюда видно, что физическое явление заключается не только в синхронизации мод, но и в возбуждении мод[1]. Тем не менее окончательный результат, как и в случае неоднородного уширения, состоит в том, что генерирующиеся в большом числе моды образуют эквидистантный спектр и имеют определенные фазы, чему соответствуют во временном представлении ультракороткие импульсы.

Теоретический анализ этой задачи опирается на подход, впервые использовавшийся при исследовании коротких импульсов в генераторах бегущей волны СВЧ диапазона [17].

Рассмотрим оптический резонатор, образованный зеркалами с коэффициентами отражения $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$, внутри которого (рис. 11.13) находится активная среда и ячейка с периодически изменяющейся прозрачностью. Метод решения заключается в том, что нужно проследить за эволюцией импульса на протяжении полного цикла об-

---

[1] Подобные рассуждения о спектре генерирующихся мод справедливы только в том случае, если модами являются бегущие в одном направлении волны. Коль скоро же речь идет о стоячих волнах, то в силу несовпадения положений узлов и пучностей разных мод условия для многомодовой генерации создаются безотносительно к тому, модулируются параметры лазера или нет [31, 33—35]. — *Прим. ред.*

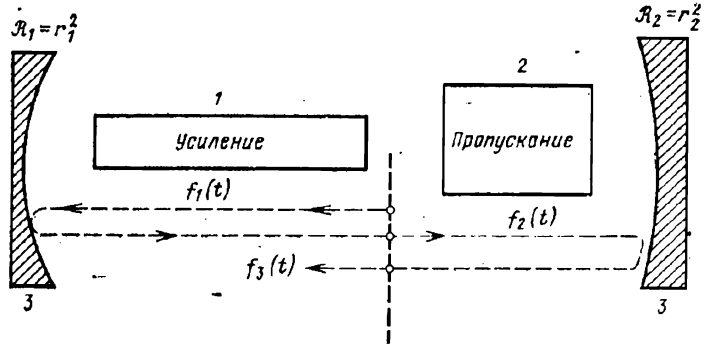


Рис. 11.13. Модель лазера с однородным уширением линии, используемая при теоретическом анализе синхронизации мод:
1 — активная среда; *2* — модулирующая ячейка; *3* — зеркала

хода резонатора, потребовав, чтобы он при этом воспроизвел сам себя. Форма импульса на всех стадиях предполагается гауссовой.

Прежде чем переходить к дальнейшему, необходимо описать действие усиливающей среды и поглощающей ячейки на бегущий гауссов импульс.

Передаточная функция усиливающей среды. Предположим, что световой импульс $E_{вх}(t)$ попадает в усиливающую среду длиной l. Обозначив фурье-образ $E_{вх}(t)$ через $E_{вх}(\omega)$, введем для характеристики усиливающей среды передаточную функцию $g(\omega)$, которая связывает фурье-образы на входе и выходе среды:

$$E_{вых}(\omega) = E_{вх}(\omega)\, g(\omega). \qquad (11.3.1)$$

Уравнение (11.3.1) линейно и его справедливость ограничивается условием слабого насыщения $\Omega_н^2 T_1 T_2 \ll 1$. Используя (8.2.4) и (8.1.14), получаем

$$g(\omega) = \exp\left\{-ikl\left[1 + \frac{1}{2n^2}(\chi' - i\chi'')\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-ikl - \frac{kl\mu^2 T_2 \Delta N_0}{2n^2 \varepsilon_0 \hbar}\left[\frac{1}{1 + i(\omega - \omega_0) T_2}\right]\right\} \approx$$

$$\approx \exp\left\{-ikl + \frac{\gamma_{max} l}{2}\left[1 - i(\omega - \omega_0) T_2 - (\omega - \omega_0)^2 T_2^2\right]\right\}.$$

В последнем выражении использовано разложение, пригодное при $(\omega - \omega_0)\tau_2 \ll 1$, и считается, что в случае усиления $\Delta N_0 < 0$. Поскольку за один цикл импульс дважды проходит через ячейку, можно записать

$$\left[\frac{E_{вых}(\omega)}{E_{вх}(\omega)}\right]^2 = [g(\omega)]^2 = \exp\{-i2kl +$$

$$+ \gamma_{max} l\left[1 - i(\omega - \omega_0) T_2 - (\omega - \omega_0)^2 T_2^2\right]\},$$

Мнимые члены в экспоненте соответствуют запаздыванию вследствие конечной величины групповой скорости на время $\tau_{зап} = (2l/c) + l\gamma_{max} T_2$. Поскольку сейчас интересна только форма импульса, отбросим мнимую часть [1], благодаря чему

$$[g(\omega)]^2 = \exp\{\gamma_{max} l [1 - (\omega - \omega_0)^2 T_2^2]. \quad (11.3.1а)$$

Передаточная функция модулирующей ячейки. Нужно установить, как меняются временные характеристики импульса при проходении им модулирующей ячейки.

Предположим, что коэффициент преобразования амплитуды волны при однократном прохождении модулирующей ячейки $G(t)$ таков, что

$$E_{вых}(t) = E_{вх}(t) G(t) = E_{вх}(t) \exp(-2\delta_п^2 \sin^2 \Omega t/2). \quad (11.3.2)$$

Максимумы коэффициента пропускания разделяются такими интервалами времени, что импульс, соответствующий синхронизованным модам, каждый раз проходит через ячейку при наименьшем уровне потерь. Это обстоятельство позволяет упростить выражение (11.3.2) и записать

$$E_{вых}(t) = E_{вх}(t) \exp[-2\delta_п^2 (\Omega t/2)^2]. \quad (11.3.3)$$

Соотношение (11.3.3) можно рассматривать как определение передаточной функции модулирующей ячейки. Конкретный вид передаточной функции подсказан физическими соображениями. Если речь идет об электрооптическом затворе, разность фаз в котором меняется по закону $\Gamma(t) = \Gamma_м \sin \omega_м t$, то коэффициент преобразования $G(t) = \cos^2 [\Gamma(t)/2]$ (см. § 14.3). Вблизи максимума пропускания затвора $\Gamma(t) \ll 1$ и можно аппроксимировать $G(t)$ выражением

$$G(t) \approx \exp(-\Gamma_м^2 \omega_м^2 t^2/4) = \exp[-2\delta_п^2 (\Omega t/2)^2],$$

где $\omega_м = \Omega/2$ и $\Gamma_м = 2\sqrt{2}\,\delta_п$.

Предположим, что стартовый импульс $f_1(t)$ на рис. 11.13 имеет форму

$$f_1(t) = A \exp(-\alpha_1 t^2) \exp[i(\omega_0 t + \beta_1 t^2)]. \quad (11.3.4)$$

Несущая частота этого импульса меняется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + 2\beta_1 t. \quad (11.3.5)$$

Фурье-преобразование импульса представляет собой

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi(\alpha_1 - i\beta_1)}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha_1 - i\beta_1)}\right]. \quad (11.3.6)$$

[1] Благодаря запаздыванию достигается совпадение времени полного обхода импульсом резонатора с периодом модуляции потерь.

Двухкратное прохождение через активную среду и отражение от зеркала учитываются умножением $F_1(\omega)$ на функцию преобразования $[g(\omega)]^2 r_1$:

$$F_2(\omega) = F_1(\omega)[g(\omega)]^2 r_1 =$$

$$= \frac{r_1 A}{2} e^{g_0} \sqrt{\frac{1}{\pi(\alpha_1 - i\beta_1)}} \exp \times$$

$$\times \left\{ -(\omega - \omega_0)^2 \left[\frac{1}{4(\alpha_1 - i\beta_1)} + g_0 T_2^2 \right] \right\}, \qquad (11.3.7)$$

где $g_0 = \gamma_{max} l$, а $[g(\omega)]^2$ получаем из (11.3.1а). Обратное фурье-преобразование во временное представление дает

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{r_1 A e^{g_0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 - i\beta_1}} e^{-\omega_0^2 Q} \sqrt{\frac{\pi}{Q}} \exp\left[-\frac{(2i\omega_0 Q - t)^2}{4Q} \right], \qquad (11.3.8)$$

где

$$Q = [4(\alpha_1 - i\beta_1)]^{-1} + g_0 T_2^2. \qquad (11.3.9)$$

Отражение от второго зеркала и прохождение через модулирующую ячейку согласно (11.3.3) приводит к результату

$$f_3(t) = r_2 f_2(t) \exp(-\delta_п^2 \Omega^2 t^2/2) =$$

$$= \frac{r_1 r_2 A \exp(g_0)}{2} \sqrt{\frac{1}{(\alpha_1 - i\beta_1) Q}} e^{i\omega_0 t} e^{-(\delta_п^2 \Omega^2/2 + 1/4Q) t^2}. \qquad (11.3.10)$$

Из соображений самосогласованности $f_3(t)$ должна совпадать с $f_1(t)$. Приравнивая экспоненты в (11.3.10) и (11.3.4), находим

$$\alpha_1 = \delta_п^2 \Omega^2/2 + \mathrm{Re}(1/4Q), \quad \beta_1 = -\mathrm{Im}(1/4\,Q). \qquad (11.3.11)$$

Обратившись к (11.3.9), преобразуем второе из соотношений (11.3.11) в

$$\beta_1 = \frac{\beta_1}{(1 + 4g_0 T_2^2 \alpha_1)^2 + (4g_0 T_2^2 \beta_1)^2},$$

откуда видно, что самосогласованность решения требует $\beta_1 = 0$ и, следовательно, свипирования несущей частоты нет. При $\beta_1 = 0$ первое из выражений (11.3.11) сводится к

$$\delta_п^2 \Omega^2/2 + \alpha_1/(1 + 4g_0 T_2^2 \alpha_1) = \alpha_1. \qquad (11.3.12)$$

Полагая далее

$$4g_0 T_2^2 \alpha_1 \ll 1, \qquad (11.3.13)$$

приходим к результату

$$\alpha_1 = [\delta_п^2/(2g_0)]^{1/2} \Omega/(2T_2).$$

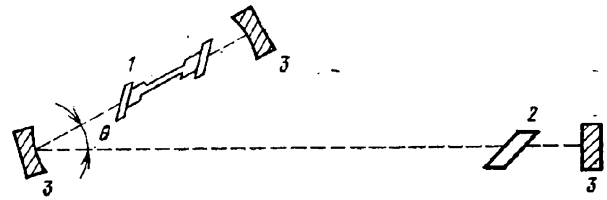


Рис. 11.14. Схема лазера высокого давления на CO_2 с синхронизацией мод [18]
1 — ячейка волноводного типа с активной средой; *2* — брэгговский акустический модулятор; *3* — зеркала

Ширина импульса на уровне 0,5 от максимальной интенсивности согласно (11.3.4) составляет $\tau_и = (2 \ln 2)^{1/2} \alpha_1^{-1/2}$, и, таким образом, ширина самосогласованного импульса равна

$$\tau_и = (2 \ln 2)^{1/2} (2g_0/\delta_п^2)^{1/4} (2T_2/\Omega)^{1/2}. \qquad (11.3.14)$$

Условие (11.3.13) можно интерпретировать как $\tau_и \gg 2\sqrt{g_0 T_2}$, и оно выполняется в большинстве случаев.

На рис. 11.14 приведена схема CO_2-лазера, в котором осуществлена синхронизация мод. Уширение линии усиления в данном случае связано с давлением газа. На рис. 11.15 изображена кривая $\tau_и \backsim 1/\Delta\nu = \pi T_2$, и там же нанесены экспериментальные точки. Зависимость длительности импульса от параметра модуляции $\delta_п$ изображена на рис. 11.16.

Синхронизация мод при фазовой модуляции. Синхронизацию мод можно достигнуть путем внутренней фазовой модуляции с большей эффективностью, чем при модуляции потерь. Обычно фазовая модуляция осуществляется с помощью электрооптического кристалла, ориентированного (см. рис. 14.6) таким образом, чтобы запаздывание по фазе в распространяющейся волне было пропорционально мгновенному значению напряжения, приложенного к кристаллу. Частота модулирующего сигнала, как и в случае модуляции потерь, равна обратной величине времени полного обхода резонатора или, другими словами, частотному интервалу между соседними продольными модами. Анализ процесса в случае неоднородного уширения линии подобен изложенному в § 11.2 и приводит к подобным результатам [6].

В случае однородного уширения можно действовать так же, как в § 11.3, учитывая, что передаточная функция модулирующей ячейки вместо (11.3.2) имеет другой вид:

$$E_{вых}(t) = E_{вх}(t) \exp(-i2\delta_ф \cos \Omega t). \qquad (11.3.15)$$

Для импульсов, проходящих вблизи экстремального отклонения фазы, последнее равенство можно приближенно записать как

$$E_{вых}(t) = E_{вх}(t) \exp(\mp i2\delta_ф \pm i\delta_ф \Omega^2 t^2). \qquad (11.3.16)$$

Выкладки, аналогичные тем, что привели ранее к (11.3.14), теперь приводит к [16]

$$\tau_и = (2 \ln 2)^{1/2} (2g_0/\delta_ф)^{1/4} (2T_2/\Omega)^{1/2}. \qquad (11.3.17)$$

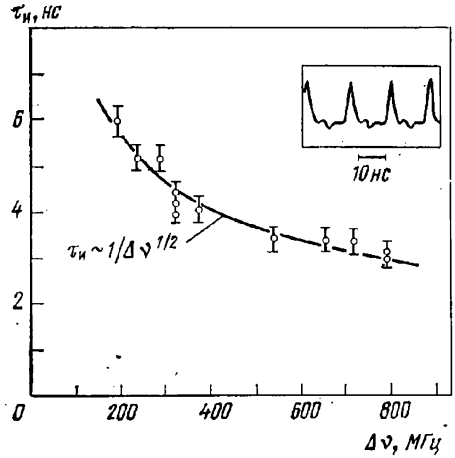


Рис. 11.15. Зависимость длительности импульса, генерируемого CO_2 лазером, от ширины линии усиления, которая определяется давлением газа ($\Delta\gamma = 8 \cdot 10^8$ Гц при давлении 150 мм рт. ст.) [18]

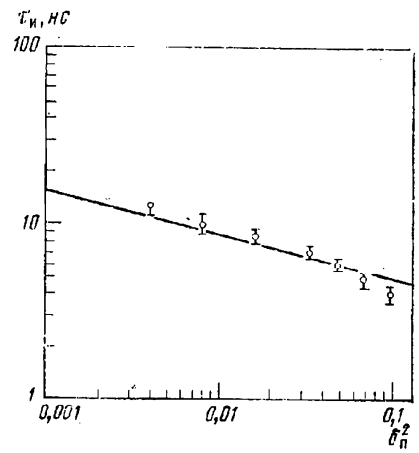


Рис. 11.16. Зависимость длительности импульса от параметра модуляции [18]

В этом случае требование самосогласованности удовлетворяется только для импульсов со свипируемой несущей частотой, т. е.

$$\beta = \pm\alpha = \pm\Omega\sqrt{\delta_ф/(2g_0)}/(2T_2). \qquad (11.3.18)$$

Верхний и нижний знак в (11.3.16) и (11.3.18) соответствуют двум возможным решениям, одно из которых отвечает прохождению ячейки при максимальном отклонении фазы, а другое — при минимальном.

Отметим сходство (11.3.17) с результатом, относящимся к модуляции потерь, (11.3.14), за тем лишь исключением, что вместо $\delta_п^2$ здесь стоит $\delta_ф$. Это различие заключено еще в исходных выражениях (11.3.2) и (11.3.15).

11.4. Релаксационные колебания в лазерах

Релаксационные колебания интенсивности наблюдаются у большинства типов лазеров [19, 20]. Характерный период таких колебаний заметно превышает время жизни фотона в резонаторе t_c и время обхода резонатора $2L/c$. Чаще всего период заключен в интервале 0,1... 10 мкс.

Основным физическим механизмом релаксационных колебаний является взаимодействие генерируемого поля в резонаторе с активной средой [19]. Возрастание интенсивности поля влечет за собой уменьшение инверсии населенностей вследствие того, что увеличивается вероятность вынужденных переходов. Это, в свою очередь, означает падение усиления и приводит к уменьшению интенсивности поля излучения.

При построении математической теории этого явления будем исходить из идеализированной модели лазера с однородно уширенным контуром усиления (см. рис. 9.4). Предположим также, что населенность нижнего лазерного уровня N_1 пренебрежимо мала (т. е. $t_1 \ll t_2$; $W_{инд}$) и будем считать плотность инверсии $N = N_2 - N_1 \times \times (g_2/g_1) \approx N_2$. Скорость накачки на уровень *2* (атомов/м³с) равна R, а время распада состояния *2* под действием любых причин, кроме вынужденного излучения, равно T_1. Обозначив через $W_{инд}$ вероятность индуцированного перехода на один атом, запишем уравнение

$$dN/dt = R - W_{инд} N - N/T_1. \qquad (11.4.1)$$

Вероятность $W_{инд}$ согласно (8.3.10) пропорциональна интенсивности поля I, а значит, и плотности фотонов Φ в резонаторе. Поэтому (11.4.1) можно переписать в виде

$$dN/dt = R - B\Phi N - N/T_1, \qquad (11.4.2)$$

где B — коэффициент, определяемый соотношением $W_{инд} = B\Phi$. Поскольку $B\Phi N$ — это одновременно и вероятность излучения фотона, имеем также уравнение

$$d\Phi/dt = B\Phi N - \Phi/t_c. \qquad (11.4.3)$$

Уравнения (11.4.2) (11.4.3) описывают взаимодействие между полем излучения с плотностью фотонов Φ и активной средой с плотностью инверсии N.

Прежде всего заметим, что в стационарном режиме $d\Phi/dt = dN/dt = 0$ справедливы соотношения

$$N_0 = 1/Bt_c, \quad \Phi_0 = (RBt_c - T_1^{-1})/B. \qquad (11.4.4)$$

Из (11.4.4) следует, что при $R = 1/Bt_cT_1$ плотность фотонов $\Phi_0 = 0$. Обозначим это пороговое значение накачки через $R_{пор}$ и введем фактор превышения порога $\eta = R/R_{пор}$[1], что позволяет записать второе из соотношений (11.4.4) в виде

$$\Phi_0 = (\eta - 1)/BT_1. \qquad (11.4.5)$$

Рассмотрим теперь поведение системы при малом отклонении от равновесия, задав $N(t) = N_0 + N_1(t)$, $N_1 \ll N_0$, $\Phi(t) = \Phi_0 + \Phi_1(t)$, $\Phi_1 \ll \Phi_0$. Подставив эти выражения в уравнения (11.4.2) и (11.4.3), используя (11.4.4) и пренебрегая малыми нелинейными членами типа $N_1\Phi_1$, получим

$$dN_1/dt = -RBt_cN_1 - \Phi_1/t_c, \qquad (11.4.6)$$

$$d\Phi_1/dt = (RBt_c - T_1^{-1})N_1. \qquad (11.4.7)$$

---

[1]) Величина η совпадает с отношением ненасыщенного показателя усиления (при $\Phi = 0$) к насыщенному. Насыщенное усиление, устанавливающееся в активной среде при наличии генерации, в точности совпадает с потерями.

Взяв производную от (11.4.7), подставив в полученное равенство dN_1/dt из (11.4.6) и воспользовавшись (11.4.4), приходим к .

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} + RBt_c\frac{d\Phi_1}{dt} + \left(RB - \frac{1}{T_1 t_c}\right)\Phi_1 = 0 \qquad (11.4.8)$$

или, оперируя фактором превышения порога $\eta = RBt_cT_1$, получим

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \frac{\eta}{T_1}\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{\eta-1}{T_1 t_c}\Phi_1 = 0, \qquad (11.4.9)$$

Получено уравнение гармонического осциллятора с потерями. Предположив его решение в виде $\Phi_1 \backsim \exp(p, t)$, приходим к характеристическому уравнению

$$p^2 + \frac{\eta}{T_1}p + \frac{1}{T_1 t_c}(\eta - 1) = 0,$$

обладающему корнями $p(\pm) = -\theta \pm i\Omega_0$, причем

$$\theta = \eta/2T_1, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{\eta-1}{T_1 t_c} - \left(\frac{\eta}{2T_1}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{\eta-1}{T_1 t_c}}. \qquad (11.4.10)$$

Итак, решение линеаризованного уравнения (11.4.9) имеет вид $\Phi_1(t) \backsim \exp(\theta t)\cos\Omega_0 t$. Выходная мощность (она пропорциональна числу фотонов в резонаторе) испытывает синусоидальные затухающие колебания с частотой Ω_0 и декрементом θ, которые возрастают с увеличением накачки.

Предсказываемые теорией затухающие гармонические колебания интенсивности, действительно, наблюдаются у некоторых лазеров, но очень часто колебания оказываются незатухающими. Режим первого типа иллюстрируется рис. 11.17, на котором воспроизведено пичковое излучение лазера на $CaWO_4$: Nd^{3+}.

Пример.

Релаксационные колебания. Зададим следующие значения параметров лазера, пульсации которого представлены на рис. 11.17: $T_1 = 1{,}6\cdot10^{-4}$ с, $t_c = 10^{-8}$ с, $\eta = 2$, и подсчитаем по формуле (11.4.10), что $T_0 = 2\pi/\Omega_0 \approx 8\cdot10^{-6}$ с.

Очень часто наблюдающиеся незатухающие пульсации интенсивности излучения лазеров можно объяснить, по крайней мере, ка-

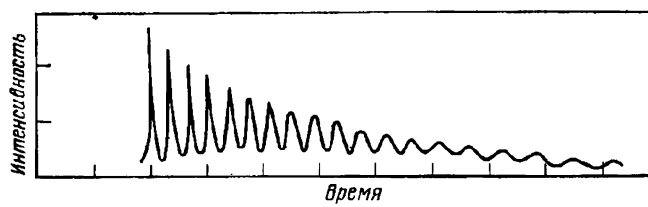


Рис. 11.17. Релаксационные колебания интенсивности излучения лазера на $CaWO_4$: Nd^{3+}, работающего на длине волны 1,06 мкм. Цена деления временной шкалы 20 мкс [20]

чественно, рассматривая уравнение (11.4.9). Оно, как известно, совпадает по форме с уравнением затухающего осциллятора без внешнего воздействия или RLC-контура. Незатухающими колебания такого осциллятора становятся под воздействием внешней силы. Одним из механизмов вынужденной раскачки пульсаций может оказаться меняющаяся во времени скорость накачки R[1]. В этом случае представим накачку в виде

$$R = R_0 + R_1(t). \tag{11.4.11}$$

Воспроизводя вывод уравнения (11.4.6), но имея в виду (11.4.11) приходим к видоизмененному уравнению для инверсии $dN_1/dt = R_1 - R_0 B t_c N_1 - \Phi_1/t_c$ и взамен (11.4.9) получаем

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} + \frac{\eta}{T_1}\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{\eta-1}{T_1 t_c}\Phi_1 = \frac{\eta-1}{T_1} R_1. \tag{11.4.12}$$

Осуществив фурье-преобразование обеих частей (11.4.12), обозначив посредством $F(\omega)$ и $R(\omega)$ величины, сопряженные $\Phi_1(t)$ и $R_1(t)$ соответственно, находим

$$\Phi(\omega) = \frac{-T^{-1}(\eta-1)R(\omega)}{\omega^2 - i(\eta/T_1)\omega - (T_1 t_c)^{-1}(\eta-1)} = \\ = -\frac{(\eta-1)R(\omega)/T_1}{(\omega-\Omega_0-i\theta)(\omega+\Omega_0-i\theta)}. \tag{11.4.13}$$

Заметим, что Ω_0 и θ совпадают с частотой и декрементом затухания переходных пульсаций, которые даются формулами (11.4.10). Если предположить, что спектр $R(\omega)$ вынуждающей силы $R(t)$ однороден (т. е. подобен спектру «белого шума») вблизи частоты $\omega = \Omega_0$, то спектр интенсивности $\Phi(t)$ будет иметь пик с вершиной на частоте Ω_0 и с шириной $2\Omega \approx 2\theta = \eta/T_1$. Кроме того, если $\Delta\Omega \ll \Omega_0$, то можно ожидать, что во временном представлении флуктуации интенсивности будут промодулированы с частотой Ω_0[2].

---

[1]) Современные представления о причинах, вызывающих незатухающие пульсации интенсивности излучения лазеров, несколько отличаются от изложенных в данном параграфе. Этому вопросу посвящено дополнение I. — *Прим. ред.*

[2]) С целью проверки правильности этого утверждения будем считать $R(t)$ суперпозицией некоррелированных синусоидальных колебаний $R(t) \propto \propto \sum_n a_n e^{i\omega_n t}$ и воспользовавшись преобразованием $R(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-i\omega t} dt$, получим $R(\omega) \propto \sum_n a_n \delta(\omega-\omega_n)$. Обратное преобразование $\Phi(t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \times \times e^{i\omega t} d\omega$ с учетом (11.4.13) дает $\Phi(t) \propto \sum_n \frac{a_n \exp(i\omega_n t)}{(\omega_n-\Omega_0-i\theta)(\omega_n+\Omega_0-i\theta)}$. В пределе $\Omega \gg \theta$, $\Phi(t)$ описывает квазигармонические колебания с частотой Ω_0.

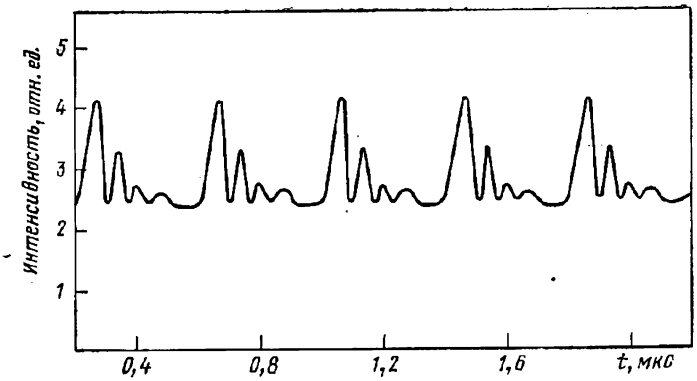


Рис. 11.18. Релаксационные колебания интенсивности излучения ксенонового лазера с $\lambda=3{,}51$ мкм [21]

Сделанные выводы подтверждаются экспериментальными результатами, относящимися к лазерам различных типов. На рис. 11.18 изображены пульсации интенсивности излучения ксенонового лазера на $\lambda = 3{,}51$ мкм. Соответствующий им спектр $F(\omega)$ представлен на рис. 11.19. Увеличение накачки приводит (рис. 11.20) к уширению спектра и к его перемещению в область высоких частот, что согласуется с (11.4.15).

Резонансная природа отклика $\Phi(\omega)/R(\omega)$ проявляется также и в опытах с модуляцией каких-либо параметров лазера на частотах, близких к $\Omega_0/2\pi$. Внутренняя модуляция связи [22, 23] на этих частотах обычно воспроизводится в излучении с сильными искажениями [24].

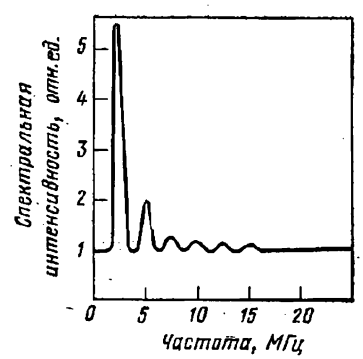
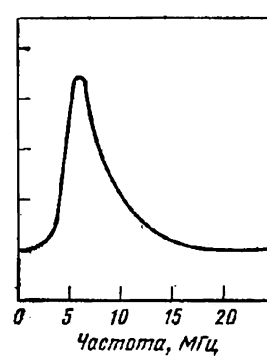


Рис. 11.19. Спектр флуктуаций интенсивности лазера, временной ход излучения которого приведен на рис. 11.18 [21]



Рисъ 11.20. Спектр флуктуаций интенсивности того же лазера при большей накачке [21]

11.5. Пассивная синхронизация мод

При обсуждении способов синхронизации мод было установлено, что такой режим достигается введением в резонатор тонкого периодически открывающегося затвора. Схемы лазеров с такими затворами показаны на рис. 11.11 и 11.13. В отмеченных случаях затвор управляется внешним сигналом, по этой причине реализующийся режим работы лазера часто называют «активной синхронизацией мод».

Эффекта периодического перекрытия оптического пути можно также достичь, помещая внутрь резонатора насыщающийся поглотитель [5, 25]. В качестве поглотителя обычно используются растворы органических красителей или газообразные среды, поглощение которых на длине волны генерации лазера падает с ростом интенсивности излучения. Насыщающийся поглотитель будет поддерживать импульсный режим генерации, потому что в таком режиме потери меньше, чем при непрерывной генерации [26, 27].

Процесс генерации после включения идет так, что наиболее интенсивный из выбросов начального флуктуационного поля в резонаторе развивается значительно (экспоненциально) быстрее остальных. В результате устанавливаются пульсации излучения с периодом, равным времени полного обхода резонатора $2L/c$. Эта пассивная синхронизация мод наиболее используема в импульсных лазерах с длительностью накачки $< 10^{-3}$ с.

Имеется и дополнительный аргумент в пользу того, что насыщающийся поглотитель с временем восстановления, равным s^{-1}, приводит к синхронизации мод и генерации импульсов с длительностью $\tau_и \approx s^{-1}$. Он состоит в том, что полная энергия, теряемая импульсом заданной энергии, перестает зависеть от $\tau_и$, если $s\tau_и \ll 1$, поскольку краситель не успевает восстанавливаться за время генерации импульса. Этот результат следует из анализа [27], в котором используется двухуровневая модель поглотителя

$$\frac{dN_{1a}}{dt} = W_{инд}(N_{2a} - N_{1a}) + sN_{2a}, \qquad N_a = N_{1a} + N_{2a}, \tag{11.5.1}$$

где N_{1a} и N_{2a} — плотности молекул в основном (поглощающем) и возбужденном состояниях. Символом s обозначена вероятность спонтанного перехода молекулы с уровня *2* на *1*, в то время как $W_{инд}$ — вероятность индуцированного перехода $2 \leftrightarrows 1$. N_a — общая плотность молекул.

Представим себе прямоугольный импульс излучения длительностью $\tau_и$, на единицу поперечного сечения которого в пространстве приходится M фотонов. Уменьшение потока фотонов $M/\tau_и$ (фотонов/м^2 с) с расстоянием равно числу молекул, возбудившихся за единицу времени в единице объема

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{\tau_и}\right) = -\frac{\sigma_a M}{\tau_и}(N_{1a} - N_{2a}). \tag{11.5.2}$$

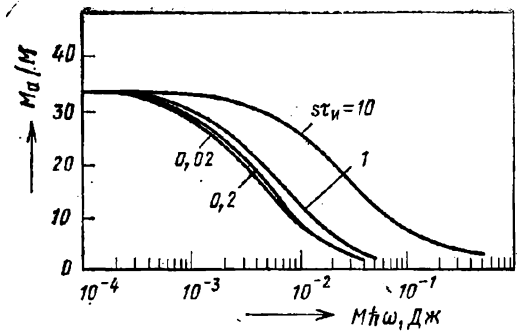


Рис. 11.21. Доля энергии импульса, поглощенная двухуровневой средой при различных значениях параметра $s\tau_и$, равного отношению длительности импульса к времени релаксации среды [29]
$N_a = 6 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$, $l_a = 10^{-3}$ м, $\sigma_a = 0{,}58 \cdot 10^{-20}$ м^2.

Здесь использовано соотношение $W_{инд} = \sigma_a M/\tau_и$, где σ_a — сечение резонансного поглощения (м^2). Если при $t = 0$ все молекулы находятся в основном состоянии, $N_{1a} = N_a$, уравнения (11.5.1) и (11.5.2) сводятся к следующему:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{\tau_и}\right) = \frac{N_a \sigma_a M}{\tau_и (2\sigma_a M/\tau_и + s)}\left[s + 2\frac{\sigma_a M}{\tau_и} e^{-(s+2\sigma_a M/\tau_и)t}\right]. \quad (11.5.3)$$

Полагая, что интенсивность излучения в результате однократного прохождения ячейки убывает не слишком сильно (скажем, ненасыщенное поглощение за проход меньше 35%), уравнение (11.5.3) можно проинтегрировать по всей длине поглощающей ячейки l_a и подсчитать полное число фотонов на единицу площади, поглотившихся при прохождении импульса через ячейку

$$\frac{M_a}{M} = \frac{N_a \sigma_a s\tau_и l_a}{2\sigma_a M + s\tau_и} + \frac{2N_a \sigma_a^2 M l_a}{(2\sigma_a M + s\tau_и)^2}\left(1 - e^{-(2\sigma_a M + s\tau_и)}\right). \quad (11.5.4)$$

Доля поглощенной энергии M_a/M как функция энергии импульса M, подсчитанная по последней формуле при нескольких значениях параметра $s\tau_и$, графически изображена на рис. 11.21. Выше уже говорилось, что длительность импульса, намного меньшая времени релаксации, не приводит к заметному уменьшению потерь. Это обстоятельство ограничивает длительность импульса величиной $\tau_и \approx s^{-1}$, в то время как ширина линии усиления $\Delta\omega_{одн} \gg s$. Отсюда следует, что все спектральные компоненты излучения усиливаются активной средой[1])

[1]) В § 11.5 рассмотрен частный вопрос о затухании импульса при его распространении в резонансной двухуровневой среде. Этот вопрос имеет весьма косвенное отношение к задаче о динамике лазера с пассивной синхронизацией мод. Характеристики излучения такого лазера зависят от свойств не только поглотителя, но и активной среды. Вывод о том, что длительность генерируемых лазером импульсов ограничена снизу временем релаксации молекул поглотителя, справедлив лишь в случае инерционной активной среды, усиление которой очень мало меняется за время порядка периода следования импульсов. В этом случае устойчивость системы в промежутках между импуль-

Задачи

11.1. а) Дайте качественное описание того, что должно наблюдаться в точках A, B, C, D экспериментальной установки для исследования синхронизации мод, схема которой изображена на рис. 11.11.

б) Как сказывается эффект синхронизации мод на интенсивности сигнала биений с частотой $\Omega = \pi c/L$, наблюдаемого на экране спектроанализатора? Предположите, что генерируются N мод равной амплитуды, разделенных частотным интервалом и имевших до синхронизации произвольные фазы.

Ответ интенсивность сигнала биений возрастет в N раз.

11.2. Проанализируйте способ синхронизации мод посредством модуляции диэлектрической проницаемости ε (а не потерь σ) с частотой, равной межмодовому интервалу $c/2L$. В случае неоднородного уширения линии активной среды задачу можно решить методом, сходным с изложенным в § 11.2, а в случае однородного уширения — подобно тому, как это сделано в § 11.3.

Глава 12

УСИЛЕНИЕ СИГНАЛОВ И СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Лазеры используются не только как генераторы, но также и как усилители. За маломощными квантовыми генераторами с целью повышения уровня мощности часто ставится несколько каскадов усиления. На входе усилителя, таким образом, имеются два конкурирующих источника: а) заданная волна, подлежащая усилению (ее будем называть «сигналом») и б) спонтанное излучение активной среды на частоте рабочего перехода. С точки зрения усиления сигнала наличие последнего источника представляется нежелательным. Это

сами обеспечивается только ненасыщенными потерями в поглотителе, откуда и вытекает ограничение на длительность импульса. Так обстоит дело в твердотельных лазерах.

В лазерах на красителях пассивная синхронизация мод позволяет получать импульсы с длительностью, значительно меньшей времени релаксации насыщающегося поглотителя. Объясняется это тем, что времена релаксации генерирующих красителей соизмеримы с временем обхода резонатора световой волной и, следовательно, колебания усиления с периодом следования импульсов могут иметь большую амплитуду. В таких условиях устойчивость системы между импульсами обеспечивается не только потерями в поглотителе, но и малым усилением в активной среде.

Световые импульсы с длительностью меньшей времен релаксации активных и поглощающих молекул практически удается получать, используя лазеры на красителях с непрерывной накачкой. Некоторые сведения по этому вопросу можно найти в [36, § 3,3 и 3.4]. Теория такого лазера развита в работах [37—39]. — *Прим. ред.*

обусловлено тем, что спонтанное излучение (шум) смешивается с сигналом, уменьшая его информационное содержание (см. гл. 13). Плохо и то, что насыщение, обусловленное спонтанным излучением, уменьшает усиление входного сигнала (см. задачу 12.1).

Проблемы, не связанные с наличием входного сигнала, также представляют интерес. К их числу относится сверхлюминесценция[1], т. е. усиление спонтанного излучения, сопровождающееся сужением его спектра. Сверхлюминесценция впервые наблюдалась в инжекционных лазерах на GaAs [2], а впоследствии была получена и на многих других лазерных переходах. К этому же кругу явлений примыкает излучение межгалактических облаков, имеющее узкий спектр и являющееся, по-видимому, усиленным спонтанным излучением [1,2].

12.1. Спектр спонтанного излучения

Обратимся к формуле (8.7.12) для показателя усиления активной среды при произвольном соотношении однородного и неоднородного уширения [4]

$$\gamma(\nu)=\frac{\Delta N_0\,\lambda^2\,\Delta\nu_{\text{одн}}}{16\pi^2 n^2 t_{\text{сп}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\nu_l)}{(\nu-\nu_l)^2+(\Delta\nu_{\text{одн}}/2)^2+S'\,I_\nu}\,d\nu_l, \qquad (12.1.1)$$

где $\Delta\nu_{\text{одн}}$ — ширина однородной линии;

$$S'=\varphi\lambda^2\Delta\nu_{\text{одн}}/(8\,\pi^2 n^2\,h\nu) \qquad (12.1.2)$$

параметр насыщения, $p(\nu)$ — нормированная функция, описывающая форму неоднородно уширенной линии, I_ν — интенсивность усиливаемой монохроматической волны с частотой ν. В случае доплеровского уширения имеем из (8.6.10)

$$p(\nu_l)=\frac{2(\ln 2)^{1/2}}{\pi^{1/2}\Delta\nu_D}\exp\left\{-\left[\frac{2(\nu_l-\nu_0)}{\Delta\nu_D}\right]^2\ln 2\right\}. \qquad (12.1.3)$$

и (12.1.1) можем записать как

$$\gamma(\nu)=\varkappa\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{2}{\pi\Delta\nu_{\text{одн}}}\exp\left\{-\left[\frac{2(\nu_l-\nu_0)}{\Delta\nu_D}\right]^2\ln 2\right\}}{1+[2(\nu-\nu_l)/\Delta\nu_{\text{одн}}]^2+SI_\nu}\,d\nu_l=$$

$$=\varkappa\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{(2/\pi\Delta\nu_{\text{одн}})}{1+[2(\nu-\nu_l)/\Delta\nu_{\text{одн}}]^2}\exp\left\{-\left[\frac{2(\nu_l-\nu_0)}{\Delta\nu_D}\right]^2\ln 2\right\}}{1+S\frac{I_\nu}{1+[2(\nu-\nu_l)/\Delta\nu_{\text{одн}}]^2}}\,d\nu_l, \qquad (21.1.4)$$

[1] Сверхлюминесценцию не следует путать с излучением когерентно организованных состояний квантовых систем, рассматриваемым в гл. 15.

где

$$\varkappa = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 (\ln 2)^{1/2}}{4\pi^{3/2} t_{\text{сп}} n^2 \Delta\nu_D}, \qquad S = \frac{\varphi\lambda^2}{2\pi^2 n^2 h\nu \Delta\nu_{\text{одн}}}. \tag{12.1.5}$$

Величина S является обратной по отношению к интенсивности насыщения $I_{\text{нас}}$, определенной посредством (8.7.16). Из (12.1.4) следует, что $\varkappa$ представляет собой показатель усиления на центре линии ($\nu = \nu_0$) в доплеровском пределе ($\Delta\nu_D \gg \Delta\nu_{\text{одн}}$) без учета насыщения ($SI_\nu \ll 1$).

Для упрощения последующих преобразований введем безразмерные частоты

$$y(\nu) \equiv 2(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_{\text{одн}} \tag{12.1.6}$$

и

$$\zeta \equiv (\Delta\nu_{\text{одн}}/\Delta\nu_D)\sqrt{\ln 2} \tag{12.1.7}$$

и перепишем (12.1.4) в виде

$$\gamma(y) = \frac{\varkappa}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\zeta^2 y_l^2}}{[1+(y-y_l)^2]\left[1 + \dfrac{SI_y}{1+(y-y_l)^2}\right]}\, dy_l. \tag{12.1.8}$$

Последний результат легко обобщается на случай немонохроматических полей. В этом случае введем спектральную плотность интенсивности $I(y)$ такую, что $I(y)\,dy$ — интенсивность в спектральном интервале частот от y до $y + dy$, и запишем вместо (12.1.8)

$$\gamma(y) = \frac{\varkappa}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\zeta^2 y_l^2}}{[1+(y-y_l)^2]\left[1 + S\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(y_n)\,dy_n}{1+(y_l-y_n)^2}\right]}\, dy_l. \tag{12.1.9}$$

Эта формула служит отправным пунктом теории усиления излучения с широким спектром. Рассмотрим вначале случай ненасыщенного усилителя ($SI \ll 1$).

Усиление без насыщения. В однородном ненасыщенном усилителе величина усиления $\gamma(y)$ не зависит от пространственных координат и рост интенсивности описывается выражением

$$\frac{dI(y, z)}{dz} = \gamma(y)\, I(y, z) - \alpha I(y, z) + \eta\gamma(y). \tag{12.1.10}$$

Второй член в правой части (12.1.10) выражает распределенные потери. Последний член, учитывающий спонтанное излучение, пропорционален коэффициенту усиления $\gamma(y)$ [1]. Коэффициент η зави-

[1] Строго говоря, пропорциональность спонтанного излучения коэффициенту усиления среды имеет место только в том случае, когда нижний рабочий уровень не населен. — *Прим. ред.*

сит от геометрии системы [4, 7]. Интегрирование (12.1.10) от 0 до z дает

$$I(y, z) = I(y, 0)\, e^{[\gamma(y)-\alpha]z} + \frac{\eta\gamma(y)}{\gamma(y)-\alpha}\{e^{[\gamma(y)-\alpha]z} - 1\}. \quad (12.1.11)$$

В задаче о сверхлюминесценции (усиленном спонтанном излучении) входной сигнал $I(y, 0)$ отсутствует и, если потери пренебрежимо малы, то

$$I(y, z) = \eta\,[e^{\gamma(y)z} - 1]. \quad (12.1.12)$$

Спектральное распределение интенсивности излучения в точке z характеризуется функцией $f(y, z)$, определенной как отношение спектральной плотности интенсивности на частоте y к ее величине на центре линии

$$f(y, z) = \frac{I(y, z)}{I(0, z)} = \frac{\exp[\gamma(y)z] - 1}{\exp[\gamma(0)z] - 1}. \quad (12.1.13)$$

Для однородно-уширенной линии ($\zeta \gg 1$) и в пренебрежении насыщением коэффициент усиления $\gamma(y)$ (12.1.9) принимает вид

$$\gamma(y)_{\text{одн}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}\,\zeta}\,\frac{1}{1+y^2}. \quad (12.1.14)$$

Ширину спектра $\Delta\nu_{\text{изл}}$ в точке z можно определить как интервал между двумя частотами, на которых спектральная плотность интенсивности равна половине ее значения в центре линии, т. е. частотами, на которых $f(y, z) = 0{,}5$. Используя (12.1.14) и (12.1.13), получаем

$$\Delta\nu_{\text{изл}} = \Delta\nu_{\text{одн}} \sqrt{\frac{\varkappa z}{\sqrt{\pi}\,\zeta}\,\frac{1}{\ln\left[\frac{1}{2}\left(\exp\frac{\varkappa z}{\sqrt{\pi}\,\zeta}+1\right)\right]} - 1}. \quad (12.1.15)$$

Для «малых» расстояний ($\varkappa z/\sqrt{\pi}\zeta \ll 1$), как и предполагалось, $\Delta\nu_{\text{изл}} = \Delta\nu_{\text{одн}}$. Для «больших» расстояний ($\varkappa z/\sqrt{\pi}\zeta \gg 1$) ширина линии (12.1.15) сводится к виду

$$\Delta\nu_{\text{изл}} \approx \Delta\nu_{\text{одн}} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}\,\zeta}{\varkappa z}\ln 2} = \Delta\nu_{\text{одн}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\gamma(0)_{\text{одн}}\, z}}. \quad (12.1.16)$$

В отсутствие насыщения среда с неоднородным уширением линии ($\zeta \ll 1$) обладает вблизи центра линии усилением $\gamma(y)$, выражение для которого

$$\gamma(y)_{\text{неодн}} = \varkappa \exp(-\zeta^2 y^2) \quad (12.1.17)$$

следует из общей формулы (12.1.9). Подставляя этот результат в (12.1.13) и определяя $\Delta\nu_{\text{изл}}$ как разность двух частот, для которых $f(y, z) = 0{,}5$, получим

$$\Delta\nu_{\text{изл}} = \Delta\nu_D \sqrt{\frac{\ln \varkappa z - \ln\ln 1/2\,[\exp(\varkappa z)+1]}{\ln 2}}. \quad (12.1.18)$$

Эта величина на малых расстояниях ($\varkappa z \ll 1$) стремится к $\Delta\nu_D$, в то время как на больших расстояниях ($\varkappa z \gg 1$) она приближается к величине

$$\Delta\nu_{\text{изл}} \approx \Delta\nu_D / \sqrt{\varkappa z} = \Delta\nu_D / \sqrt{\gamma(0)_{\text{неодн}}\, z}. \qquad (12.1.19)$$

Полученные результаты сводятся к следующему. Спектр спонтанного излучения в коротком усиливающем стержне, $\gamma(0)\, z \ll 1$, не зависит от длины стержня, тогда как в длинном стержне, $\gamma(0)\, z \gg 1$, имеет место сужение спектра

$$\Delta\nu(z)/\Delta\nu(0) \approx 1/\sqrt{\gamma(0)\, z} \qquad (12.1.20)$$

и для однородного, и для неоднородного уширения линии. Можно показать [5], что в отсутствие насыщения формула (12.1.20) применима к любым системам с колоколообразным профилем усиления, а не только к двум рассмотренным предельным случаям однородного и доплеровского уширения. В пределе $\gamma(0)\, z \gg 1$ спектр усиленного спонтанного излучения приближается к гауссову с центром в максимуме линии усиления.

Предыдущее рассмотрение справедливо только в ненасыщенном режиме. При достаточно большой протяженности усиливающей среды интенсивность излучения достигает таких значений, когда эффект насыщения становится существенным. Эволюция спектра в этом случае отличается и качественно, и количественно от линейного усиления.

12.2. Режим насыщения

Если активная среда имеет достаточно большую протяженность, то интенсивность сигнала I_t усиливается до тех пор, пока не достигнет величины $SI_t \gg 1$. В этом случае согласно (12.1.9) усиление γ является функцией частоты y и координаты z, в отличие от ненасыщающего усиления, когда γ не зависит от z. В режиме насыщения поведение активных сред с однородным и неоднородным уширением различается коренным образом. При однородном уширении основная особенность состоит в расширении контура усиления с одновременным снижением его максимума. Благодаря этому усиление на разных частотах отличается не столь сильно, как в ненасыщенном случае, и процесс сужения спектра менее эффективен. В случае неоднородного уширения возникающий провал приводит к тому, что более интенсивная часть спектра вблизи центра линии подвергается меньшему усилению по сравнению с частотами, расположенными на крыльях. Вследствие этого, ширина спектра, которая уменьшалась, пока не было достигнуто насыщение, затем начинает увеличиваться и на больших расстояниях стремится к исходному значению $\Delta\nu_D$.

Эффект насыщения при однородном уширении. При $\zeta \gg 1$ функция $\exp(-\zeta^2 y_1^2)$ в (12.1.9) много уже остальных подынтег-

ральных функций, и последние могут быть вынесены за знак интеграла. В результате получаем

$$\gamma(y, z) = \frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}\,\zeta h(z)} \frac{1}{(1+y^2)}, \tag{12.2.1}$$

$$h(z) = 1 + S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(y_n, z)}{1+y_n^2}\, dy_n. \tag{12.2.2}$$

Уравнение (12.1.10) сводится к

$$\frac{dI(y, z)}{dz} = \gamma(y, z) I(y, z) + \eta\gamma(y, z) - \alpha I(y, z) \tag{12.2.3}$$

и имеет решение

$$I(y, z) = \exp\left\{\int_0^z [\gamma(y, z') - \alpha]\, dz'\right\}\left[I(y, 0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^z \eta\gamma(y, z') \exp\left\{\int_0^{z'} [\gamma(y, z'') - \alpha]\, dz''\right\} dz'\right]. \tag{12.2.4}$$

Отсюда следует, что выражение (12.1.16) заменяется на

$$\Delta\nu_{\text{изл}} = \Delta\nu_{\text{одн}} \sqrt{\sqrt{\pi}\,\zeta \ln 2/\varkappa \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}}. \tag{12.2.5}$$

Последнее переходит в (12.1.16), если пренебречь насыщением, т. е. считать $h(z) = 1$. Для дальнейшего необходимо знать $h(z)$. Если спектр излучения узок по сравнению с $\Delta\nu_{\text{одн}}$, (12.2.2) запишется в виде

$$h(z) \simeq 1 + S \int_{-\infty}^{\infty} I(y_n, z)\, dy_n = 1 + SI_t(z), \tag{12.2.6}$$

где I_t — полная интенсивность. Используя (12.2.1), (12.2.6) и считая спектр узким, можно проинтегрировать (12.2.3) по частоте, и получим

$$\frac{dI_t}{dz} = \frac{\varkappa I_t}{\sqrt{\pi}\,\zeta(1+SI_t)} - \alpha I_t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta\varkappa}{\sqrt{\pi}\,\zeta(1+SI_t)(1+y^2)}\, dy =$$

$$= \frac{\varkappa I_t}{\sqrt{\pi}\,\zeta(1+SI_t)} + \frac{\eta\varkappa\sqrt{\pi}}{\zeta(1+SI_t)} - \alpha I_t. \tag{12.2.7}$$

В области сильного насыщения $SI_t \gg 1$, но при не слишком больших I_t, когда $\varkappa/\sqrt{\pi}\zeta S \gg \alpha I_t$, первое слагаемое в правой части 12.2.7) преобладает и

$$I_t(z) \approx I(0) + \varkappa z/\sqrt{\pi}\,\zeta S. \tag{12.2.8}$$

Это относится к режиму насыщения без потерь. Волна в нелинейном усилителе обычно достигает точки, за который член, описывающий потери αI_t в (12.2.7) уже нельзя отбросить. В этом случае существенными оказываются первое и третье слагаемые в правой части (12.2.7) и интенсивность достигает стационарного значения

$$I_t = \varkappa/\sqrt{\pi}\,\zeta S\alpha = \gamma(0)_{\text{одн}}/S\alpha, \qquad (12.2.9)$$

где $\gamma(0)_{\text{одн}}$ — ненасыщенный показатель усиления спектрально однородной активной среды. Суммируя сказанное, можно записать изменение интенсивности сигнала при его распространении в спектрально-однородной активной среде

$$I_t(z) = \begin{cases} I_t(0)e^{[\gamma(0)_{\text{одн}}-\alpha]z} + \dfrac{\eta\gamma(0)_{\text{одн}}}{\gamma(0)_{\text{одн}}-\alpha}\left\{e^{[\gamma(0)_{\text{одн}}-\alpha]z}-1\right\} \\ \qquad\qquad \text{линейный режим } (а), \\ I_t(0)+\gamma(0)_{\text{одн}}z/S \text{ насыщение в отсутствие потерь } (б), \\ \gamma(0)_{\text{одн}}/S\alpha \text{ насыщение при наличии потерь } (в). \end{cases} \qquad (12.2.10)$$

Поскольку эффект насыщения приводит к ограничению усиления оконечных каскадов мощных квантовых усилителей, изучение зависимостей $I_t(z)$ и $I(y, z)$ в режиме насыщения представляет большой интерес. Для определенности рассмотрим лазер со спектрально-однородной активной средой (12.2.10). В режиме насыщения без потерь

$$I_t(z) = I_t(0) + \gamma(0)_{\text{одн}}z/S.$$

Используя (12.1.5) и (8.4.4), преобразуем слагаемое $\gamma(0)_{\text{одн}}z/S$ и окончательно

$$I_t = I_t(0) + (N_2 - N_1 g_2/g_1)_0\,(h\nu/t_2)z. \qquad (12.2.11)$$

Здесь индексом «0» отмечены ненасыщенные значения величин, и использовано обозначение $\varphi = t_2/t_{\text{сп}}$. Прирост интенсивности на единицу длины — $[N_2 - N_1(g_2/g_1)]_0\,h\nu/t_2$ представляет собой максимальную мощность, которую индуцированное излучение может отобрать от единицы объема активной среды. В этом пределе вероятность индуцированного излучения гораздо больше суммы вероятностей релаксации и спонтанного излучения, так что все N_{20}/t_2 атомов, возбуждаемых в единице объема за секунду, возвращаются на нижний уровень в результате индуцированных переходов.

На рис. 12.1 представлены экспериментальные данные, касающиеся усиления спонтанного излучения с $\lambda = 0{,}4970$ мкм в полупроводниковом лазерном усилителе на CdS. Сплошная кривая построена по формуле (12.2.10а) при входном сигнале $I_t(0) = 0$. Отклонение экспериментальных точек от теоретической кривой при большой длине усилителя означает переход к режиму насыщения в отсутствие потерь, который описывается формулой (12.2.10в).

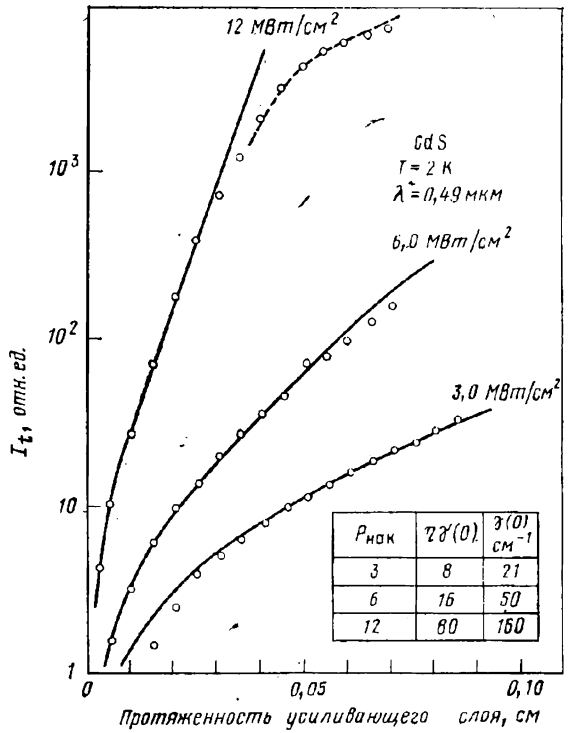


Рис. 12.1. Зависимость интенсивности усиленного спонтанного излучения (сверхлюминесценции) от протяженности активной среды при указанных уровнях накачки.

Точками отмечены экспериментальные результаты; сплошные кривые построены по первой из формул (12.2.10) при $\alpha=0$ и $I_t(0)=0$ [5]

Поскольку выражение (12.2.10) было получено в предположении о малой ширины спектра, оно также применимо и к случаю усиления монохроматического входного сигнала, совпадающего по частоте с центром линии.

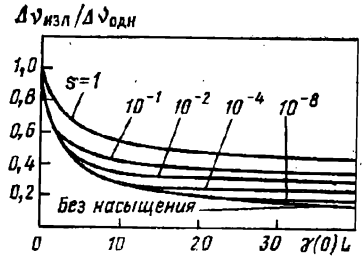
Получив представление о поведении интегральной интенсивности I_t, перейдем к вопросу о спектре усиленного спонтанного излучения, т. е. $I_t(0) = 0$.

Подставим (12.2.10) в (12.2.6) и затем полученное выражение для $h(z)$ подставим в формулу (12.2.5). Полагая $I_t(0) = 0$, получаем

$$\frac{\Delta\nu_{изл}}{\Delta\nu_{одн}} = \begin{cases} \sqrt{\ln 2/\gamma(0)_{одн}\, z} & \text{ненасыщающий режим без потерь } (a), \\ \sqrt{\ln 2/\ln \gamma(0)_{одн}\, z} & \text{насыщение в отсутствие потерь } (б), \\ \sqrt{\ln 2/\alpha z} & \text{насыщение при наличии потерь } (в). \end{cases} \tag{12.2.12}$$

Неоднородное уширение. В пределе неоднородного уширения ($\zeta \ll 1$) для спектра излучения, широкого по сравнению с естественной шириной линии $\Delta\nu_{одн}$, получим из (12.1.9)

$$\gamma(y, z) = \varkappa \exp(-\zeta^2 y^2)/[1 + \pi SI(y, z)]. \tag{12.2.13}$$



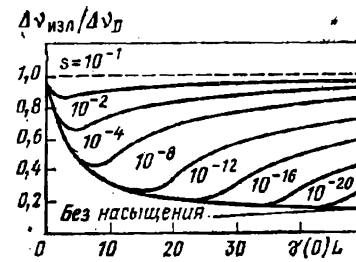


Рис. 12.2. Сужение спектра сверхлюминесценции в усиливающей среде с однородно-уширенной линией при различных значениях $s=S\eta$ [6]

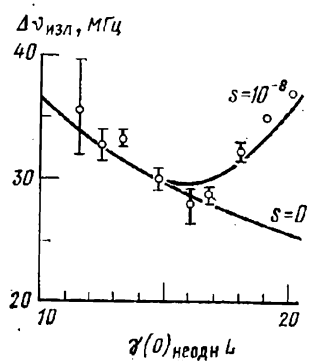


Рис. 12.3. Сужение спектра сверхлюминесценции в усиливающей среде с неоднородной (доплеровской) формой линии при различных значениях $s=S\eta$ [6]

Рис. 12.4. Рассчитанная ширина спектра по уровню 0,5 от максимума выходного излучения ксенонового лазерного усилителя на длине волны 3,51 мкм как функция величины $\gamma_{\text{неодн}}(0)L$ (S — параметр насыщения) (Точки соответствуют экспериментальным данным [7].)

Подступая так же, как при выводе формул (12.2.10), подставим (12.2.13) в выражение (12.1.10) и получим для трех интересующих нас случаев

$$I(y, z)=\begin{cases} I(y, 0)\exp[\varkappa z\exp(-\zeta^2 y^2)]+ \\ \quad +\eta\{\exp[\varkappa z\ \exp\ (-\zeta^2 y^2)]-1\} \\ \text{ненасыщающий режим без потерь } (а), \\ I(y, 0)+\dfrac{\varkappa z}{\pi S}\exp(-\zeta^2 y^2)\ \text{насыщение в отсутствие потерь } (б), \\ \dfrac{\varkappa}{\pi\alpha S}\exp(-\zeta^2 y^2)\ \text{насыщение при наличии потерь } (в). \end{cases} \qquad (12.2.14)$$

Ширина линии $\Delta\nu_{\text{изл}}$ для линейного усиления в отсутствие потерь была получена выше и определяется по формуле (12.1.19). В режимах насыщения частотная зависимость определяется функцией

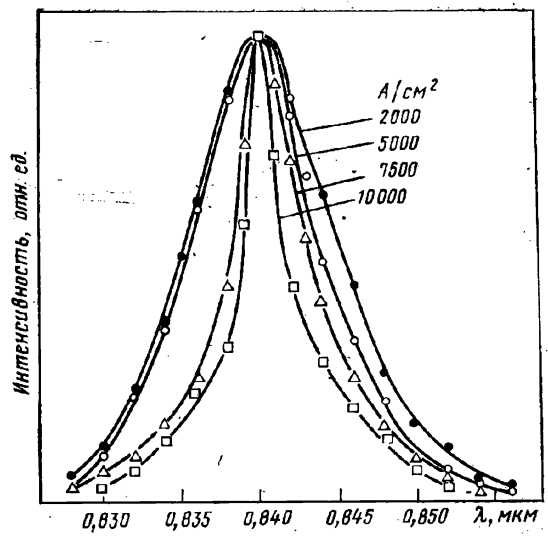


Рис. 12.5. Спектральный профиль излучения p—n-перехода в GaAs для нескольких значений тока инжекции.

Кривые приведены к одной амплитуде и смещены по горизонтальной оси до совпадения их вершин [3]

$\exp(-\zeta^2 y^2)$, т. е. ненасыщенной доплеровской функцией формы линии. Таким образом,

$$\frac{\Delta\nu_{изл}}{\Delta\nu_D} = \begin{cases} 1/\sqrt{\varkappa z} = \sqrt{\gamma(0)_{неодн}\, z} & \text{ненасыщающий режим без потерь } (а), \\ 1 & \text{насыщение в отсутствие потерь } (б), \\ 1 & \text{насыщение при наличии потерь } (в). \end{cases} \quad (12.2.15)$$

После начального сужения спектр затем восстанавливается до первоначальной ширины.

На рис. 12.2 и 12.3 представлены теоретические кривые, предсказывающие поведение усиленного спонтанного излучения. Экспериментальные данные, свидетельствующие о восстановлении начальной ширины спектра излучения при усилении в среде с неоднородным уширением линий, приведены на рис. 12.4. Они получены при работе с лазерным усилителем на ксеноне на длине волны 3,51 мкм. На рис. 12.5 представлены экспериментальные результаты, демонстрирующие сужение спектра в лазерном усилителе на GaAs.

Задача

12.1. Имеется активный элемент длиной l с площадью поперечного сечения A. Ненасыщенный показатель усиления γ_0. Покажите, что максимально достижимое усиление такой системы вследствие насыщения среды собственным спонтанным излучением ограничено величиной $[\exp(\gamma l)]_{max} \approx (t_{сп}/t_2)\ (4\pi l^2/A)$.

Указание: рассмотрите точку, с обеих сторон от которой скорость индуцированных переходов под влиянием усиленного спонтанного излучения с обеих сторон равна $t^{-\frac{1}{2}}$.

Глава 13

ШУМЫ В ЛАЗЕРНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ И ГЕНЕРАТОРАХ

Понятие шума, существующее в теории связи, не отличается особой четкостью. Трудно дать определение, которое, не отступая от самого смысла слова «шум», в то же время, раскрывало бы все физическое содержание, вкладываемое нами в понятие шума. Хотя это и будет проявлением малодушия, мы обойдем указанную проблему, назвав шумовой ту мощность, которая имеется в канале связи в отсутствие сигнала. По нашим интуитивным представлениям, шум не коррелирован с сигналом и поэтому уменьшает его информативное содержание. Но задачу оценки влияния такого шума мы оставим специалистам по теории информации.

Шум в системе может быть связан с конкретными физическими процессами типа дробового эффекта и спонтанного излучения, но может и отражать наличие принципиальных ограничений, присущих процессу измерения. Правда, различие между указанными случаями часто оказывается чисто условным, в чем можно убедиться на примере § 13.1.

13.1. Шумы в лазерных усилителях

Рассмотрим лазерный усилитель бегущей волны, представляющий собой слой среды с инверсной населенностью. Усиление достигается в результате однократного прохождения излучения через среду. Имеющее шумовой характер спонтанное излучение с верхнего рабочего уровня перемешивается с сигналом, и часть его, которая достигает детектора, вместе с сигналом, ухудшает отношение сигнал/шум. Поэтому рассмотрением шума в оптических лазерных усилителях должен охватываться и вопрос пространственной фильтрации в смысле определения той части шума (и сигнала), которая попадает на приемник. Этот вопрос был рассмотрен в первой работе по лазерам Шавлова и Таунса [1]. Но мы будем придерживаться работы [2].

С целью определения шумовых характеристик усилителя длиной l рассмотрим простую его модель (рис. 13.1). Активная среда с плотностью инверсной разности населенностей $N_2 - N_1$ (g_2/g_1) равномерно заполняет пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Свет с частотой ν, распространяющийся через эту среду под углом θ к оптической

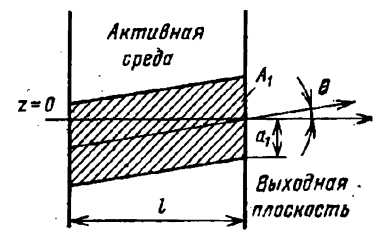


Рис. 13.1. Модель усилителя с диафрагмой в выходной плоскости

оси z, усиливается по закону $\exp(\gamma z/\cos\theta)$. Выражение для показателя усиления по мощности γ согласно (8.4.4) имеет вид

$$\gamma(\nu) = [N_2 - N_1(g_2/g_1)]\ c^2 g(\nu)/8\pi n^2 \nu^2 t_{\text{сп}}. \qquad (13.1.1)$$

Как показано на рис. 13.1, в модели усилителя предполагается наличие в выходной плоскости поглощающего экрана с круглым отверстием радиусом a для вывода сигнала. Ниже определим величину шума, обусловленного спонтанными переходами в активной среде, который проходит сквозь это отверстие.

Мощность шума, спонтанно излучаемая элементом объема dV усиливающей среды в частотном интервале от ν до $\nu + d\nu$ в телесный угол $d\Omega$, определяется выражением

$$d\mathcal{P}_{\text{ш}} = h\nu \frac{N_2 g(\nu)}{t_{\text{сп}}} \frac{d\Omega}{4\pi} d\nu dV. \qquad (13.1.2)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\iiint d\mathcal{P}_{\text{ш}} = N_2 h\nu V/t_{\text{сп}}$. Предположим, что шум распространяется в соответствии с законами геометрической оптики. Шум, испущенный в сечении z и распространяющийся под углом θ к оси z, усиливается в $\exp[\gamma(l-z)/\cos\theta]$ раз, пока не достигнет выходного отверстия или не поглотится экраном. При заданном значении угла θ и полярного угла φ через отверстие (в элемент $d\Omega$ телесного угла) может выйти только шум, возникший в пределах заштрихованного цилиндра (рис. 13.1). Сложив шумовые мощности от всех элементов объема в пределах цилиндра с учетом соответствующих коэффициентов усиления, получим мощность шума $\mathcal{P}_{\text{ш}}(\theta)$, излученного через отверстие с площадью $A_1 = \pi a^2$, под углом θ в элемент телесного угла $d\Omega$

$$\mathcal{P}_{\text{ш}}(\theta) = A_1 \int_0^l dz \frac{d\mathcal{P}_{\text{ш}}}{dV} e^{\gamma(l-z)/\cos\theta}. \qquad (13.1.3)$$

Вычисляя интеграл, находим величину

$$\mathcal{P}_{\text{ш}}(\theta) = A_1 \cos\theta \frac{[\mathcal{G}(\theta)-1]\, h\nu N_2 g(\nu)}{\gamma t_{\text{сп}}} \frac{d\Omega}{4\pi} d\nu, \qquad (13.1.4)$$

где введен коэффициент усиления $\mathcal{G}(\theta)$ усилителя

$$\mathcal{G}(\theta) = \exp(\gamma l/\cos\theta). \qquad (13.1.5)$$

Подставив выражение для γ из (13.1.1), получим окончательно

$$\mathcal{P}_{\text{ш}}(\theta) = 2h\nu d\nu \frac{N_2}{N_2 - N_1(g_2/g_1)} [\mathcal{G}(\nu) - 1] \frac{A_1 n^2 \cos\theta d\Omega}{\lambda^2}. \qquad (13.1.6)$$

Формула (13.1.6) справедлива при любых населенностях N_2 и N_1, а не только в случае инверсии. Рассмотрим, например, среду с положительной температурой T. Для того, чтобы среда обладала свойствами «черного тела», возьмем $l = \infty$. Поскольку $\gamma < 0$, усиление $\mathcal{G} = \exp(\gamma l/\cos\theta) = 0$. Используя этот результат и

соотношение $(N_1/N_2)(g_2/g_1) = \exp(h\nu/kT)$ (справедливое в силу термодинамического равновесия), окончательно имеем

$$\mathcal{P}_{\text{ш}}(\theta) = \frac{2h\nu d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \frac{A_1 n^2 \cos\theta d\Omega}{\lambda^3}. \qquad (13.1.7)$$

Формула (13.1.7) представляет собой классическое выражение для мощности излучения «черной» поверхностью с площадью A_1 при температуре T внутрь телесного угла $d\Omega$ в направлении θ. Формулу (13.1.6), таким образом, можно рассматривать как обобщение теории излучения «черного тела» на случай среды конечной протяженности в отсутствие термодинамического равновесия.

Величину

$$\mathcal{P}_{\text{ш}0} = h\nu d\nu \frac{N_2}{N_2 - N_1(q_2/q_1)} [\mathcal{G}(\nu) - 1], \qquad (13.1.8)$$

входящую в (13.1.6), можно назвать мощностью шума на моду, поскольку она совпадает с мощностью, излучаемой в телесный угол $d\Omega$, который ассоциируется с одной модой излучения «черного тела».

Шумовая мощность, излучаемая в конус с очень малым углом при вершине $2\theta'$ (соответствующим телесному углу $\Omega = \pi\theta'^2$), пропорциональна Ω и может быть получена из (13.1.6)

$$\mathcal{P}_{\text{ш}\Omega} = 2\mathcal{P}_{\text{ш}0} A_1 \Omega n^2/\lambda^2, \qquad (13.1.9)$$

если угол между осью z и осью конуса достаточно мал. В приведенных выше формулах учтена случайная поляризация шума. Двухкратное уменьшение шума достигается использованием линейного поляризатора. Формула (13.1.9) остается справедливой для отверстия площадью A_1 любой формы.

Рассмотрим сигнальный пучок с гауссовым распределением поля в поперечном сечении и с минимальным радиусом пучка a_{min}. Как отмечалось в гл. 6, такой пучок излучается лазером с резонатором, образованным сферическими зеркалами и работающим на основной моде. Расходимость пучка вследствие дифракции характеризуется половинным углом при вершине (6.6.18)

$$\theta_{\text{пучка}} = \lambda/\pi n a_{\text{min}}, \qquad (13.1.10)$$

который соответствует телесному углу

$$\Omega_{\text{пучка}} = \pi\theta^2_{\text{пучка}} = \lambda^2/\pi n^2 a^2_{\text{min}}. \qquad (13.1.11)$$

Для лучшей передачи мощности сквозь выходное отверстие усилителя пучок необходимо ввести в усилитель так, чтобы его радиус достиг минимального значения a_{min} в плоскости выходного экрана (рис. 13.2). Если радиус пучка равен радиусу отверстия, сигнал проходит по существу беспрепятственно. В этом случае из (13.1.11) для величины телесного угла, занимаемого выходным пучком, имеем

$$\Omega_{\text{пучка}} = \lambda^2/n^2 A_1. \qquad (13.1.12)$$

Зная выражение для мощности шума, излучаемой активной средой в телесный угол Ω, можно теперь, учитывая законы распространения волнового пучка, найти мощность шума, добавляемую к сигналу.

Предположим, что сигнал принимается детектором, расположенным достаточно далеко от усилителя, поэтому можно пользоваться приближением дальней зоны. Для того, чтобы уловить практически весь сигнал, детектор должен перекрывать согласно формуле (13.1.12) телесный угол $\Omega = \Omega_{\text{пучка}} = \lambda^2/n^2A_1$. Тогда из (13.1.9) находим, что мощность шума, попадающего вместе с сигналом на детектор, $\mathscr{P}_{\text{ш}} = \mathscr{P}_{\text{шо}}$, если учесть, что половина шумовой мощности задерживается линейным поляризатором перед детектором.

Итак, установлено, что $\mathscr{P}_{\text{шо}}$ — минимальная шумовая мощность, принимаемая детектором столь большого размера, что он перехватывает почти всю мощность диафрагмированного гауссового пучка. Минимум достигаем выбором положения экрана и диаметра отверстия в нем, как показано на рис. 13.2. К тому же телесный угол, перекрываемый детектором, выбирается равным λ^2/n^2A_1. Если пересчитать минимальную шумовую мощность ко входу усилителя, получим

$$\mathscr{P}_{\text{ш вх}} = \frac{\mathscr{P}_{\text{шо}}}{\mathscr{G}} = h\nu d\nu \frac{N_2}{N_2 - N_1(g_2/g_1)} \frac{\mathscr{G}-1}{\mathscr{G}}. \qquad (13.1.13)$$

Одним из основных выводов из (13.1.13) является то, что (при прочих равных условиях) трехуровневый лазер, где $N_1 \approx N_2$, «шумливее» четырехуровневого лазера, где $N_1 \ll N_2$, в $N_2/[N_2 - N_1(g_2/g_1)]$ раз. Так, например, для рубина, по данным § 10.2, эта величина близка к 50. Физически указанный коэффициент отражает необходимость увеличения населенности N_2 в трехуровневом лазере по сравнению с четырехуровневым (для получения одинакового усиления), а также тот факт, что шумовая мощность пропорциональна N_2. Условия лаборатории часто не позволяют работать в дальней зоне излучателя, но аналогичная ей структура поля имеет место в фокальной плоскости линзы, расположенной за выходным отверстием. Для выделения излучения в данном телесном угле в фокальной плоскости может быть установлен экран (рис. 13.3). Отверстие радиуса a_2 в этом экране пропускает излучение, которое в дальней зоне занимает конус с половинным углом при вершине θ, равным

$$\theta = \operatorname{arctg}(a_2/f) \approx a_2/f, \qquad (13.1.14)$$

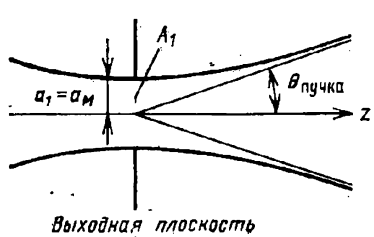


Рис. 13.2. Гауссов пучок, минимальное сечение которого совпадает с выходной плоскостью усилителя

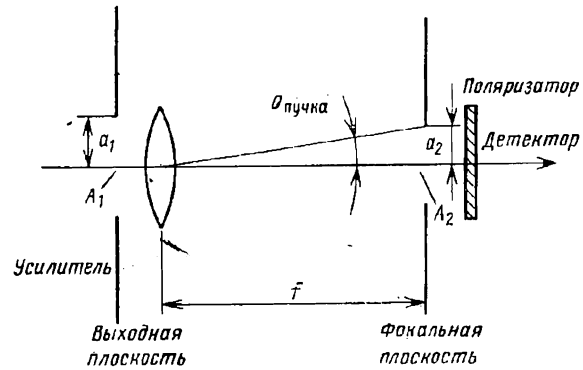


Рис. 13.3. Схема снижения уровня шума с помощью диафрагмы в фокальной плоскости линзы

где f — Фокусное расстояние линзы. Для ослабления мощности шума, прошедшего через отверстие площадью A_2, до величины $\mathcal{P}_{ш0}$ нужно взять $\theta = \lambda/\pi n a_1$, откуда

$$a_2 = f\,\lambda/\pi n a_1. \qquad (13.1.15)$$

Величина a_2 представляет собой радиус сигнального пучка в фокальной плоскости линзы. Из (13.1.15) получим соотношение

$$n^2 A_1 A_2 / f^2 \lambda^2 = 1 \qquad (13.1.16)$$

между λ, f, A_1 и площадью $A_2 = \pi a_2^2$ в фокальной плоскости, которому соответствует отношение сигнал/шум, близкое к $\mathcal{P}_c/\mathcal{P}_{ш0}$, где $\mathcal{P}_c$ — мощность сигнала на выходе усилителя.

В приведенных выше рассуждениях предполагалось, что пучок с гауссовым распределением поля может проходить и без искажений сквозь отверстие с радиусом, равным ширине пучка. На самом же деле теряется 13,5% падающей мощности. Кроме того, не приняты во внимание дифракционные эффекты, связанные с искажением поперечного распределения поля в сигнальном пучке. Реальные измерения шума, излучаемого квантовыми усилителями, обсуждаются в работах [3.4].

Шум, обусловленный корпускулярной природой света. Только что мы установили, что величина шумовой мощности, которая перемешивается на выходе оптического квантового усилителя с сигналом и не может быть отделена от него, определяется выражением

$$\mathcal{P}_{ш0} = h\nu dv \frac{N_2}{N_2 - N_1 (g_2/g_1)} [\mathcal{G}(\nu) - 1].$$

Для четырехуровневого лазера ($N_1 \ll N_2$) с большим усилением $\mathcal{P}_{ш0} \approx h\nu dv \mathcal{G}(\nu)$. Мощность входного сигнала, которая на выходе возрастает до такой же величины $\mathcal{P}_{ш0}$, дается выражением

$$\mathcal{P}_{min} = \mathcal{P}_{ш0}/\mathcal{G}(\nu) = h\nu dv \qquad (13.1.17)$$

и служит мерой минимально обнаружимой мощности. Источником этой мощности является, как показано выше, спонтанное излучение на лазерном переходе.

Допустим, что измерение мощности сигнала осуществляется посредством подсчета количества фотоэлектронов, вылетающих с поверхности фотоэмиттера, на которую падает сигнал без предварительного усиления. Мощность световой волны может быть записана как

$$\mathcal{P} = \overline{\Phi} h\nu, \tag{13.1.18}$$

где $\overline{\Phi}$ — среднее значение числа фотонов, попавших на фотокатод за секунду. Допустим далее существование такого бесшумного фотоэмиттера, из которого вылетает точно один электрон на каждые η^{-1} падающих фотонов. Измерение $\mathcal{P}$ осуществляется подсчетом числа электронов, вылетевших в течение времени наблюдения t, и затем результат усредняется по большому числу идентичных экспериментов. Среднее число электронов, эмиттированных за время наблюдения, составляет величину

$$\overline{N}_e = \overline{\Phi} t\eta, \tag{13.1.19}$$

которая в предположении совершенно случайного прилета фотонов равна дисперсии[1)]

$$\overline{(\Delta N_e)^2} = \overline{(N_e - \overline{N}_e)^2} = \overline{\Phi} t\eta.$$

Принимая за минимально обнаружимое такое число квантов, которому соответствует равенство среднего квадратичного отклонения и среднего значения, получаем

$$(\overline{\Phi}_{\min} t\eta) = \overline{\Phi}_{\min} t\eta$$

или

$$\overline{\Phi}_{\min} = 1/t\eta. \tag{13.1.20}$$

Умножив последнее выражение на $h\nu$ и обозначив $t^{-1} = d\nu$, где $d\nu$ — ширина полосы системы, находим минимально обнаружимую мощность сигнала

$$\mathcal{P}_{\min} = h\nu d\nu/\eta, \tag{13.1.21}$$

которая при $\eta = 1$ переходит в (13.1.17).

Таким образом, вопрос о том, что же в действительности ограничивает чувствительность: спонтанное излучение или флуктуации в падающем потоке фотонов, является чисто академическим. К результату, совпадающему с (13.1.21), приводит также рассмотрение, в котором происхождение шума приписывается дробовому эффекту в потоке фотоэлектронов [5].

[1)] Это следует из предположения, что попадание фотона на эмиттер — совершенно случайное событие, поэтому вероятность прилета Φ фотонов в данный интервал времени дается законом Пуассона $p(\Phi) = (\overline{\Phi})^{\Phi} e^{-\Phi}/\Phi!$ Среднеквадратическая флуктуация (дисперсия) $\overline{(\Delta\Phi)^2} = \sum_{\Phi=0}^{\infty} p(\Phi)(\Phi - \overline{\Phi})^2 = \overline{\Phi}$, где $\overline{\Phi} = \Sigma \Phi p(\Phi)$.

13.2. Шумы спонтанного излучения в лазерных генераторах

Другой тип шума, который играет важную роль в квантовой электронике, связан со спонтанным излучением в лазерных генераторах. Согласно § 9.2 мы можем представить лазерный генератор в виде RLC-контура (рис. 13.4). Наличие активной среды с отрицательными потерями (т. е. с усилением) представлено отрицательной проводимостью — G_m, в то время как обычные потери, описанные в § 7.4, представлены положительной проводимостью G_0. Эквивалентный источник шумового тока

$$\overline{i_{\text{ш}}^2} = \frac{4\hbar\omega G_0 (\Delta\omega/2\pi)}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \tag{13.2.1}$$

учитывает тепловой шум в полосе $\Delta\omega$, обусловленный наличием потерь G_0 [6, 7]. Здесь T — истинная температура резонатора с потерями. Спонтанное излучение описывается похожим выражением[1]

$$(\overline{i_{\text{ш}}^2})_{\text{сп}} = \frac{4\hbar\omega\,(-G_m)\,(\Delta\omega/2\pi)}{\exp(\hbar\omega/kT_m) - 1}\,, \tag{13.2.2}$$

где $(-G_m)$ представляет отрицательные потери, а T_m — температура, определяемая отношением населенностей из выражения

$$\left(\frac{g_1}{g_2}\right)\frac{N_2}{N_1} = e^{-\hbar\omega/kT_m}. \tag{13.2.3}$$

При $N_2 > (g_2/g_1)\,N_1$ температура $T_m < 0$ и $(\overline{i_{\text{ш}}^2})$ в (13.2.2) — положительная величина. Утверждение о том, что (13.2.2), действительно, представляет шум спонтанного излучения, оправдывается обсуждением, предшествующим формуле (13.1.7). Заметим, что поскольку $G_m \sim N_2 - N_1\,(g_2/g_1)$, формула (13.2.2) может быть с помощью (13.2.3) преобразована в [2]

$$(\overline{i_{\text{ш}}^2})_{\text{сп}} \propto \frac{-4\hbar\omega\Delta\omega\,[N_2 - N_1\,(g_2/g_1)]}{(g_2/g_1)\,(N_1/N_2) - 1} = 4\hbar\omega N_2\,\Delta\omega. \tag{13.2.4}$$

---

[1] Появление в знаменателе выражения для $\overline{i_{\text{ш}}^2}$ множителя 2π связано с тем, что здесь используется $\overline{i_{\text{ш}}^2}(\omega)$, а не $\overline{i_{\text{ш}}^2}(\nu)$, причем $\overline{i_{\text{ш}}^2}(\omega)\,\Delta\omega = \overline{i_{\text{ш}}^2}(\nu)\Delta\nu$.

[2] В терминах эквивалентной схемы (рис. 13.4) мощность индуцированного излучения определяется выражением U^2G_m, где U — напряжение. Непосредственное рассмотрение исходной системы приводит к выводу о пропорциональности этой мощности величине $E^2\,[N_2 - (g_2/g_1)\,N_1]$, где E — амплитуда поля. Из того, что U пропорционально E, вытекает пропорциональность величин G_m и $[N_2 - (g_2/g_1)\,N_1]$.

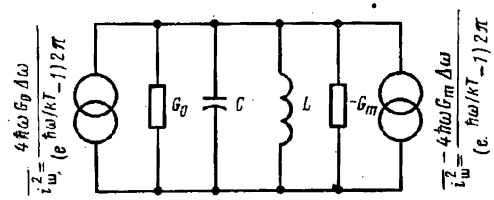


Рис. 13.4. Эквивалентная схема лазера

Видно, что величина $(\overline{i_ш^2})_{сп}$ пропорциональна N_2 так же, как и мощность спонтанного излучения, обусловленного переходами $2 \to 1$. Добротность эквивалентного контура определяется выражением

$$Q^{-1} = (G_0 - G_m)/\omega_0 C = Q_0^{-1} - Q_m^{-1}, \qquad (13.2.5)$$

где $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$. Импеданс контура определяется как

$$Z(\omega) = \frac{1}{(G_0 - G_m) + (1/i\omega L) + i\omega C} = \frac{i\omega}{C} \cdot \frac{1}{(i\omega\omega_0/Q) + (\omega_0^2 - \omega^2)} . \qquad (13.2.6)$$

Напряжение на этом импедансе при наличии источника тока с комплексной амплитудой $I(\omega)$

$$U(\omega) = \frac{i}{C} \frac{I(\omega)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega] - (i\omega_0/Q)} \qquad (13.2.7)$$

и, следовательно, вблизи частоты $\omega = \omega_0$

$$\overline{|U(\omega)|^2} = \frac{1}{4C^2} \frac{\overline{|I(\omega)|^2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0^2/4Q^2)} . \qquad (13.2.8)$$

Источники тока, питающие резонансный контур, показаны на рис. 13.4, поскольку они не коррелированы, можно взять $\overline{|I(\omega)|^2}$ как сумму их среднеквадратичных значений

$$\overline{|I(\omega)|^2} = 4\hbar\omega \left[\frac{G_m N_2}{N_2 - N_1 (g_2/g_1)} + \frac{G_0}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \right] \frac{d\omega}{2\pi} , \qquad (13.2.9)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках записано с учетом (13.2.3). В оптическом диапазоне, например, для $\lambda = 1$ мкм и $T = 300$ К имеем $\hbar\omega/kT = 50$. Благодаря этому, поскольку в условиях генерации $G_m \approx G_0$, можно пренебречь в (13.2.9) тепловым шумом и записать

$$\underset{\omega \approx \omega_0}{\overline{|U(\omega)|^2}} = \frac{\hbar G_m}{2\pi C^2} \left(\frac{N_2}{N_2 - N_1 (g_2/g_1)} \right) \left(\frac{\omega d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0^2/4Q^2)} \right) . \qquad (13.2.10)$$

Формула (13.2.10) описывает спектральное распределение выходной мощности. Она применима в случае работы лазера как ниже, так и выше порога. В обоих случаях полная ширина спектра моды

$$\Delta\nu_{лаз} = \nu_0/Q. \qquad (13.2.11)$$

Используя (13.2.5), перепишем (13.2.11) в виде

$$\Delta\nu_{\text{лаз}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{G_0 - G_m}{C}\right) = \frac{G_0}{2\pi C}\left(1 - \frac{G_m}{G_0}\right). \qquad (13.2.12)$$

Отрицательная проводимость G_m относится к числу величин, зависящих от поля. Зависимость эта имеет характер насыщения и, следуя (8.7.4), можно записать ее как

$$G_m = \frac{G_{m0}}{1 + I/I_{\text{нас}}} \qquad (13.2.13)$$

для спектрально-однородной активной среды. Здесь I — интенсивность; G_{m0} — ненасыщенное значение G_m. Рассмотрим теперь по отдельности два режима работы: ниже порога, выше порога.

Ширина линии ниже порога. В этом случае $I \ll I_{\text{нас}}$ и $G_m = G_{m0}$. Используя (13.2.12) и (7.4.6) для ширины линии пассивного резонатора ($G_m = 0$)

$$\Delta\nu_{0,\,5} = \nu_0/Q_c = G_0/2\pi C, \qquad (13.2.14)$$

придем к выражению

$$\Delta\nu_{\text{моды ниже порога } (G_{m0} < G_0)} = \Delta\nu_{0,5}(1 - G_{m0}/G_0). \qquad (13.2.15)$$

Оно показывает, как уменьшается $\Delta\nu_{\text{моды}}$ по сравнению с величиной $\Delta\nu_{0,\,5}$ по мере приближения к порогу генерации ($G_{m0} = G_0$).

Ширина линии лазера выше порога. Ширина линии лазера выше порога дается формулой (13.2.4) или эквивалентной ей (13.2.12). Однако на практике этими выражениями не пользуются, поскольку G_m и G_0 близки по величине, благодаря чему $\Delta\nu_{\text{лаз}}$ пропорциональна разности двух приблизительно равных величин, ни одна из которых не известна с достаточно высокой точностью. Обойдем эту трудность, показав, что добротность Q связана с выходной мощностью лазера, и, следовательно, $\Delta\nu_{\text{лаз}}$ может быть выражена через мощность. Полная излучаемая мощность лазера выше порога согласно (13.2.10) равна

$$\mathcal{P}_{\text{изл}} = G_0 \int_0^\infty \frac{|U(\omega)|^2}{\hbar\omega}\, d\omega = \frac{\hbar G_m G_0 Q}{C^2} \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0/2Q)^2}. \qquad (13.2.16)$$

Поскольку подынтегральная функция имеет форму узкого пика, в окрестности $\omega = \omega_0$ можно заменить ω в числителе (13.2.16) на ω_0 и после интегрирования получить требуемую связь между $\mathcal{P}_{\text{изл}}$ и Q

$$\mathcal{P}_{\text{изл}} = \frac{\hbar G_m G_0 Q}{C^2}\left[\frac{N_{2\text{пор}}}{N_{2\text{пор}} - (g_2/g_1) N_{1\text{пор}}}\right]. \qquad (13.2.17)$$

Как уже неоднократно упоминалось, в генерирующем лазере $G_m \approx G_0$. Используя это обстоятельство, преобразуем (13.2.17) в выражение

$$Q = \frac{C^2}{\hbar G_0^2}\left[\frac{N_{2\text{пор}} - (g_2/g_1) N_{1\text{пор}}}{N_{2\text{пор}}}\right]\mathcal{P}_{\text{изл}},$$

которое после подстановки в (13.2.11) приводит к

$$\Delta\nu_{\text{лаз}} = \frac{2\pi h\nu_0 (\Delta\nu_{0,5})^2}{\mathcal{P}_{\text{изл}}} \left[\frac{N_{2\text{пор}}}{N_{2\text{пор}} - (g_2/g_1) N_{1\text{пор}}} \right], \qquad (13.2.18)$$

где $\Delta\nu_{0,5}$ определяется по формуле (13.2.14).

Пример. Рассмотрим He — Ne лазер со следующими параметрами: $\nu = 4{,}74 \cdot 10^{14}$ Гц ($\lambda = 632{,}8$ нм), $L = 100$ см, αL (потери) $= 1\%$ на проход, $\mathcal{P} = 1$ мВт, $N_2 \gg N_1$, $n = 1$.

Эти значения типичны для маломощного лабораторного He — Ne лазера. Из формулы (7.4.6) получим

$$\Delta\nu_{0,5} = (2\pi t_c)^{-1}\, c\alpha L/2\pi L = 5 \cdot 10^5.$$

Подставив указанные выше цифры в (13.2.18), получим

$$\Delta\nu_{\text{лаз}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}.$$

Необходимо заметить, однако, что ширина $\Delta\nu_{\text{лаз}}$, вычисленная по формуле (13.2.18), является теоретическим пределом и вовсе не обязательно совпадает с величиной, наблюдаемой в эксперименте. Спектр выходного излучения лазера обычно уширен вследствие теп-

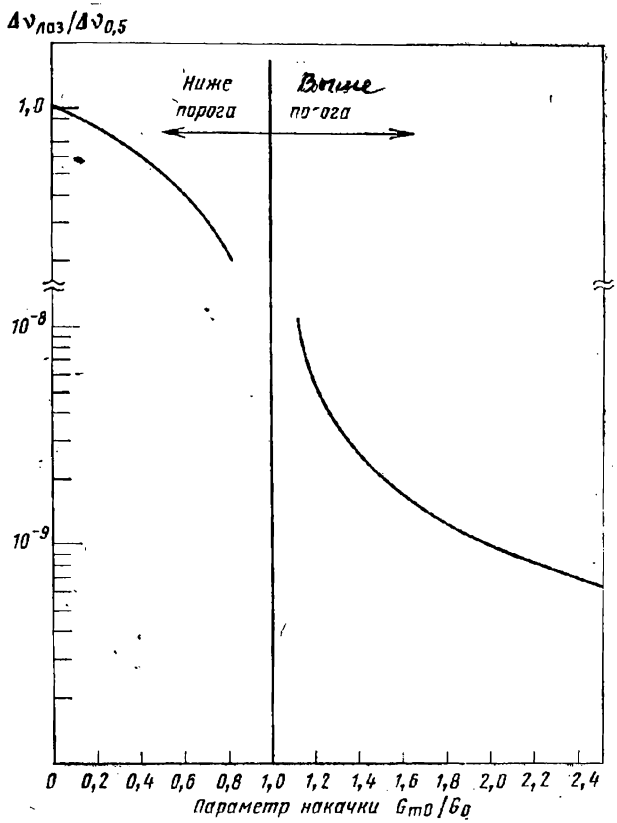


Рис. 13.5. Ширина спектра излучения, ассоциируемого с одной модой, ниже порога (13.2.15) и выше порога (13.2.19).

Данные, используемые при построении графика, соответствуют He—Ne лазеру из примера в § 13.2. Обратите внимание на разрыв оси ординат!

ловых и акустических флуктуаций оптической длины резонатора, которые обусловливают быстрые смещения резонансных частот. Для экспериментального достижения предельного значения $\Delta\nu_{лаз}$ необходимо обеспечить тщательную акустическую развязку и термостабилизацию лазера [8,9]. Ширина линии $\Delta\nu \approx 10^3$ Гц, наблюдавшаяся в He — Ne лазере с мощностью излучения 1 мВт, все еще ограничивается вибрациями и тепловыми флуктуациями.

Выражение для $\Delta\nu_{лаз}$ очень часто дается в форме (13.2.18). Однако иногда удобно выразить $\mathcal{P}_{изл}$ в (13.2.18) через параметры накачки. Используем для этой цели (9.3.26) соотношение $g_0/(\Pi + T) = G_{m0}/G_0$ и формулу (9.1.16а). В результате получаем

$$\Delta\nu_{лаз} = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_{0,5}}{\Delta\nu}\right)\psi c\lambda^2\left(\frac{N_{2пор}}{N_{2пор} - (g_2/g_1)N_{1пор}}\right)}{8\pi V_m n^3 (G_{m0}/G_0 - 1)}, \qquad (13.2.19)$$

где $\psi = t_2/t_{сп}$, $\Delta\nu_{0,5} = (2\pi t_c)^{-1}$, $\Delta\nu$ — ширина линии усиления

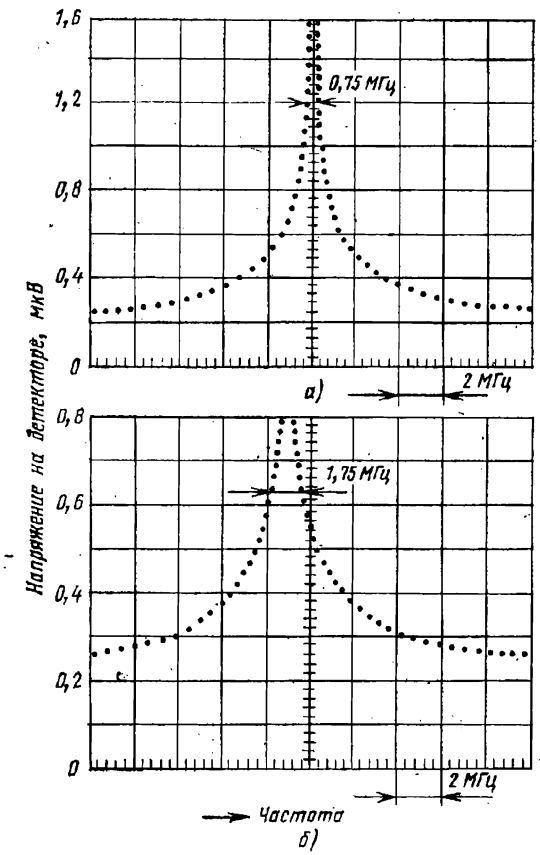


Рис. 13.6. Картина на экране спектроанализатора, отвечающая биениям между излучением маломощного полупроводникового лазера и излучением газового CO_2 лазера, работающего на переходе P (16).

Ток через лазерный диод 865 мА (*а*) и 845 мА (*б*); центральная частота—92 МГц. Пунктирные кривые соответствуют лоренцевой форме линии с указанными на рисунке значениями ширины по уровню 0,5 [10]

Функциональная зависимость ширины линии от накачки как выше (13.2.19), так и ниже (13.2.15) порога содержится в члене $(G_{m0}/G_0 - 1)$. Большая количественная разница между указанными режимами обусловлена численным коэффициентом. Используя параметры He — Ne лазера из приведенного выше численного примера и принимая для объема, занимаемого модой, значение 2 см^3, а также $\Delta\nu = 1{,}5\times10^9$ Гц, перепишем (13.2.19)

$$\Delta\nu_{\text{лаз}} \underset{(G_{m0}>G_0)}{\approx} \Delta\nu_{0,5}\,\frac{10^{-9}}{(G_{m0}/G_0-1)}\,\frac{N_{2\text{пор}}}{[N_{2\text{пор}}-(g_2/g_1)\,N_{1\text{пор}}]}. \quad (13.2.20)$$

Сравнивая последний результат с (13.2.15), можем заключить, что типичная ширина линии лазера в надпороговом режиме в 10^8—10^9 раз меньше, чем в подпороговом. Эта разница, как видно из рис. 9.7, тесно связана с отличием в выходной мощности.

Изменение ширины моды ниже порога ($G_{m0} < G_0$) и выше его показано на рис. 13.5. Численный расчет произведен для He — Ne лазера на $\lambda = 0{,}6328$ мкм, данные о котором имеются в приведенном численном примере. Рис. 13.6 изображает выходной спектр инжекционного лазера на $Pb_{0,88}\,Su_{0,12}\,Te$ с длиной волны 10,6 мкм [10]. Сужение спектра с $\Delta\nu_{\text{лаз}} = 1{,}74$ МГц до $\Delta\nu_{\text{лаз}} = 0{,}74$ МГц находится в соответствии с обратно пропорциональной зависимостью от $\mathcal{P}_{\text{изл}}$, см. формулу (13.2.18).

13.3. Модель лазера по Ван дер Полю

Изложенный выше подход чересчур упрощен и не может претендовать на освещение более тонких аспектов проблемы спектра лазерного излучения. Но зато он позволяет взглянуть на лазер как на резонансный контур, возбуждаемый шумовым источником. Применим эту идею к более реальной модели, учитывающей насыщение активной среды. Вначале выпишем основные математические соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Преобразование Фурье

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt, \quad (13.3.1)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \quad (13.3.2)$$

Автокорреляционная функция для $f(t)$

$$\Phi_f(\tau) = \langle f(t+\tau)\,f^*(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+\tau)\,f^*(t)\,dt, \quad (13.3.3)$$

где $\langle\ \rangle$ означает усреднение по ансамблю, а $f(t)$ предполагается стационарной функцией.

$$W_f(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \qquad (13.3.4)$$

$W_f(\omega)d\omega$ — часть мощности процесса, представленного функцией $f(t)$, приходящаяся на частотный интервал между ω и $\omega + d\omega$. Эта интерпретация основана на соотношении

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega. \qquad (13.3.5)$$

Из (13.3.4) следует, что

$$\Phi_f(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega, \qquad (13.3.6)$$

а из (13.3.3), — что

$$\Phi_f(-\tau) = \Phi_f^*(\tau). \qquad (13.3.7)$$

Как показано в гл. 9 (9.2.7), лазерный генератор описывается уравнением

$$\omega_l^2 e + \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{de}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_c} P_{\text{рез}}(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{E}_l(\mathbf{r})\, dV, \qquad (13.3.8)$$

где e — комплексная амплитуда поля. Правая часть (13.3.8) учитывает когерентное (индуцированное) и случайное (спонтанное) возбуждение моды активной средой. Когерентную часть возбуждения можно трактовать как отрицательные потери, представив их в виде $g - \gamma_н e^2$, что позволяет записать вместо уравнения (13.3.8)

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + [r - (g - \gamma_н e^2)] \frac{de}{dt} + \omega_l^2 e = N(t). \qquad (13.3.9)$$

Диссипация энергии описывается выражением $r = \sigma/\varepsilon$; $N(t)$ учитывает возбуждение колебательной системы случайным спонтанным излучением; g — ненасыщенный показатель усиления.

Строгий вывод уравнения (13.3.9) проводится на основе теории Лэмба [11]. Пригодность его можно аргументировать тем, что $g - \gamma_н e^2$, описывающий насыщенное усиление, аппроксимирует выражаемый формулой (8.7.4) закон насыщения $g = g_0/(1 + e^2/e_{нас}^2)$. Параметр насыщения $\gamma_н$ не следует путать с обозначением показателя усиления, используемым в книге.

Уравнение (13.3.9) по форме совпадает с уравнением Ван дер Поля [12]. Нелинейный член, содержащий e^2, решающим образом влияет на спектральные свойства лазерного излучения. Без него спектр $e(t)$ будет соответствовать, как и в § 13.2, спектру $N(t)$,

прошедшему через линейный резонансный фильтр с шириной полосы пропускания $r-g$. Так обстоит дело ниже порога генерации, когда нелинейный член может быть отброшен. Выше порога нелинейный член определяет уровень генерируемой мощности, а также характер шума в лазере. Поле $e(t)$ введено так, что $\overline{e^2(t)}$ является средней энергией моды. Параметры r, g, $\gamma_н$, а также $N(t)$ являются, таким образом, определенными. Более детально это будет обсуждено ниже.

Вернемся к уравнению лазера (13.3.9) и представим $e(t)$ в виде

$$e(t) = E_0 \cos \omega t + C_ш(t) \cos \omega t + S_ш(t) \sin \omega t, \quad (13.3.10)$$

т. е. в виде суммы когерентного члена $E_0 \cos \omega t$ и двух случайных компонент. $C_ш$ и $S_ш$ являются медленно меняющимися шумовыми амплитудами. Предположим также, что лазер находится существенно выше порога, поэтому $E_0^2 \gg C_ш^2, S_ш^2$. Подставим (13.3.10) в (13.3.9) и, раскрывая член $\gamma_н e^2 (de/dt)$, отбросим члены, пропорциональные $S_ш^2 E_0$, $C_ш^2 E_0$, $S_ш^3$ и $C_ш^3$, оставив только E_0^3, E_0^2, $S_ш$, $E_0^2 C_ш$. Пренебрежем $\dot{C}_ш$ и $\dot{S}_ш$, оставив $\omega \dot{C}_ш$ и $\omega \dot{S}_ш$, на основании предположения о медленности функций $C_ш$ и $S_ш$. После некоторых алгебраических преобразований получим

$$\left[-2\omega_l \dot{C}_ш + (r-g)(-\omega_l E_0 - \omega_l C_ш + \dot{S}_ш) + \gamma_н \left(-\frac{\omega_l E_0^3}{2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{3}{2} \omega_l E_0^2 C_ш\right)\right] \sin \omega_l t + \left[2\omega_l \dot{S}_ш + (r-g)(\omega_l S_ш + \dot{C}_ш + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \omega_l E_0^2 S_ш\right] \cos \omega_l t = N(t). \quad (13.3.11)$$

На следующем этапе представим случайную силу $N(t)$ в виде

$$N(t) = N_c(t) \cos \omega t + N_s(t) \sin \omega t, \quad (13.3.12)$$

где $N_c(t)$ и $N_s(t)$ — медленно изменяющиеся случайные гауссовы поля. Приравняв коэффициенты при $\cos \omega t$, и $\sin \omega t$ правой и левой частей уравнения (13.3.11), обнаружим внутри квадратных скобок члены, которые не содержат $C_ш$ или $S_ш$. Приравнивая их сумму нулю, получаем формулу

$$E_0^2 = (4/\gamma_н)(g - r) \quad (13.3.13)$$

для средней интенсивности. Она аналогична выражению (9.3.15).

Подстановка (13.3.12) и (13.3.13) в (13.3.11) с последующим приравниванием коэффициентов при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ приводит, в предположении, что $\omega \gg d/dt$, к уравнениям

$$dS_ш/dt = N_c(t)/2\omega, \quad (13.3.14)$$

$$\frac{dC_ш}{dt} + \frac{\gamma_н E_0^2}{4} C_ш = \frac{N_s(t)}{2\omega}. \quad (13.3.15)$$

Благодаря принятым выше ограничениям удалось получить удивительно простые уравнения, описывающие статистическую компоненту лазерного излучения. Вместе с (13.3.13) они составляют систему основных рабочих уравнений. В них отражено главное качественное различие в поведении квадратурной, $S_{ш}$ и синфазной $C_{ш}$ флуктуационных составляющих лазерного поля. В то время как последняя подобна пружине с «коэффициентом упругости», пропорциональным интенсивности E_0^2, первая формально эквивалентна смещению свободной частицы без возвращающей силы. Спектр флуктуаций интенсивности, определяемый $C_{ш}$, будет в итоге ослабляться и уширяться с ростом частоты, в то время как спектр частотных флуктуаций однороден.

Спектр случайной вынуждающей силы. Из (13.3.14) и (13.3.15) следует, что спектр флуктуаций лазера определяется спектром случайных вынуждающих сил $N_s(t)$ и $N_c(t)$, определенных посредством (13.3.12). Для этого необходимо знать спектральные плотности $W_{N_s}(\omega)$ и $W_{N_c}(\omega)$ величин $N_s(t)$ и $N_c(t)$.

Вначале заметим, что уравнение (13.3.9) справедливо также и для пассивного (в отсутствие накачки) резонатора при термодинамическом равновесии, когда $g = 0$ и $\gamma_н e^2 \ll r$. В этом случае (13.3.9) запишется как

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + r\frac{\partial e}{\partial t} + \omega_l^2 e = N(t). \tag{13.3.16}$$

Производя фурье-преобразование над (13.3.16) и разрешая результат относительно $e(\omega)$, получаем

$$e(\omega) = N(\omega)/(\omega_l^2 - \omega^2 - i\omega_l), \tag{13.3.17}$$

отсюда средняя энергия, запасенная в моде резонатора,

$$\mathscr{E}_{\text{моды}} = \overline{e^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|e_T(\omega)|^2\,d\omega =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\int_0^{\infty}\frac{|N_T(\omega)|^2\,d\omega}{|\omega_l^2 - \omega^2 - i\omega_l|^2}. \tag{13.3.18}$$

Равенство $e(\omega) = e^*(-\omega)$ здесь использовано для того, чтобы ограничить интегрирование областью положительных частот. Посредством T обозначено время усреднения. Поскольку для типичных лазерных резонаторов $\omega_l > 10^6\, r$, последнее выражение в (13.3.18) можно заменить следующим:

$$\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\right)^2\int_0^{\infty}\frac{|N_T(\omega)|^2\,d\omega}{(\omega-\omega_l)^2 + (r/2)^2}. \tag{13.3.19}$$

Предполагая, что $N_T(\omega)$ примерно одинаково на интервале шириной r вблизи частоты ω_l, проинтегрируем (13.3.18) и получим

$$\mathscr{E}_{\text{моды}} = \frac{\pi}{r}\left(\frac{1}{2\omega_l}\right)^2 W_N(\omega), \tag{13.3.20}$$

где

$$W_N(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\,|\,N_T(\omega)\,|^2 \tag{13.3.21}$$

— спектральная плотность величины $N\ (t)$.

Энергия моды, вычисленная по формуле (13.3.20), равна при термодинамическом равновесии энергии теплового возбуждения моды, так что, используя (5.7.4), получаем

$$\frac{2\pi}{r}\left(\frac{1}{2\omega_l}\right)^2 W_N(\omega_l)_{\text{пор}} = \hbar\omega_l\left(e^{\hbar\omega_l/kT}-1\right)^{-1} = \hbar\omega_l\, n_{\text{пор}}. \tag{13.3.22}$$

и

$$W_N(\omega_l)_{\text{пор}} = (2r/\pi)\,\omega_l^2\,\hbar\omega_l\, n_{\text{пор}};\quad n_{\text{пор}} = \left(e^{\hbar\omega_l/kT}-1\right)^{-1}. \tag{13.3.23}$$

Последнее выражение определяет тепловой вклад в спектральную плотность случайной вынуждающей силы. Эффект инверсии населенностей проявляется в том, что сюда добавляется член, пропорциональный числу возбужденных атомов. Это выражение, как было показано при выводе (13.2.2), отличается от выражения для теплового шума только тем, что нужно заменить r на $-g$ и $\exp(\hbar\omega/kT)$ на $(g_2/g_1)\ (N_1/N_2)$.

Итак, вклад в $W_N\ (\omega)$, обусловленный инверсией населенностей, определяется соотношением (13.3.22) и составляет

$$W_N(\omega_l)_{\text{ат}} = \frac{2g\omega_l^2}{\pi}\,\hbar\omega_l\left[\frac{N_2}{N_2 - N_1\,(g_2/g_1)}\right]. \tag{13.3.24}$$

Выше порога инверсная населенность насыщается до величины, соответствующей равенству $g = r$, так что, полагая $g = r$ в (13.3.24) и складывая последнее с (13.3.23), получаем

$$W_N(\omega) = \frac{2r\omega_l^2}{\pi}\,\hbar\omega_l\left[\frac{N_{2\,\text{пор}}}{N_{2\text{пор}} - N_{1\text{пор}}\,(g_2/g_1)}\right]. \tag{13.3.25}$$

Частотную зависимость $W_N(\omega)$ можно реконструировать, заметив, что вклад спонтанного излучения пропорционален функции формы спектральной линии, так что выше порога

$$W_N(\omega) = \frac{2r\omega_l^2}{\pi}\,\hbar\omega_l\left[\frac{N_{2\,\text{пор}}}{N_{2\,\text{пор}} - N_{1\,\text{пор}}\,(g_2/g_1)}\,\frac{g(\omega)}{g(\omega_l)} + n_{\text{пор}}\right]. \tag{13.3.26}$$

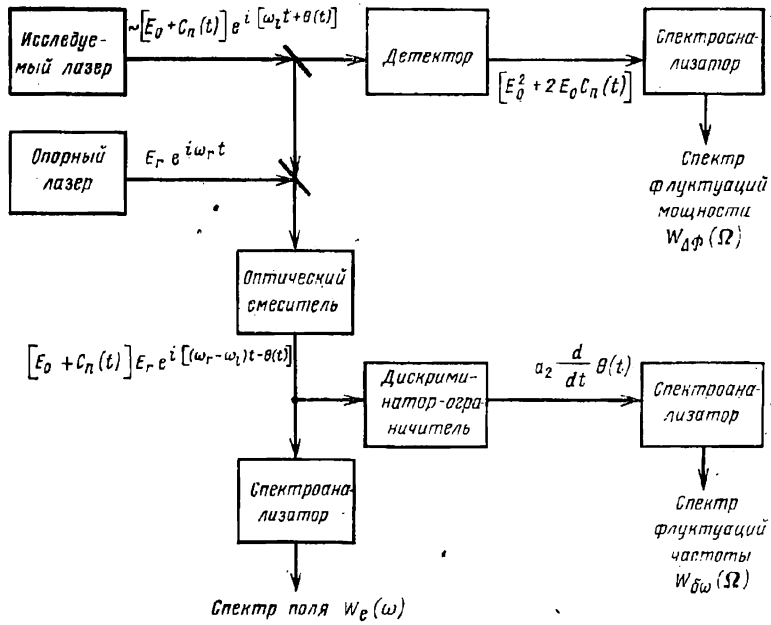


Рис. 13.7. Схема установки для измерения спектров флуктуаций различных величин, характеризующих излучение лазера

Необходимо также знать спектральную плотность величин $N_s(t)$ и $N_c(t)$, введенных выражением (13.3.12)[1]. Используя (13.3.12), получаем

$$W_{N_c}(\Omega)=W_{N_s}(\Omega)=2W_N(\Omega+\omega_l). \qquad (13.3.27)$$

Множитель 2 согласуется с (13.3.5). В дальнейшем используем (13.3.14) и (13.3.15) с целью получения выражений для следующих величин: спектральной плотности флуктуаций частоты лазера $W_{\delta\omega}(\Omega)$; спектральной плотности флуктуаций интенсивности $W_{\Delta\mathcal{P}}(\Omega)$ и спектра $W_e(\omega)$ лазерного поля $e(t)$. Схема экспериментальной установки для изучения этих спектров изображена на рис. 13.7.

Спектральная плотность флуктуаций частоты. Получим выражение для спектральной плотности $W_{\delta\omega}(\Omega)$ флуктуаций частоты $\delta\omega(t)=\omega(t)-\omega_l$ излучения лазера. Спектр $W_{\delta\omega}(\Omega)$ можно получить, как показано на рис. 13.7, смешивая излучение исследуемого лазера с излучением более стабильного лазера и подавая сигнал разностной частоты на ограничитель-дискриминатор, а затем на спектроанализатор [13]. Практическая ценность таких исследований заключается в том, что они дают возможность определить отношение

[1] Здесь и далее буквой Ω будем обозначать низкие частоты (0 ... 10^{13} Гц), в то время как ω используется для обозначения оптических частот $\approx 10^{15}$ Гц.

сигнала к шуму в системах связи, использующих частотно-модулированные лазеры.

Предполагая $E_0 \gg C_ш, S_ш$, можно записать лазерное поле (13.3.10) как

$$e(t) \approx [E_0 + C_ш(t)] \cos[\omega_l t + \theta(t)], \qquad (13.3.28)$$

где

$$\theta(t) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{S_ш(t)}{E_0}\right) \approx -\frac{S_ш(t)}{E_0}. \qquad (13.3.29)$$

Мгновенная фаза и частота[1] определяются выражениями

$$\varphi(t) = \omega_l t + \theta(t), \quad \omega(t) = d\varphi/dt \approx \omega_l - \dot{S}_ш(t)/E_0.$$

Используя (13.3.14), получим

$$\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_l = -N_c(t)/(2\omega_l E_0)$$

и тогда

$$W_{\delta\omega}(\Omega) = (2\omega_l E_0)^{-2} W_{N_c}(\Omega). \qquad (13.3.30)$$

Средняя мощность, излучаемая атомами, равна произведению запасенной энергии $E_0^2/2$ и скорости затухания поля r:

$$\mathcal{P}_{изл} = rE_0^2/2. \qquad (13.3.30а)$$

Подстановка последнего выражения в (13.3.30) вместе с (13.3.13), (13.3.26) и (13.3.27) дает

$$W_{\delta\omega}(\Omega) = \frac{r^2}{2\pi\mathcal{P}_{изл}}\hbar\omega_l\left[\frac{N_2}{N_2 - (g_2/g_1)N_1}\frac{g(\Omega+\omega_l)}{g(\omega_l)} + n_{пор}\right] =$$
$$= \frac{\gamma_н r}{4\pi(g-r)}\hbar\omega_l\left[\frac{N_2}{N_2 - (g_2/g_1)N_1}\frac{g(\Omega+\omega_l)}{g(\omega_l)} + n_{пор}\right]. \qquad (13.3.31)$$

Частотный спектр, таким образом, является плоским вплоть до частот $\Omega \approx \Delta\omega$[2], где первый член в квадратных скобках уменьшается на 50%. Значительно более слабый тепловой вклад, представленный $n_{пор}$, остается в высокочастотной области спектра. Функция $W_{\delta\omega}(\Omega)$ качественно изображена на рис. 13.8, *в*. Пропорциональная зависимость $W_{\delta\omega}(\Omega)$ от $\mathcal{P}^{-1}$ и плоская форма спектра наблюдались в эксперименте [13], результат которого представлен на рис. 13.9.

Нетрудно показать, что величина $\gamma_н$ обратно пропорциональна интенсивности насыщения $I_{нас}$ активной среды, следовательно, для получения минимальных частотных флуктуаций необходимо иметь лазер с малым параметром насыщения. Необходимо также по возможности уменьшить выходную связь (уменьшить r) и увеличить накачку.

---

[1] Понятие мгновенной частоты имеет смысл, когда интервал между соседними нулями $e(t)$ остается постоянным в течение, по крайней мере, нескольких периодов.

[2] $\Delta\omega$ — полная ширина профиля показателя усиления $g(\omega)$ по уровню 0.5 от максимума.

Спектр флуктуаций интенсивности. Рассмотрим теперь спектр флуктуаций выходной мощности лазера $\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_{изл}(t) - <\mathcal{P}>$. Из (13.3.10) и соотношения $\mathcal{P}_{изл}(t) = re^2(t)$ получим в случае значительного превышения порога ($E_0 \gg C_ш, S_ш$)

$$\Delta\mathcal{P}(t) \approx rE_0 C_ш(t) \tag{13.3.32}$$

и далее

$$W_{\Delta\mathcal{P}}(\Omega) = r^2 E_0^2 W_{C_ш}(\Omega). \tag{13.3.33}$$

Выражение для $W_{C_ш}(\Omega)$ можно получить, если исходить из (13.3.15). Осуществив фурье-преобразование этого уравнения и разрешив его затем относительно $C_ш(\Omega)$, получим

$$C_ш(\Omega) = \frac{N_s(\Omega)}{2\omega_l(i\Omega + \gamma_н E_0^2/4)}, \tag{13.3.34}$$

поэтому

$$W_{C_ш}(\Omega) = \frac{W_{N_s}(\Omega)}{4\omega_l^2[\Omega^2 + (\gamma_н E_0^2/4)^2]}. \tag{13.3.35}$$

Теперь обратимся к формулам (13.3.26), (13.3.27) и (13.3.33) и найдем, что

$$W_{\Delta\mathcal{P}}(\Omega) = \frac{r^2 E_0^2 W_{N_s}(\Omega)}{4\omega_l^2[\Omega^2 + (\gamma_н E_0^2/4)^2]} = \tag{13.3.36}$$

$$= \frac{r^3 E_0^2 \hbar\omega_l}{\pi[\Omega^2 + (\gamma_н E_0^2/4)^2]}\left[\frac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - (g_2/g_1)N_{1пор}}\frac{g(\omega_l+\Omega)}{g(\omega_l)} + n_{пор}\right] =$$

$$= \frac{r^3 E_0^2 \hbar\omega_l}{\pi[\Omega^2 + (\gamma_н E_0^2/4)^2]}\left[\frac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - (g_2/g_1)N_{1\,пор}} + n_{пор}\right] \tag{13.3.37}$$

в случае, когда $\gamma_н E_0^2/4$ гораздо меньше ширины контура усиления $g(\omega)$. Качественное представление о функции $W_{\Delta\mathcal{P}}(\Omega)$ дает график на рис. 13.8. Практический интерес представляют величины: $W_{\Delta\mathcal{P}}(0)$, которая в данном случае обратно пропорциональна мощности излучения, и частота, на которой спектральная плотность вдвое меньше максимальной

$$\Omega_{0,5} = \gamma_н \mathcal{P}_{изл}/2r = g - r,$$

где $\mathcal{P}_{изл}$ — средняя мощность, излучаемая атомами. Отметим, ссылаясь на (13.3.9), что $g - r$ соответствует скорости возрастания энергии, запасенной в генераторе без насыщения. Таким образом, несмотря на наличие насыщения, именно ненасыщенное усиление определяет степень подавления флуктуаций мощности.

Спектр флуктуаций поля. Теперь речь пойдет о спектральной плотности $W_e(\omega)$ лазерного поля

$$e(t) = E_0 \cos\omega_l t + C_ш(t)\cos\omega_l t + S_ш(t)\sin\omega_l t. \tag{13.3.38}$$

Экспериментально форма линии излучения наблюдается с помощью высококачественного сканируемого интерферометра Фабри — Перо, через который пропускается излучение лазера, и на выходе регистрируется зависимость интенсивности от частоты настройки. Поскольку линия узка, спектр флуктуаций поля может быть снят по методике, которую поясняет рис. 13.7: излучение исследуемого лазера смешивается с излучением эталонного лазера, слегка отстроенного по частоте, а затем осуществляется спектральный анализ биений [8, 9, 13].

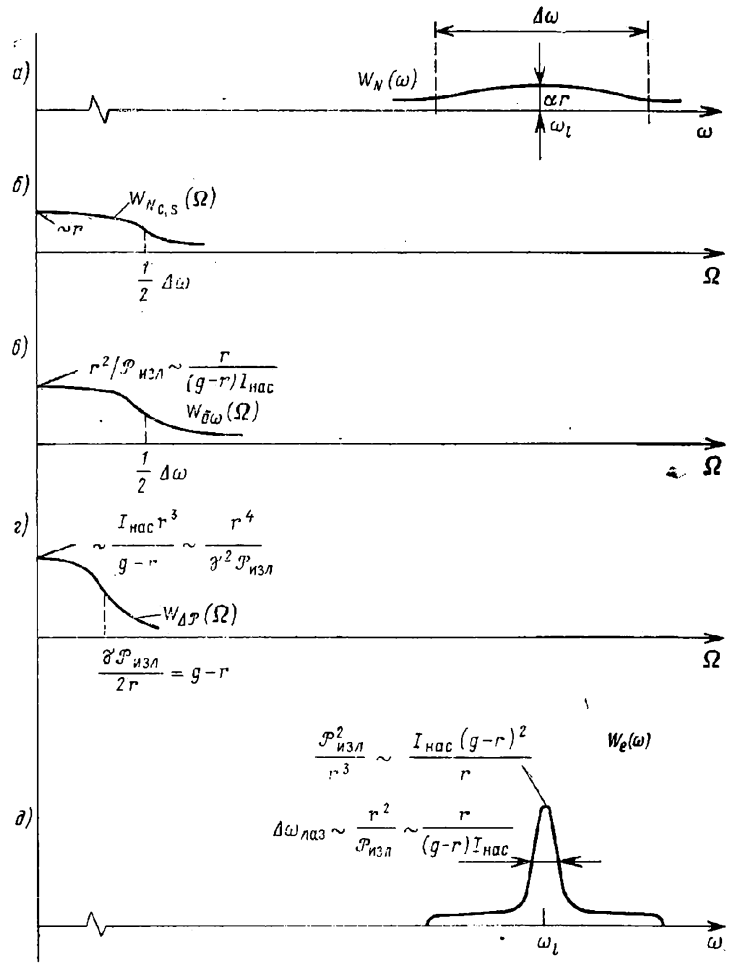


Рис. 13.8. Профиль усиления активной среды (*а*); спектральные плотности синфазной $W_{N_s}(\Omega)$ и квадратурной $W_{N_s}(\Omega)$ компонент амплитуды шумового источника (*б*); спектр флуктуаций частоты (*в*); спектр флуктуаций интенсивности (*г*); спектр поля излучения лазера (*д*)

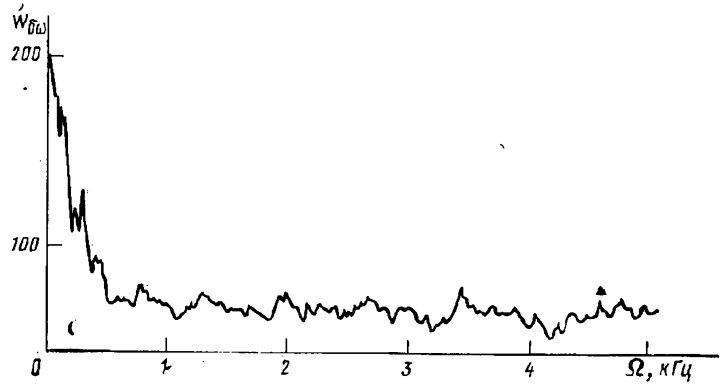


Рис. 13.9. Спектр частотных флуктуаций $W_{\delta\omega}$ (Ω)

Поле $e(t)$ можно записать в виде (13.3.28)

$$e(t) \approx [E_0 + C_{\text{ш}}(t)] \cos[\omega_l t + \theta(t)]. \qquad (13.3.39)$$

Далее будем пренебрегать вкладом в спектральную плотность флуктуаций поля $W_e(\omega)$, обусловленным членом $C_{\text{ш}}(t) \times \cos[\omega_l t + \theta(t)]$, по сравнению с

$$f(t) = E_0 \cos[\omega_l t + \theta(t)]. \qquad (13.3.40)$$

Рассмотрение показывает, что спектр отбрасываемой величины широк (ширина $= 2\gamma_{\text{н}} E_0^2$), имеет центр на частоте ω_l, а его полная площадь пропорциональна $\mathcal{P}_{\text{изл}}^{-1}$. В то же время спектр величины (13.3.40) характеризуется полной площадью, пропорциональной $\mathcal{P}_{\text{изл}}$, и шириной, пропорциональной $\mathcal{P}_{\text{изл}}^{-1}$. На частоте $\omega = \omega_l$ спектральные плотности соотносятся как $\mathcal{P}_{\text{изл}}^3$. Таким образом, флуктуации лазерного поля обусловлены, в основном, случайным характером фазы $\theta(t)$ в (13.3.39), их иногда относят к категории фазовых шумов.

Возвращаясь к (13.3.39), запишем это соотношение как

$$e(t) \approx E_0 \cos[\omega_l t + \theta(t)] = E_0 \operatorname{Re}[e^{i\omega_l t} e^{i\theta(t)}] =$$
$$= E_0 \operatorname{Re}[v(t) e^{i\omega_l t}],$$

где

$$v(t) \equiv e^{i\theta(t)} \qquad (13.3.41)$$

— медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля.

Вначале найдем спектральную плотность флуктуаций амплитуды $v(t)$, поскольку она простым сдвигом по частоте на ω_l переводится в аналогичную величину для $e(t)$. Воспользуемся результатами из теории связи (см. [14]), в которой установлено соответствие между

автокорреляционной функцией величины $\exp[i\theta(t)]$ и спектральной плотностью функции $\delta\omega(t) \equiv d\theta(t)/dt$:

$$\Phi_v(\tau) \equiv \langle v(t)\, v^*(t+\tau)\rangle =$$

$$= \exp\left[-\frac{\tau}{2}\int_0^\infty W_{\delta\omega}(\Omega)\left(\frac{\sin \Omega\tau/2}{\Omega\tau/2}\right)^2 d\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right], \qquad (13.3.42)$$

где $W_{\delta\omega}(\Omega)$ определяется выражениями (13.3.30) и (13.3.31). Последнее выражение для $\Phi_v(\tau)$ применимо, когда фаза $\theta(t)$ является случайным гауссовым процессом, причем не обязательно стационарным. Поскольку $\theta(t) \approx S_{ш}(t)/E_0$, из (13.3.14) следует, что $\theta(t)$, будучи линейно связанной с гауссовым источником $N_0(t)$, является гауссовым процессом.

Подстановка (13.3.31) в (13.3.42) дает

$$\Phi_v(\tau) = \exp\left[-\frac{\pi}{2} W_{\delta\omega}(0)\,\tau\right] \equiv \exp(-s|\tau|) \qquad (13.3.43)$$

для $\tau > \Delta\omega^{-1}$ [$\Delta\omega$ — ширина $g(\omega)$]; последнее неравенство позволяет рассматривать $W_{\delta\omega}(\Omega)$ как постоянную в интеграле (13.3.42).

Спектральную плотность функции $v(t)$ найдем, используя формулу (13.3.31):

$$W_v(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_v(\tau)\, e^{-i\Omega\tau}\, d\tau, \qquad (13.3.44)$$

$$W_v(\Omega) = \frac{\dfrac{r^2\hbar\omega_l}{2\pi\mathscr{P}_{изл}}\left[\dfrac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - N_{1\,пор}(g_2/g_1)}\right]}{\left\{\left(\dfrac{r^2\hbar\omega_l}{4\mathscr{P}_{изл}}\left[\dfrac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - N_{1\,пор}(g_2/g_1)}\right]\right)^2 + \Omega^2\right\}}. \qquad (13.3.45)$$

Из (13.3.14) следует:

$$W_e(\omega) = (E_0^2/4)\, W_v(\omega - \omega_l), \qquad (13.3.46)$$

поэтому

$$W_e(\omega) = \frac{\dfrac{r^2\hbar\omega_l}{8\pi\mathscr{P}_{изл}}\left[\dfrac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - N_{1\,пор}(g_2/g_1)}\right]}{\left\{\left(\dfrac{r^2\hbar\omega_l}{4\mathscr{P}_{изл}}\left[\dfrac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - N_{1\,пор}(g_2/g_1)}\right]\right)^2 + (\omega+\omega_l)^2\right\}}, \qquad (13.3.47)$$

если предположить, что $n_{пор} \ll 1$, и опустить эту величину.

Спектр поля $W_e(\omega)$ (см. рис. 13.8, *д*) имеет лоренцеву форму с полной шириной по уровню 0,5 от максимума

$$\Delta\nu_{лаз} = \frac{\Delta\omega_{лаз}}{2\pi} = \frac{\pi(\Delta\nu_{0,5})^2 h\nu_l}{\mathscr{P}_{изл}}\left(\frac{N_{2\,пор}}{N_{2\,пор} - N_{1\,пор}(g_2/g_1)}\right), \qquad (13.3.48)$$

где $\Delta\nu_{0,5} = r/2\pi$ — полная ширина полосы пропускания резонатора.

По последнему выражению $\Delta\nu_{лаз}$ получается в два раза меньше, чем по (13.2.18), впервые полученному Шавловым и Таунсом [1]. Точное значение численного коэффициента в (13.3.48) несколько зависит от предполагаемого статистического характера случайной возбуждающей функции и от типа уширения активной среды.

Полученные результаты применимы, когда спектр шумового источника $N(t)$ ограничен однородной шириной линии активной среды [13].

Сравнивая (13.3.48) с (13.3.27) и (13.3.30), приходим к следующему соотношению между $\Delta\nu_{лаз}$ и $W_{\delta\omega}(0)$:

$$\Delta\nu_{лаз} = W_{\delta\omega}(0). \qquad (13.3.49)$$

Это соотношение было обнаружено экспериментально [13].

13.4. Квантовое рассмотрение шумов в лазерах

Рассмотрение шумов в лазерах и их влияния на спектр генерации до сих пор проводилось в рамках полуклассической теории. Взглянем теперь на эту же проблему с позиций последовательной квантовой теории, а результаты сравним с полученными ранее в данной главе.

Модель лазера, используемая в дальнейших расчетах, отражает основные особенности нелинейной активной среды и учитывает затухание в резонаторе. Эта модель включает в себя: ансамбль атомов типа μ с двумя рабочими уровнями a и b; одну моду резонатора, ансамбль атомов типа ξ с двумя уровнями 1 и 2, связь между атомами и электромагнитным полем за счет дипольного взаимодействия. Схема энергетических уровней показана на рис. 13.10. Атомы типа μ ответственны за усиление на частоте $\omega \approx (\mathscr{E}_a - \mathscr{E}_b)/\hbar$. Механизм накачки переводит эти атомы на верхний уровень a в случайные моменты времени. Возбужденные атомы являются частью рассматриваемой системы до тех пор, пока они не перейдут путем безызлучательных переходов на уровни, далеко отстоящие от рабочих.

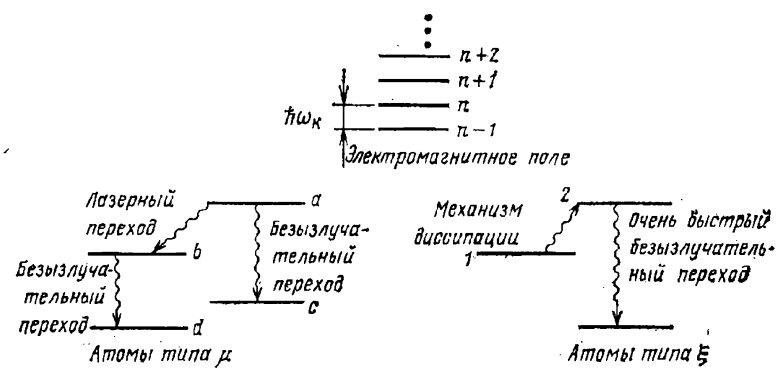


Рис. 13.10. Схема энергетических уровней в рассматриваемой модели лазера

Обозначим эти удаленные уровни через c и d. Атомы типа ξ осуществляют диссипацию энергии электромагнитного поля. В систему атомы вводятся, находясь на нижнем уровне 1. Поглотив квант электромагнитного поля, такой атом совершает быстрый безызлучательный переход на удаленный уровень, а затем опять возвращается на уровень *1*. Это свойство модели (быстрое опустошение уровня *2*) необходимо, для того, чтобы избежать насыщения в механизме потерь. Разность энергий уровней a и b атомов типа μ и уровней *1* и *2* атомов типа ξ равна энергии кванта рассматриваемой моды электромагнитного поля.

Указанной модели отвечает гамильтониан вида

$$\hat{\mathscr{H}} = \hbar\omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \sum_{\mu=a,\,b} \sum_i \mathscr{E}_\mu \hat{b}_\mu^{i+} \hat{b}_\mu^i + \sum_{\xi=1,\,2} \sum_j \mathscr{E}_\xi \hat{c}_\xi^{j+} \hat{c}_\xi^j + $$
$$+ (-i)\left(\sum_i g \hat{b}_b^{i+} \hat{b}_a^i \hat{a}_k^+ - g^* \hat{b}_a^{i+} \hat{b}^i \hat{a}_k\right) +$$
$$+ (-i)\left(\sum_j g' \hat{c}_1^{j+} \hat{c}_2^j \hat{a}_k^+ - g'^* \hat{c}_2^{j+} \hat{c}_1^j \hat{a}_k\right), \qquad (13.4.1)$$

где $\hat{a}_k$, $\hat{b}_\mu^i$, $\hat{c}_\xi^j$ — операторы уничтожения фотона, i-го атома типа μ на энергетическом уровне μ ($=a$ или b) и j-го атома типа ξ на энергетическом уровне $\mathscr{E}_\xi (=1$, или $2)$ соответственно, (эти операторы точно соответствуют операторам, введенным в гл. 2 для описания гармонического осциллятора и в гл. 4 — для описания колебаний решетки); ω_k — частота моды; $\mathscr{E}_\mu$ — энергия уровней a и b атомов типа μ; $\mathscr{E}_\xi$ — энергия уровней *1* и *2* атомов типа ξ; g и g' — константы связи, характеризующие взаимодействие электромагнитного поля с атомами типа μ и ξ соответственно. Первые три члена в (13.4.1) представляют собой энергию электромагнитного поля атомов типа μ и ξ. Остальные члены описывают взаимодействие между электромагнитным полем и атомами типа μ и ξ. Например, член $g\hat{b}_b^{i+}\hat{b}_a^i\hat{a}_k^+$ соответствует рождению фотона на частоте $\omega_k(\hat{a}_k^+)$, уничтожению i-го атома типа μ в состоянии a $(\hat{b}_a^i)$ и рождению такого же атома типа μ в состоянии b $(\hat{b}_b^{i+})$. Этот процесс соответствует излучению фотона атомом типа μ благодаря его взаимодействию с k-й модой электромагнитного поля. Аналогично интерпретируются и остальные члены в (13.4.1).

Матрица плотности электромагнитного поля. Для вероятностного описания лазера необходимо использовать матрицу плотности (см. гл. 3). В частности, выражение для $\rho_{n,n'}(t)$, где n отвечает состоянию электромагнитной моды с n квантами, можно получить подстановкой (13.4.1) в (3.8.5). Приближенное соотношение

$$\dot{\rho}_{n,\,n'}(t) = -[c_{n,\,n'}(n+1) + c_{n',\,n}(n'+1)]\,\rho_{n,\,n'}(t) +$$
$$+ [c_{n-1,\,n'-1}\sqrt{nn'} + c_{n'-1\,n-1}\sqrt{nn'}]\,\rho_{n-1,\,n'-1}(t) -$$
$$- \frac{\alpha}{2}(n+n')\,\rho_{n,\,n'}(t) + \alpha\sqrt{(n+1)(n'+1)}\,\rho_{n+1,\,n'+1}(t) \qquad (13.4.2)$$

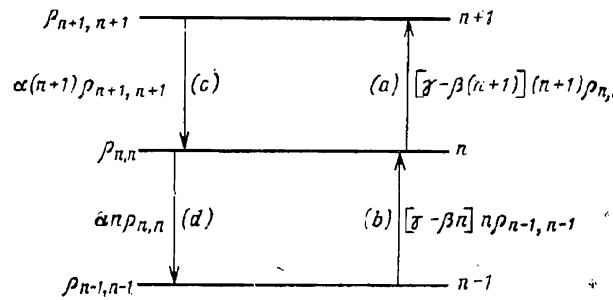


Рис. 13.11. Графическая интерпретация (13.4.3) [15]

получается после некоторых алгебраических преобразований (см. [17—19]). Здесь $c_{n,\,n'} = (\gamma/2)-(\beta/8)[(n+n'+2)+2(n'+1)]$, γ — параметр усиления, β — параметр насыщения; $\alpha = \omega/Q = 1/t_c$ — параметр потерь. При выводе (13.4.2) допускались такие приближения, которые ограничивают применимость этого уравнения условием малого числа квантов n в моде.

Диагональные элементы матрицы плотности. Положив $n = n'$ в (13.4.2), получим

$$\dot{\rho}_{n,\,n}(t) = -[\gamma-\beta(n+1)](n+1)\,\rho_{n,\,n}+[\gamma-\beta n]\,n\rho_{n-1,\,n-1}- \\ -\alpha n\rho_{n,\,n}+\alpha(n+1)\,\rho_{n+1,\,n+1}. \qquad (13.4.3)$$

Поскольку $\rho_{n,\,n}$ представляет собой вероятность нахождения n квантов в моде, каждое из слагаемых в (13.4.3) легко интерпретируется.

Рассмотрим вначале процесс усиления с испусканием одного фотона, при котором электромагнитное поле совершает переход из состояния $|n\rangle$ в состояние $|n+1\rangle$. Этот процесс идет со скоростью, пропорциональной произведению выражения $|\langle(n+1)|\hat{a}_k^+|n\rangle|^2 = n+1$ и вероятности $\rho_{n,n}$ нахождения системы в исходном состоянии. Коэффициентом пропорциональности служит γ. Поскольку процесс усиления вызывает уменьшение $\rho_{n,\,n}$ (переводя моду из состояния $|n\rangle$ в состояние $|n+1\rangle$), этот член входит в (13.4.3) со знаком минус. Таково происхождение первого члена $-\gamma(n+1)\rho_{n,n}$ в правой части (13.4.3). Насыщение усиления учитывается заменой параметра γ на $\gamma-\beta(n+1)$[1]. Все это относится к процессу (*a*) на рис. 13.11.

Второй процесс *b* на рис. 13.11 подобен первому за исключением того, что рассматривается переход из $|n-1\rangle$ в $|n\rangle$ и соответствующий член входит в уравнение со знаком плюс. Процессы (*c*) и (*d*) соответствуют уничтожению фотонов. Характер слагаемых в уравнении (13.4.3), ответственных за эти процессы, можно обосновать следующим образом. Потери фотонов, оказывающие влияние на $\rho_{n,n}$, соответствуют процессам с переходом электромагнитного поля

[1] Это можно идентифицировать с первыми двумя членами в разложении насыщенного показателя усиления (8.7.4) $\gamma = \gamma_0/(1 + I/I_{\text{нас}})$.

из состояния $|n\rangle$ в состояние $|n-1\rangle$, процесс (d), и из состояния $|n+1\rangle$ в $|n\rangle$, процесс (c). Скорость процесса (d) пропорциональна $|\langle n-1|\hat{a}_k|n\rangle|^2 = n$ и вероятности $\rho_{n,n}$ наличия в моде n квантов. Коэффициент пропорциональности равен α. Член входит со знаком минус, поскольку соответствующий процесс приводит к уменьшению вероятности обнаружения электромагнитного поля в состоянии n. Последний член в (13.4.3) соответствует процессу c и обосновывается так же, как и предыдущий.

Распределение вероятностей для числа квантов в моде. Решение $\rho_{n,n}$ уравнения (13.4.3), соответствующее установившемуся процессу, определяет распределение вероятностей для числа квантов в моде. В состоянии равновесия $\dot{\rho}_{n,n} = 0$, откуда следует

$$[\gamma-\beta(n+1)](n+1)\rho_{n,n}-[\gamma-\beta n]n\rho_{n-1,n-1}+ \\ +\alpha n\rho_{n,n}-\alpha(n+1)\rho_{n+1,n+1}=0. \qquad (13.4.4)$$

Поскольку в стационарном состоянии суммарное изменение вероятности в каждом состоянии должно равняться нулю и поскольку существует нижний уровень, равенство (13.3.4) удовлетворяется в следующем виде:

$$(\gamma-\beta n)n\rho_{n-1,n-1}-\alpha n\rho_{n,n}=0, \qquad (13.4.5)$$

$$\alpha(n+1)\rho_{n+1,n+1}-[\gamma-\beta(n+1)](n+1)\rho_{n,n}=0. \qquad (13.4.6)$$

В справедливости равенств (13.4.5) и (13.4.6) помогает убедиться рис. 13.12. Оба уравнения представляют собой одно и то же соотношение, записанное для случаев n и $n+1$.

Из (13.4.5) находим

$$\rho_{n,n}=[(\gamma-\beta n)/\alpha]\rho_{n-1,n-1}. \qquad (13.4.7)$$

Рассматривая (13.4.7) как рекуррентное соотношение, получаем

$$p(n)=\frac{\alpha}{\gamma}\rho_{0,0}\prod_{m=0}^{n}\frac{\gamma-\beta m}{\alpha}, \qquad (13.4.8)$$

где $p(n)=\rho_{n,n}$, а $\rho_{0,0}$ выбирается так, чтобы $\sum_n p(n)=1$. Полученное выражение для $p(n)$ и представляет собой искомое распределение вероятностей для числа квантов в электромагнитной моде, взаимодействующей с атомами.

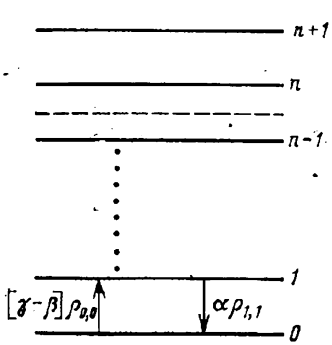


Рис. 13.12. К доказательству (13.4.5) и (13.4.6). Благодаря наличию основного состояния ($n=0$), полный поток вероятности через любую плоскость в стационарном режиме должен быть равен нулю. Применение этого условия к сечению плоскости, отмеченному штрихами, и использование выражений для интенсивностей потоков вероятности (см. рис. 13.11) приводит к (13.4.5).

При анализе (13.4.8) выделяются две очевидные возможности. Первая имеет место при $\alpha/\gamma > 1$. В этом случае мак-

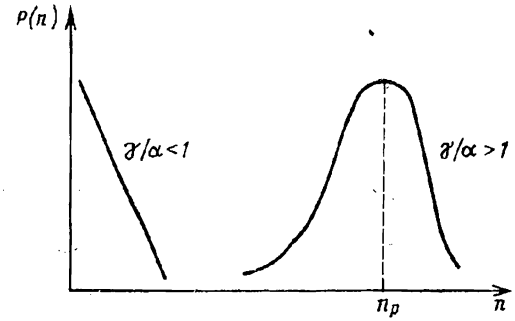


Рис. 13.13. Распределения вероятности, описываемые выражением (13.4.8), ниже ($\gamma/\alpha<1$) и выше ($\gamma/\alpha>1$) порога генерации

симальное значение $\rho_{n,n}$ соответствует $n=0$, поскольку при $n>0$, $p(n)$ получается умножением (α/γ) $\rho_{0,0}$ на числа, меньшие единицы. Отсюда следует, что $p(n)$ — монотонно убывающая функция n. Условие $\alpha/\gamma>1$ соответствует работе лазера ниже порога.

Вторая возможность реализуется при $\alpha/\gamma<1$ (т. е. выше порога). В этом случае вероятность $p(n)$ увеличивается с ростом n вплоть до $n=n_p$, где

$$n_p=(\gamma-\alpha)/\beta, \tag{13.4.9}$$

и убывает при дальнейшем увеличении n. Действительно, $[(\gamma-\beta n)/\alpha]>1$ при $n<n_p$ и $[(\gamma-\beta n)/\alpha]<1$ при $n>n_p$ Таким образом, при $n<n_p$, $p(n)$ составляется из сомножителей, больших единицы. Поэтому с ростом n растет и $p(n)$. При $n>n_p$ увеличение n добавляет в произведение (13.4.8) множители, меньше единицы, и $p(n)$ уменьшается с ростом n.В этом случае распределение вероятностей имеет ширину

$$\sigma=2(\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2)^{1/2}=2\sqrt{n_p}\,[\alpha/(\gamma-\alpha)]^{1/2},$$

где $\langle f(n)\rangle=\Sigma_n f(n)\,p(n)$. Распределения вероятностей выше и ниже порога изображены на рис. 13.13. Для значений n, больших

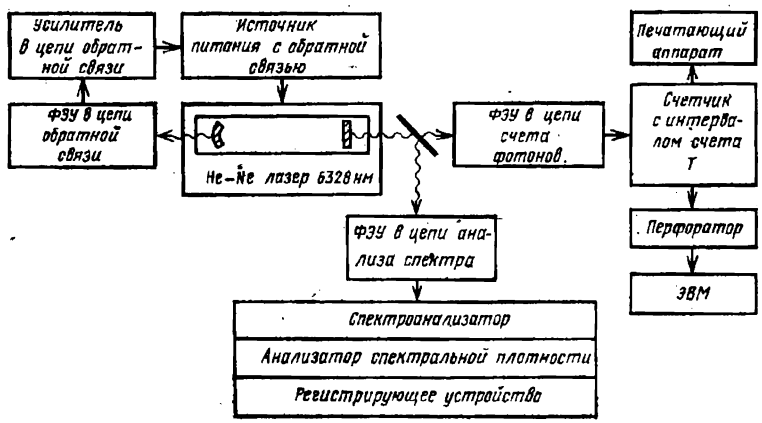


Рис. 13.14. Схема экспериментальной установки для определения, числа фотонов [16]

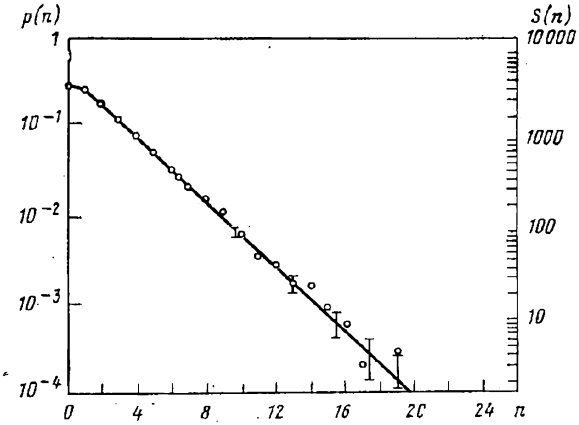


Рис. 13.15. Типичный график, отражающий результаты эксперимента по определению числа фотонов в лазере, работающем ниже порога.

Через $S(n)$ обозначено число отсчетов, соответствующих некоторому значению n [16]; $T = 10^{-6}$ с; $\Delta\nu \approx 260$ Гц; полное число отсчетов 15991

чем γ/β, величина $p\ (n)$ становится отрицательной и, следовательно, теряет физический смысл. Отрицательные значения $p\ (n)$ возникли как следствие тех приближений, которые были сделаны при выводе уравнения (13.4.2).

Измерение $p\ (n)$ в лазерах, работающих выше и ниже порога, осуществляется с помощью фотоумножителей и цифровых счетчиков.

Схема типичной экспериментальной установки изображена на рис. 13.14. Соответствующие экспериментальные данные представлены на рис. 13.15.

Задачи.

13.1. Проделайте детальный вывод формулы (13.1.7).

13.2 (а). Рассчитайте полную (т. е. по всем частотам) мощность шума, излучаемого оптическим квантовым усилителем (изображенным на рис. 13.1) на одной из поляризаций в малый телесный угол Ω.

(б) Какова шумовая мощность в полосе $\delta\nu$, которая намного меньше ширины контура усиления $\Delta\nu$? В обеих задачах (а) и (б) предположите, что усиление на один проход мало, т. е. $\mathcal{G}(\nu_0) \approx 1$.

13.3. Вычислите значение $\mathcal{P}_{ш}$, найденное в задаче 13.2 (а), для оптического квантового усилителя на смеси гелий — неон. Примите, что $t_{сп} \approx 10^{-7}$ с; $\mathcal{G}\ (\nu_0) = 1{,}07$; $T = 300$ К, $N_1 \ll N_2$ и учтите доплеровское уширение спектральной линии.

13.4. Выведите соотношения (13.3.13) — (13.3.15).

13.5. Проверьте зависимость спектра, изображенного на рис. 13.8, от насыщающей интенсивности $I_{нас}$, ненасыщенного усиления g и потерь r.

Указание: прежде всего выразите γ через $I_{нас}$, для чего сопоставьте формулу (13.3.13) и выражение для излучаемой мощности $\mathcal{P}_{изл} = rE_0^2/2$ с соответствующими им выражениями в § 9.3.

Глава 14

МОДУЛЯЦИЯ СВЕТА

В этой главе рассмотрим задачу о распространении оптического излучения в кристалле при наличии электрического поля или поля механических деформаций. Будет показано, что в кристаллах определенного типа изменение показателя преломления пропорционально величине приложенного поля. Это — эффекты, называемые соответственно электрооптическим и фотоупругим. На их основе созданы и получили широкое распространение удобные способы управления интенсивностью и фазой излучения. Они используются в прикладных целях, таких как введение информации в световой луч, модуляция добротности лазеров (гл.11) для получения гигантских световых импульсов, синхронизация мод и отклонение светового луча.

14.1. Электрооптический эффект

В гл. 5 было установлено, что произвольному направлению распространения в кристалле отвечают две собственных волны. Каждая из них характеризуется определенным направлением линейной поляризации (т. е. направлением вектора **D**) и значением показателя преломления (т. е. скоростью распространения), которые проще всего определить, используя эллипсоид показателей преломления

$$x^2/n_x^2 + y^2/n_y^2 + z^2/n_z^2, \qquad (14.1.1)$$

где x, y, z — главные диэлектрические оси, т. е. направления, вдоль которых векторы **D** и **E** параллельны.

Линейный электрооптический эффект характеризуется линейным изменением показателей преломления собственных волн от приложенного электрического поля. Он имеет место только в кристаллах без центра инверсии[1]. Это можно показать следующим образом. Предположим, что к кристаллу с центром инверсии приложено вдоль некоторого направления электрическое поле E. Оно вызывает изменение показателя преломления $\Delta n_1 = sE$, где s — постоянная, характеризующая линейный электрооптический эффект. Если направление поля сменить на обратное, то изменится показатель преломления $\Delta n_2 = s\,(-E)$. Но так как эти направления физически эквивалентны, то $\Delta n_1 = \Delta n_2$. Это приводит к требованию $s = -s$, что возможно только для $s = 0$ и означает отсутствие электрооптического эффекта.

[1] Если кристалл представить в виде регулярной решетки из точек, такой что при инверсии относительно некоторой выбранной точки (т. е. при замене координат каждого атома $\mathbf{r}$ на $-\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор) структура кристалла не изменяется, то кристалл имеет центр инверсии.

Деление кристаллов на центросимметричные (т. е. обладающие центром инверсии) и нецентросимметричные представляет собой элементарную форму кристаллографической классификации; сведения такого рода табулированы [1].

Поскольку распространение электромагнитной волны в кристалле полностью характеризуется эллипсоидом показателя преломления (14.1.1), влияние электрического поля наиболее наглядно проявляется в изменении констант этого эллипсоида $1/n_x^2$, $1/n_y^2$, $1/n_z^2$.

Запишем уравнение эллипсоида показателей при наличии электрического поля в виде [2]

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 x^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)_2 y^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)_3 z^2+2\left(\frac{1}{n^2}\right)_4 yz+2\left(\frac{1}{n^2}\right)_5 xz+ \\ +2\left(\frac{1}{n^2}\right)_6 xy=1. \qquad (14.1.2)$$

Если выбрать оси x, y, z параллельными главным диэлектрическим осям кристалла, то при нулевом электрическом поле уравнение (14.1.2) должно свестись к (14.1.1), благодаря чему

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_1\Big|_{E=0}=\frac{1}{n_x^2},\quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_2\Big|_{E=0}=\frac{1}{n_y^2},\quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_3\Big|_{E=0}=\frac{1}{n_z^2},$$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_4\Big|_{E=0}=\left(\frac{1}{n^2}\right)_5\Big|_{E=0}=\left(\frac{1}{n^2}\right)_6\Big|_{E=0}=0.$$

Линейное изменение коэффициентов $(1/n^2)_i$ $i=1, 2, \ldots, 6$ под действием произвольного «низкочастотного» электрического поля $\mathbf{E}$ (E_x, E_y, E_z) определяется выражением

$$\Delta(1/n^2)_i=\sum_{j=1}^{3} r_{ij}E_j, \qquad (14.1.3)$$

где индекс суммирования j означает $1=x$, $2=y$, $3=z$. Уравнение (14.1.3) можно записать в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_2 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_3 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_4 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_5 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix}. \qquad (14.1.4)$$

Воспользовавшись правилами перемножения матриц, имеем, например, для $\Delta\,(1/n^2)_6$ соотношение

$$\Delta\,(1/n^2)_6 = r_{61}E_1 + r_{62}E_2 + r_{63}E_3.$$

Матрица 6×3 с элементами r_{ij} называется матрицей электрооптических коэффициентов. В соответствии с доказанным выше, для кристаллов с центром инверсии $r_{ij} = 0$. Вид матрицы (но не численные значения коэффициентов) можно определить на основе анализа симметрии [1], который показывает, какие из 18 коэффициентов r_{ij} равны нулю, и определяет соотношения между остальными коэффициентами. Вид матриц электрооптических коэффициентов для всех нецентросимметричных классов кристаллов показан в табл. 14.1. В табл. 14.2 даны численные значения электрооптических коэффициентов для некоторых кристаллов.

В общем случае главные оси эллипсоида (14.1.2) не совпадают с (x, y, z). Поэтому необходимо найти направления и длины главных осей нового эллипсоида. Эта процедура хорошо известна, поскольку она совпадает с приведением квадратичных форм к главным осям [1] и состоит в нахождении собственных значений матрицы (диагонализации)

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 & \left(\frac{1}{n^2}\right)_6 & \left(\frac{1}{n^2}\right)_5 \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_6 & \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 & \left(\frac{1}{n^2}\right)_4 \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_5 & \left(\frac{1}{n^2}\right)_4 & \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 \end{vmatrix}, \qquad (14.1.5)$$

элементами которой являются константы эллипсоида (14.1.2): $1/n_x^2$; $1/n_y^2$; $1/n_z^2$. Собственные значения матрицы, соответствующие новым диагональным элементам $(1/n^2)_{i'\,i'}$, используются затем для определения направлений новых главных осей $x_{i'}$.

Пример. *Электрооптический эффект в* KH_2PO_4. Рассмотрим кристалл дигидрофосфата калия (KH_2PO_4), который известен как KDP. Кристалл имеет инверсионную ось 4-го порядка[1)], которая принимается за ось z (оптическая ось). Кроме того, имеются две взаимно-ортогональные оси второго порядка, которые лежат в плоскости, перпендикулярной z. Группа симметрии кристалла KDP обозначается — $42\,m$[2)].

[1)] При повороте кристалла вокруг этой оси на угол $2\pi/4$ с одновременной инверсией структура кристалла не изменяется.

[2)] Символику обозначения групп симметрии, а также списки наиболее известных кристаллов с указанием их группы симметрии можно найти в любой книге по основам кристаллографии.

Таблица 14.1

Вид электрооптического тензора для кристаллов всех возможных классов симметрии

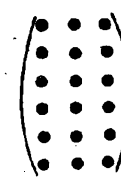
Обозначения:

- *Компонента, равная нулю*
- *Компонента, отличная от нуля*
- *Равные компоненты*
- *Компоненты, равные по величине, но противоположные по знаку*

У левого верхнего угла тензора указана группа симметрии

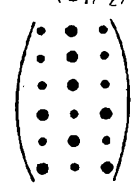
Центросимметричная система (все компоненты равны нулю)

Триклинная система

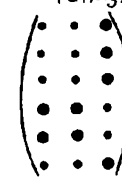


Моноклинная система

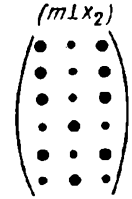
$(2 \| x_2)$



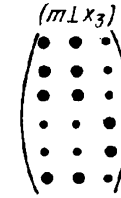
$(2 \| x_3)$



$(m \perp x_2)$

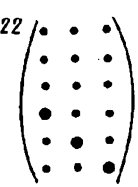


$(m \perp x_3)$

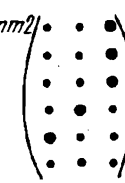


Орторомбическая система

222

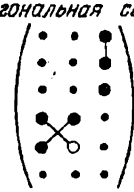


mm2

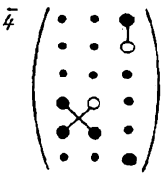


Тетрагональная система

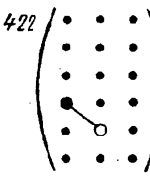
4



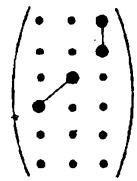
$\bar{4}$



422

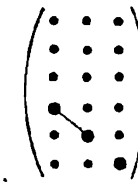


4mm



Пример: ($BaTiO_3$)

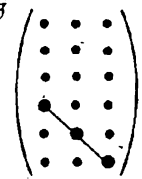
$\bar{4}2m$ ($2 \| x_1$)



Пример: KH_2PO_4 (KDP)

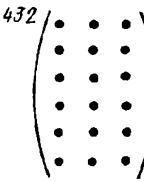
Кубическая система

$\bar{4}3m$, 23



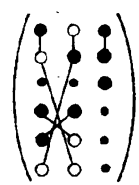
Примеры: кристаллы типа цинковой обманки (GaAs, InAs, CdTe)

432

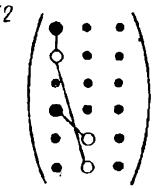


Тригональная система

3

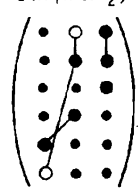


32



Примеры: (Te, кварц)

$3m$ ($m \perp x_2$)



$3m$ ($m \perp x_2$, обычная ориентация)

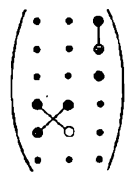


Примеры: ($LiNbO_3$, $LiTaO_3$)

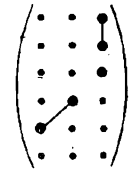
Продолжение табл. 14.1

Гексагональная система

6

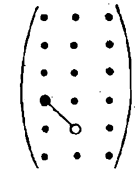


6mm



Пример: CdS

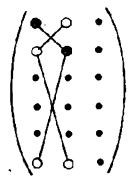
622

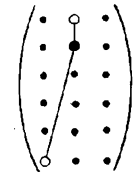


(аналогично 4 mm)

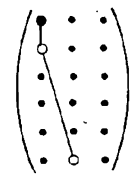
$\bar{6}$

$\bar{6}$m2 (m⊥x_1, обычная ориентация)





(m⊥x_2)



Используя данные табл. 14.1, запишем матрицу электрооптических коэффициентов

$$r_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{vmatrix}. \qquad (14.1.6)$$

Отличны от нуля только элементы $r_{41} = r_{52}$ и r_{63}. Основываясь на (14.1.1), (14.1.4) и (14.1.6), получим уравнение эллипсоида показателей при наличии поля **E** (E_x, E_y, E_z),

$$x^2/n_0^2 + y^2/n_0^2 + z^2/n_e^2 + 2r_{41}E_x yz + 2r_{41}E_y xz + \\ + 2r_{63}E_z xy = 1 \qquad (14.1.7)$$

где постоянные, входящие в первые три члена уравнения, не зависят от поля и, так как кристалл одноосный, берутся в виде $n_x = n_y = n_0$, $n_z = n_e$. Таким образом, при наложении электрического поля в уравнении эллипсоида показателей появляются «смешанные»

Таблица 14.2

Некоторые электрооптические кристаллы и их характеристики [2,3]

Материал	Электрооптический коэффициент при комнатной температуре 10^{-12} м/в	Показатель преломления[1]	$n_0^3 r$, 10^{-12} м/В	$\varepsilon/\varepsilon_0$ (при комнатной температуре)	Точечная группа симметрии
KDP (KH_2PO_4)	$r_{41}=8{,}6$ $r_{63}=10{,}6$	$n_0=1{,}51$ $n_e=1{,}47$	29 34	$\varepsilon \parallel c=20$ $\varepsilon \perp c=45$	$\bar{4}2\,m$
KD_2PO_4	$r_{63}=23{,}6$	$\sim 1{,}50$	80	$\varepsilon \parallel c \sim 50$ при 24С	$\bar{4}2\,m$
ADP ($NH_4H_2PO_4$)	$r_{41}=28$ $r_{63}=8{,}5$	$n_0=1{,}52$ $n_e=1{,}48$	95 27	$\varepsilon \parallel c=12$	$\bar{4}2\,m$
Кварц	$r_{41}=0{,}2$ $r_{63}=0{,}93$	$n_0=1{,}54$ $n_e=1{,}55$	0,7 3,4	$\varepsilon \parallel c \sim 4{,}3$ $\varepsilon \perp c \sim 4{,}3$	32
CuCl	$r_{41}=6{,}1$	$n_0=1{,}97$	47	7,5	$\bar{4}3\,m$
ZnS	$r_{41}=2{,}0$	$n_0=2{,}37$	27	~ 10	$\bar{4}3\,m$
GaAS на 10,6 мкм	$r_{41}=1{,}6$	$n_0=3{,}34$	59	11,5	$\bar{4}3\,m$
ZnTe на 10,6 мкм	$r_{41}=3{,}9$	$n_0=2{,}79$	77	7,3	$\bar{4}3\,m$
CdTe на 10,6 мкм	$r_{41}=6{,}8$	$n_0=2{,}6$	120		$\bar{4}3\,m$
	$r_{33}=30{,}8$ $r_{13}=8{,}6$	$n_0=2{,}29$	$n_e^3 r_{33}=328$	$\varepsilon \perp c=98$	
ZnSe	$r_{41}=1{,}8$	$n_0=2{,}3$	26	9,1	$\bar{4}3\,m$
$LiNbO_3$	$r_{22}=3{,}4$ $r_{42}=28$	$n_e=2{,}20$	$n_0^3 r_{22}=37$ $(n_e^3 r_{33}-$ $-n_0^3 r_{13})/2=112$	$\varepsilon \parallel c=50$	$3\,m$
GaP	$r_{41}=0{,}97$	$n_0=3{,}31$	$n_0^3 r_{41}=29$		$\bar{4}3\,m$
$LiTaO_3$ (30 °C)	$r_{33}=30{,}3$ $r_{13}=5{,}7$	$n_0=2{,}175$ $n_e=2{,}180$	$n_e^3 r_{33}=314$	$\varepsilon \parallel c=43$	$3\,m$
$BaTiO_3$ (30 °C)	$r_{33}=23$ $r_{13}=8{,}0$ $r_{42}=820$	$n_0=2{,}437$ $n_e=2{,}365$	$n_e^3 r_{33}=334$	$\varepsilon \perp c=4300$ $\varepsilon \parallel c=106$	$4\,mm$

[1] Типичное значение при $\lambda=550$ нм.

члены xy, xz, yz. Это означает, что главные оси эллипсоида при наличии поля не параллельны осям кристалла x, y, z. Чтобы выяснить, как влияет электрическое поле на распространение электромагнитной волны, необходимо найти направления и длины главных осей эллипсоида при наличии поля $\mathbf{E}$.

Пусть к кристаллу приложено электрическое поле, параллельное оси z, тогда (14.1.7) можно записать в виде

$$\frac{x^2+y^2}{n_0^2}+\frac{z^2}{n_e^2}+2r_{63}E_z\,xy=1. \qquad (14.1.8)$$

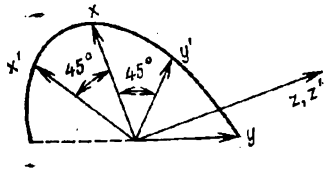


Рис. 14.1. Оси x, y, z и x', y', z' кристалла класса $\bar{4}2m$ (типа KH_2PO_4).
z — оптическая ось четвертого порядка, x и y — оси симметрии второго порядка

Задача состоит в нахождении новой системы координат (x', y', z'), в которой уравнение эллипсоида показателей (14.1.8) не имеет смешанных членов

$$\frac{x'^2}{n_{x'}^2}+\frac{y'^2}{n_{y'}^2}+\frac{z'^2}{n_{z'}^2}=1, \qquad (14.1.9)$$

новые x', y' и z' явдяются главными осями эллипсоида при наличии электрического поля. Длины главных осей эллипсоида, согласно (14.1.9), равны $2n_{x'}$, $2n_{y'}$, $2n_{z'}$ и зависят, в общем случае, от величины приложенного поля.

Чтобы уравнение (14.1.8) имело диагональную форму, необходимо выбрать систему координат x', y', z', с осью z', параллельной оси z. Так как (14.1.8) симметрично относительно перестановки $x \rightleftarrows y$, то координаты (x', y') преобразуются в (x, y) при повороте на угол 45° (рис. 14.1). При таком преобразовании старые (x, y) и новые (x', y') координаты связаны следующим образом:

$$x = x' \cos 45° - y' \sin 45°;\ y = x' \sin 45° + y' \cos 45°.$$

Подставив эти соотношения в (14.1.8), получим

$$\left(\frac{1}{n_0^2}+r_{63}E_z\right)x'^2+\left(\frac{1}{n_0^2}-r_{63}E_v\right)y'^2+\frac{z^2}{n_e^2}=1. \qquad (14.1.10)$$

Уравнение (14.1.10) подтверждает то, что оси x', y', z', действительно, являются главными осями эллипсоида при наличии поля, параллельного оси z. Согласно (14.1.10) длину $2n_{x'}$ оси x' эллипсоида можно найти из соотношения

$$1/n_{x'}^2 = 1/n_0^2 + r_{63}E_z.$$

Используя предположение $r_{63}E_z \ll n_0^{-2}$ и дифференциальное соотношение

$$dn = -(n^3/2)\ d\ (1/n^2),$$

получим

$$n_{x'} = n_0 - n_0^3 r_{63}E_z/2. \qquad (14.1.11)$$

Аналогично можно получить выражения для $n_{y'}$ и n_z

$$n_{y'} = n_0 + n_0^3 r_{63}E_z/2, \qquad (14.1.12)$$

$$n_z = n_e. \qquad (14.1.13)$$

14.2. Электрооптическая разность хода лучей

Эллипсоид показателей кристалла KDP при наличии электрического поля **E**, ориентированного вдоль z, изображен на рис. 14.2. Если рассмотреть распространение волны вдоль оси z, то согласно процедуре, описанной в § 5.3, необходимо найти эллипс, образованный пересечением эллипсоида и плоскости $z = 0$ (в общем случае плоскости, содержащей начало координат и перпендикулярной направлению распространения). Уравнение эллипса получается из уравнения эллипсоида показателей (14.1.10) при $z = 0$

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + r_{63} E_z\right) x'^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} - r_{63} E_z\right) y'^2 = 1. \qquad (14.2.1)$$

На рис. 14.2 изображен один квадрант эллипса (заштрихован). Его малая и большая полуоси совпадают соответственно с x' и y'. Из § 5.3 следует, что при распространении волны вдоль z возможны два направления поляризаций: вдоль x' и y'. Соответствующие им показатели преломления $n_{x'}$ и $n_{y'}$ даются выражениями (14.1.11) и (14.1.12).

Рассмотрим волну, падающую перпендикулярно на входную поверхность кристалла ($z = 0$). Вектор **E** направлен вдоль x. Разложим его на две взаимно-ортогональные компоненты $E_{x'}$ и $E_{y'}$. Компонента $E_{x'}$ распространяется как

$$E_{x'} = A \exp\{i[\omega t - (\omega/c) n_{x'} z]\}.$$

Используя (14.1.11), ее можно переписать в виде

$$E_{x'} = A \exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\omega}{c}\left(n_0 - \frac{n_0^3 r_{63} E_z}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (14.2.2)$$

Компонента $E_{y'}$ дается выражением

$$E_{y'} = A \exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\omega}{c}\left(n_0 + \frac{n_0^3 r_{63} E_z}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (14.2.3)$$

Разность фаз между двумя компонентами на выходе кристалла (плоскость $z = l$) называется запаздыванием или разностью хода

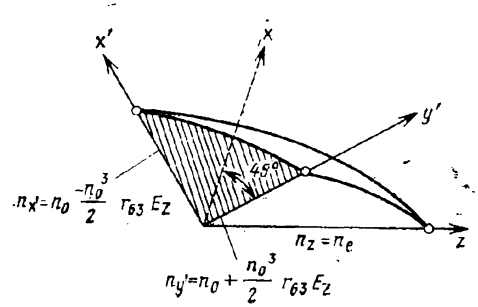


Рис. 14.2. Часть эллипсоида показателей кристалла KDP при наличии электрического поля, ориентированного вдоль оси z (x', y' и z — главные диэлектрические оси). Направления осей x' и y' даны на рис. 14.1

лучей. Она совпадает с разностью показателей экспонент (14.2.2) и (14.2.3)

$$\Gamma = \varphi_{x'} - \varphi_{y'} = (\omega/c)\, n_0^3 r_{63} V, \qquad (14.2.4)$$

где $V = E_z l$ и $\varphi_{x'} = -(\omega n_{x'}/c)\, l$. На рис. 14.3 изображены $E_{x'}(z)$ и $E_{y'}(z)$ в некоторый момент времени. На рисунке также изображены кривые, которые описывает конец вектора в различных точках вдоль пути волны. В плоскости $z = 0$ разность фаз $\Gamma = 0$ и поле линейно поляризовано вдоль x. В точке l имеем $\Gamma = \pi/2$ и, опуская общую составляющую фаз, запишем

$$E_{x'} = A\cos\omega t, \quad E_{y'} = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin\omega t. \qquad (14.2.5)$$

Электрическое поле волны циркулярно поляризовано по часовой стрелке. В точке i имеем $\Gamma = \pi$, так что

$$E_{x'} = A\cos\omega t, \quad E_{y'} = A\cos(\omega t - \pi) = -A\cos\omega t.$$

Излучение вновь линейно поляризовано, но уже вдоль оси y, т. е. перпендикулярно исходному направлению поляризации.

Запаздывание, выражаемое формулой (14.2.4), можно также представить в виде

$$\Gamma = \pi E_z l/V_\pi = \pi V/V_\pi. \qquad (14.2.6)$$

где V_π — напряжение, которое приводит к разности фаз, равной π[1]

$$V_\pi = \lambda/(2n_0^3 r_{63}), \qquad (14.2.7)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны в вакууме. Используя, например, значение r_{63} для кристалла ADP, приведенное в табл. 14.2, получим из (14.2.7) $(V_\pi)_{\text{ADP}} = 10000$ В при $\lambda = 0{,}5$ мкм.

14.3. Амплитудная электрооптическая модуляция

На рис. 14.3 видно, что в результате наведенного электрическим полем двулучепреломления волна, поляризованная в плоскости $z = 0$ вдоль x, по мере прохождения через кристалл изменяет свою поляризацию: компонента E_x уменьшается с расстоянием, а E_y, наоборот, растет вплоть до точки i, в которой $\Gamma = \pi$ и волна поляризована вдоль y. После точки i компонента E_y уменьшается. Если точка i соответствует выходной плоскости кристалла и на выходе помещен поляризатор под прямым углом к направлению поляризации на входе (он пропускает только компоненту E_y), то при наличии электрического поля оптическое излучение проходит без ослабления, в то время как без поля ($\Gamma = 0$) выходное излучение полностью блокируется. Такой способ управления потоком энергии излучения лежит в основе амплитудной электрооптической модуляции света.

[1] Величина V_π называется полуволновым напряжением, поскольку в его присутствии компоненты $E_{x'}$ и $E_{y'}$, распространяясь независимо, пространственно смещены на выходе кристалла на половину длины волны (точка i на рис. 14.3).

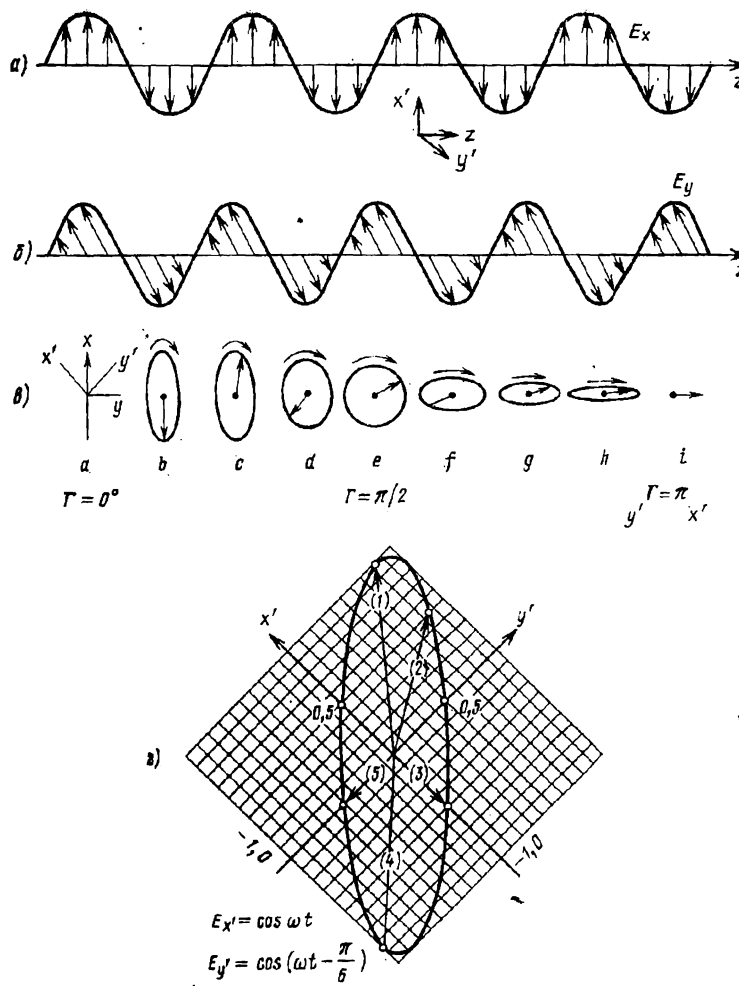


Рис. 14.3. Волна, имеющая на входе линейную поляризацию вдоль x, распространяется по электрооптическому кристаллу в направлении оси z. При наложении электрического поля x' и y' являются главными диэлектрическими осями (этот случай реализуется в KH_2PO_4, когда внешнее поле прикладывается вдоль оси z)

а — распределение компоненты Ex' вдоль оси z в кристалле в некоторый момент времени t; *б* — распределение компоненты Ey' в тот же момент, *в* — эллипсы поляризации электрического поля волны в плоскости (x', y') в различных точках (от *а* до *i*) вдоль кристалла. Прямая стрелка — вектор электрического поля волны в момент t; изогнутая стрелка указывает направление вращения вектора; *г* — эллипс поляризации, соответствующий разности фаз между компонентами электрического поля $\Gamma = \pi/6$. Здесь также показано положение вектора электрического поля в различные моменты времени: (*1*) $\omega t = 0°$, (2) $\omega t = 60°$, (3) $\omega t = 120°$, (4) $\omega t = 210°$, (5) $\omega t = 270°$.

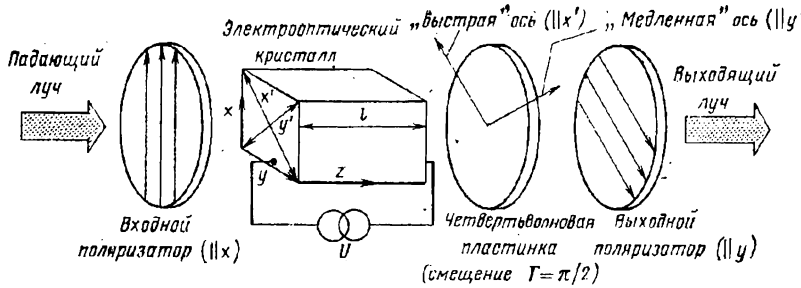


Рис. 14.4. Схема амплитудного электрооптического модулятора. Разность фаз Γ является суммой постоянного смещения (Γ=π/2), вносимого четвертьволновой пластинкой, и электрооптической разности фаз, достигаемой в кристалле

Типичная схема амплитудного электрооптического модулятора показана на рис. 14.4. Он состоит из электрооптического кристалла, помещенного между двумя скрещенными поляризаторами, которые повернуты относительно осей наведенного двулучепреломления x' и y' на угол 45°. Рассмотрим, как в данной схеме работает кристалл KDP. Так как естественное двулучепреломление также дает вклад (фиксированный) в запаздывание, то результирующая разность фаз Γ слагается из двух частей: вызванной естественным двулучепреломлением и наведенной электрическим полем. Падающее на кристалл излучение линейно поляризовано по x. Следовательно, компоненты $E_{x'}$ и $E_{y'}$ имеют равные фазы и могут быть записаны в виде $E_{x'} = A\cos\omega t$, $E_{y'} = A\cos\omega t$, а их комплексные амплитуды — $E_{x'}(0) = A$, $E_{y'}(0) = A$.

Таким образом, интенсивность падающего излучения

$$I_i \propto \mathbf{E}\mathbf{E}^* = |E_{x'}(0)|^2 + |E_{y'}(0)|^2 = 2A^2. \qquad (14.3.1)$$

На выходе из кристалла ($z = l$) сдвиг по фазе между компонентами $E_{x'}$ и $E_{y'}$ равен Γ

$$E_{x'}(l) = A, \quad E_{y'}(l) = Ae^{-i\Gamma}. \qquad (14.3.2)$$

После прохождения выходного поляризатора комплексная амплитуда представляет собой сумму y-компонент величин $E_{x'}$ и $E_{y'}$:

$$(E_y)_0 = A(e^{-i\Gamma} - 1)/\sqrt{2}. \qquad (14.3.3)$$

При этом интенсивность излучения на выходе

$$I_0 \propto [(E_y)_0 (E_y^*)_0] = \frac{A^2}{2}[(e^{-i\Gamma} - 1)(e^{i\Gamma} - 1)] = 2A^2 \sin^2\frac{\Gamma}{2},$$

и коэффициент пропорциональности тот же, что и в (14.3.1). Отношение интенсивностей на выходе и входе модулятора с помощью (14.2.6) можно записать как

$$\frac{I_0}{I_i} = \sin^2\frac{\Gamma}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{V}{V_\pi}\right). \qquad (14.3.4)$$

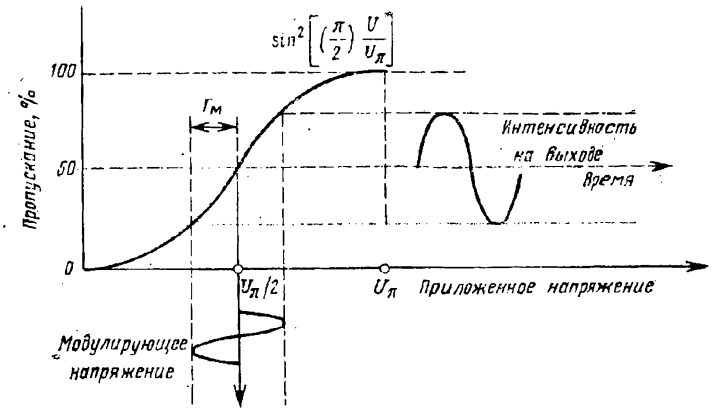


Рис. 14.5. Коэффициент передачи амплитудного электрооптического модулятора как функция приложенного напряжения

Коэффициент передачи I_0/I_i изображен на рис. 14.5 как функция приложенного напряжения. На рисунке проиллюстрирован также процесс амплитудной модуляции оптического излучения. Рабочая точка на модуляционной характеристике обычно смещается[1] введением постоянной разности хода $\Gamma_в = \pi/2$ в положение, соответствующее 50%-ному пропусканию. Тогда малое синусоидальное изменение напряжения приводит (рис. 14.5) к почти синусоидальной модуляции интенсивности выходного излучения.

Чтобы математически описать процесс модуляции, изображенный на рис. 14.5, зададим Γ в виде

$$\Gamma = \pi/2 + \Gamma_м \sin \omega_м t, \tag{14.3.5}$$

где смещение взято равным $\pi/2$, а $\Gamma_м$ связано с амплитудой $V_м$ модулирующего напряжения $V_м \sin \omega_м t$ соотношением (14.2.6): $\Gamma_м = \pi (V_м/V_\pi)$. Используя (14.3.4), находим

$$I_0/I_i = \sin^2 [\pi/4 + (\Gamma_м/2)\sin \omega_м t] = \tag{14.3.6}$$

$$= {}^1/_2 [1 + \sin(\Gamma_м \sin \omega_м t)]. \tag{14.3.7}$$

Для $\Gamma_м \ll 1$ это выражение сводится к

$$I_0/I_i \approx {}^1/_2 (1 + \Gamma_м \sin \omega_м t) \tag{14.3.8}$$

и интенсивность является линейной функцией модулирующего напряжения $V_м \sin \omega_м t$. Если условие $\Gamma_м \ll 1$ не выполняется, то,

[1] Нужного смещения можно достигнуть с помощью напряжения $V = V_{\pi/2}$ либо за счет естественного двулучепреломления (см. рис. 14.4), обеспечивающего сдвиг по фазе между E_x' и E_y', равный $\pi/2$. Последний способ более удобен.

как следует из рис. 14.5 или из (14.3.7), изменение интенсивности имеет искаженную форму и содержит гармоники модулирующего напряжения. Анализу зависимости величины искажений от $\Gamma_м$ посвящена задача 14.3.

14.4. Фазовая модуляция света

В предыдущем параграфе было показано, как с помощью поляризаторов можно превратить модуляцию поляризации, достигаемую посредством электрооптического эффекта, в модуляцию интенсивности светового луча. Рассмотрим теперь ситуацию, изображенную на рис. 14.6. В отличие от рис. 14.4, где $E_{x'} = E_{y'}$, падающее излучение теперь поляризовано вдоль одной из осей наведенного двулучепреломления, например, оси x'. В этом случае приложенное вдоль оси z электрическое поле меняет не состояние поляризации, а фазу выходящей волны. Изменение фазы дается формулой

$$\Delta\varphi_{x'} = -(\omega l/c)\,\Delta n_{x'},$$

которая с помощью (14.1.11) преобразуется в

$$\Delta\varphi_{x'} = (\omega n_0^3 r_{63}/2c)\,E_z\,l. \qquad (14.4.1)$$

Если управляющее электрическое поле изменяется во времени синусоидально

$$E_z = E_м \sin\,\omega_м t, \qquad (14.4.2)$$

то электрическое поле волны, которое на входе кристалла менялось по закону $E_{вх} = A\,\cos\,\omega t$, на выходе кристалла имеет вид

$$E_{вых} = A\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}\left(n_0 - \frac{n_0^3}{2} r_{63}\,E_м\,\sin\omega_м t\right) l\right],$$

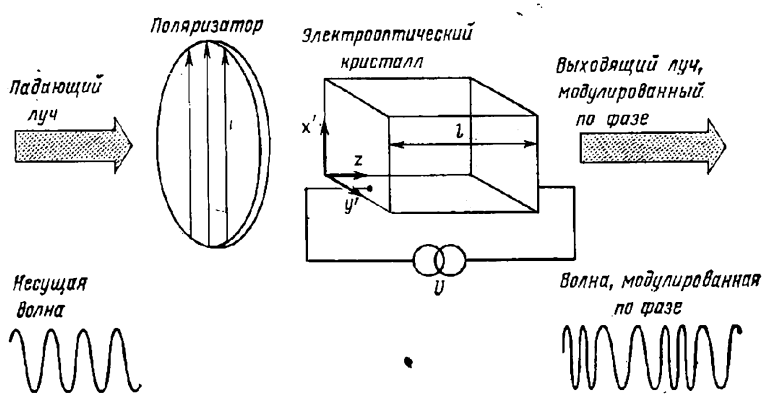


Рис. 14.6. Электрооптический фазовый модулятор.

Ориентация кристалла и направление приложенного поля соответствуют кристаллу KDP. Электрический вектор волны параллелен главной диэлектрической оси x', наведенной внешним электрическим полем

где l — длина кристалла. Опуская постоянную фазу, которая в данном случае несущественна, перепишем последнее выражение

$$E_{\text{вых}} = A \cos(\omega t + \delta \sin \omega_{\text{м}} t), \qquad (14.4.3)$$

где

$$\delta = \frac{\omega}{2l} n_0^3 r_{63} E_{\text{м}} l = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{63} E_{\text{м}} l \qquad (14.4.4)$$

— коэффициент фазовой модуляции. Используя разложение по функциям Бесселя

$$\cos(\delta \sin \omega_{\text{м}} t) = J_0(\delta) + 2 J_2(\delta) \cos 2\omega_{\text{м}} t + 2 J_4(\delta) \cos 4 \omega_{\text{м}} t + \ldots,$$

$$\sin(\delta \sin \omega_{\text{м}} t) = J_1(\delta) \sin \omega_{\text{м}} t + 2 J_3(\delta) \sin 3\omega_{\text{м}} t + \ldots$$

перепишем выражение (14.4.3)

$$E_{\text{вых}} = A [J_0(\delta) \cos \omega t + J_1(\delta) \cos(\omega + \omega_{\text{м}}) t - J_1(\delta) \cos(\omega - \omega_{\text{м}}) t + J_2(\delta) \cos(\omega + 2\omega_{\text{м}}) t + J_2(\delta) \cos(\omega - 2\omega_{\text{м}}) t + J_3(\delta) \cos(\omega + 3\omega_{\text{м}}) t - J_3(\delta) \cos(\omega - 3\omega_{\text{м}}) t + J_4(\delta) \cos(\omega + 4\omega_{\text{м}}) t + J_4(\delta) \cos(\omega - 4\omega_{\text{м}}) t + \ldots].$$

Это выражение определяет распределение энергий по боковым частотам в зависимости от коэффициента фазовой модуляции δ. Заметим, что для $\delta = 0$, $J_0(0) = 1$ и $J_n(0) = 0$ $n \neq 0$. Интересно отметить, что δ, определяемая соотношением (14.4.4), вдвое меньше разности фаз Γ, которая дается формулой (14.2.4).

14.5. Поперечная схема электрооптической модуляции

В рассмотренных электрооптических модуляторах электрическое поле прикладывалось вдоль направления распространения света. Это так называемая продольная схема модуляции. Более предпочтительной является поперечная схема, в которой поле прикладывается перпендикулярно направлению распространения света. В этом случае электроды не препятствуют прохождению света, а разность фаз, которая в данном случае пропорциональна произведению напряжения, приложенного к кристаллу, на его длину, может быть увеличена за счет использования более длинных кристаллов. В продольной схеме разность фаз согласно (14.2.4) пропорциональна напряжению $V = E_z l$ и не зависит от длины кристалла. Рис. 14.1 и 14.2 помогают разобраться в том, как достигается разность фаз в схеме на кристалле KDP с поперечным полем, изображенной на рис. 14.7. В этом случае свет распространяется вдоль y', вектор электрического поля волны ориентирован в плоскости $x' - z$ под

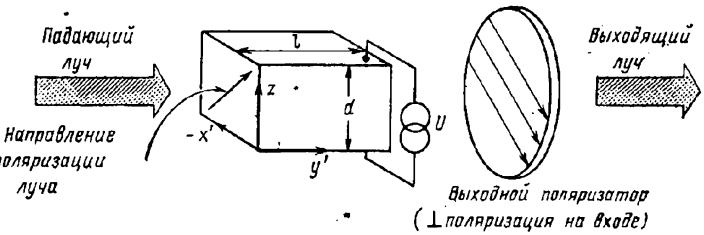


Рис. 14.7. Поперечный электрооптический модулятор на основе кристалла KDP. Электрическое поле приложено перпендикулярно направлению распространения волны

углом 45° к оси z. Из (14.1.11) и (14.1.13) получается следующее выражение для разности фаз при наличии внешнего электрического поля, приложенного вдоль оси z:

$$\Gamma = \varphi_z - \varphi_{x'} = \frac{\omega l}{c}\left[(n_0 - n_e) - \frac{n_0^3}{2} r_{63} \frac{V}{d}\right], \qquad (14.5.1)$$

где d — размер кристалла в направлении приложенного поля. Заметим, что Γ содержит член, не зависящий от значения приложенного напряжения. Результирующее «снижение» модуляции, связанное с этим членом, обсуждается в задаче 14.7.

Пример.

Электрооптический эффект в кубических кристаллах класса $\bar{4}3m$. К указанной группе относятся, например, кристаллы InAs, CuCl, CaAs и CdTe. Два последних используются для модуляции излучения инфракрасного диапазона, так как их область прозрачности простирается за 10 мкм [5,6]. Эти кристаллы имеют инверсионную ось четвертого порядка, направленную вдоль ребра куба ⟨100⟩ и ось третьего порядка, направленную по диагонали куба ⟨111⟩.

Рассмотрим случай, когда внешнее поле прикладывается вдоль направления ⟨111⟩. Взяв амплитуду поля равной E, запишем выражение для вектора электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{E}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \qquad (14.5.2)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$, — единичные векторы, направленные вдоль ребер куба x, y, z соответственно. Согласно табл. 14.1 (см. класс $\bar{4}3m$) не равны нулю элементы r_{41}, $r_{52} = r_{41}$ и $r_{63} = r_{41}$. Таким образом, используя (14.1.2), (14.1.4) и

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 = \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 = \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 = \frac{1}{n^2},$$

получим уравнение эллипсоида показателей

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{n_0^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} r_{41} E (xy + yz + xz) = 1. \qquad (14.5.3)$$

Действуя по шаблону, можно бы сейчас вычислить направления главных осей эллипсоида x', y', z'. Обратим, однако, внимание на то, что направление $\langle 111\rangle$, вдоль которого приложено поле, продолжает оставаться трехкратной осью, в то время как оставшиеся две оси могут быть выбраны в плоскости, перпендикулярной $\langle 111\rangle$, произвольно. Следовательно, (14.5.3) есть уравнение эллипсоида вращения вокруг $\langle 111\rangle$. Чтобы доказать это, выбираем $\langle 111\rangle$ в качестве оси z', так что

$$z' = x/\sqrt{3} + y/\sqrt{3} + z/\sqrt{3}. \qquad (14.5.4)$$

Определим x' как $x' = y/\sqrt{2} - z/\sqrt{2}$, и поскольку направление y' перпендикулярно x' и z', то

$$y' = -x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} + z/\sqrt{6}. \qquad (14.5.5)$$

Следовательно, обратные преобразования имеют вид

$$x = -\frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$
$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'. \qquad (14.5.6)$$

Подставив (14.5.6) в (14.5.3), получим уравнение эллипсоида показателей в системе координат x', y', z'

$$(x'^2 + y'^2)\left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{r_{41}}{\sqrt{3}}E\right) + \left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{2r_{41}}{\sqrt{3}}E\right)z'^2 = 1. \qquad (14.5.7)$$

Главные оси эллипсоида показателей имеют длины

$$n_{y'} = n_{x'} = n_0 + (n_0^3 r_{41} E/2\sqrt{3}), \quad n_{z'} = n_0 - (n_0^3 r_{41} E/\sqrt{3}). \qquad (14.5.8)$$

Из (14.5.7) видно, что любой другой выбор x' и y', перпендикулярных z' и друг другу, также удовлетворяет (14.5.7), так как они входят в уравнение в виде комбинации $(x'^2 + y'^2)$, которая инвариант-

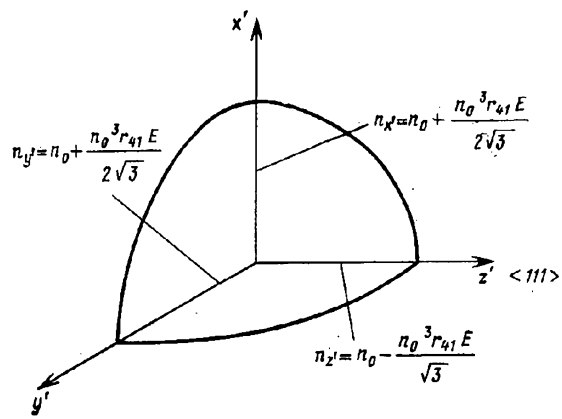
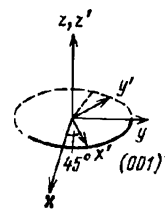
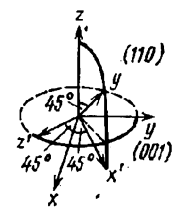
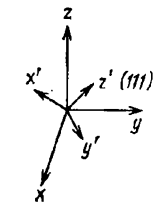
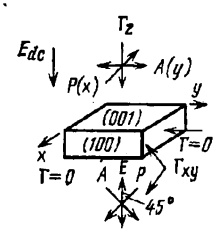
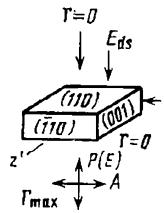
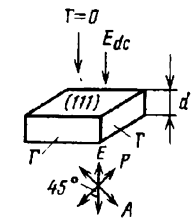


Рис. 14.8. Пересечение эллипсоида показателей кристалла класса $\bar{4}3m$ с плоскостями $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$.

Внешнее электрическое поле ориентировано вдоль оси <111>. В этом случае $n_{x'}$, $n_{y'}$, $n_{z'}$ — главные значения показателя преломления

Таблица 14.3

Электрооптические свойства кристаллов класса $\bar{4}3$ (типа цинковой обманки) для трех ориентаций приложенного поля [6]

	$E \parallel$ плоскости (001) $E_x = E_y = 0,\ E_z = E$	$E \perp$ плоскости (110) $E_x = E_y = \frac{E}{\sqrt{2}},\ E_z = 0$	$E \perp$ плоскости (111) $E_x = E_y = E_z = \frac{E}{\sqrt{3}},$
Эллипсоид показателей преломления	$\frac{x^2+y^2+z^2}{n_0^2} + 2r_{41}E_{xy} = 1$	$\frac{x^2+y^2+z^2}{n_0^2} + \sqrt{2}\, r_{41} E (yz + zx) = 1$	$\frac{x^2+y^2+z^2}{n_0^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} r_{41} E (yz + zx + xy) = 1$
n'_x	$n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E$	$n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E$	$n_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_0^3 r_{41} E$
n'_y	$n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E$	$n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E$	$n_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_0^3 r_{41} E$
n'_z	n_0	n_0	$n_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} n_0^3 r_{41} E$
Координаты x' y' z'			
Направления векторов поля и осей поляризаторов			
Электрооптическая разность фаз ($U = Ed$)	$\Gamma_z = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 r_{41} U$ $\Gamma_{xy} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 r_{41} U$	$\Gamma_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{d} \cdot n_0^3 r_{41} U$	$\Gamma = \frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda} \frac{l}{d} \times n_0^3 r_{41} U$

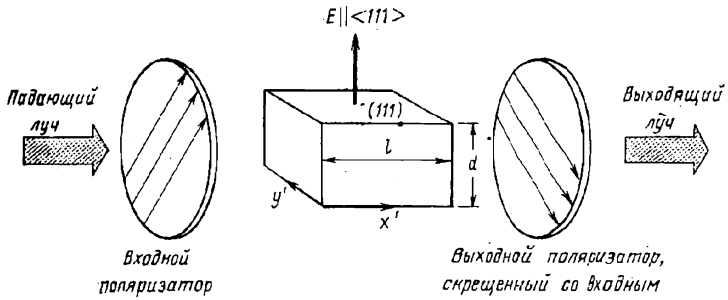


Рис. 14.9. Поперечный электрооптический модулятор на основе кристаллов типа цинковой обманки (класс $\bar{4}3m$) с электрическим полем, ориентированным вдоль диагонали куба <111>

на относительно вращения вокруг оси z'. Главные оси эллипсоида показателей (14.5.7) показаны на рис. 14.8.

Амплитудный модулятор, использующий поперечную схему электрооптической модуляции, показан на рис. 14.9. Коэффициент передачи модулятора по интенсивности дается формулой (14.3.4)

$$I_0/I_i = \sin^2 (\Gamma/2).$$

Величину разности фаз Γ найдем, используя (14.3.8)

$$\Gamma = \varphi_{z'} - \varphi_{y'} = (\sqrt{3}\,\pi n_0^3 r_{41}/\lambda) V l/d. \qquad (14.5.9)$$

Сведения об электрооптических свойствах кристаллов класса $\bar{4}3\,m$ собраны в табл. 14.3.

14.6. Высокочастотная модуляция

В трех предшествовавших параграфах речь шла об электрооптическом эффекте в низкочастотном управляющем поле. На практике же часто модулирующий сигнал имеет высокую частоту и, в связи со стремлением как можно полнее использовать возможности, предоставляемые лазером, занимает широкую полосу. Рассмотрим основные факторы, ограничивающие сверху частоту модуляции в типичных экспериментальных условиях.

Обратимся сначала к схеме, изображенной на рис. 14.10. Электрооптический кристалл помещается между электродами, к которым прикладывается напряжение частоты $\omega_0/2\,\pi$. Посредством R_s обозначено внутреннее сопротивление источника модулирующего напряжения, C — емкость электрооптического кристалла, вырезанного в форме плоскопараллельной пластинки. Если $R_s > (\omega_0 C)^{-1}$, то большая часть модулирующего напряжения падает на сопротивление R_s и является бесполезной, так как не дает вклада в разность фаз Γ. Положение можно исправить, создав с помощью индуктивности L резонансные условия $\omega_0^2 = 1/LC$, как это показано на ри-

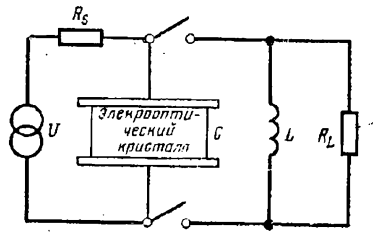


Рис. 14.10. Эквивалентная схема электрооптического модулирующего кристалла, помещенного между плоскопараллельными электродами

сунке. Кроме того, берется такое шунтирующее сопротивление, что на частоте $\omega = \omega_0$ импеданс контура RLC, равный R_L, оказывается большим R_s. Резонансный контур имеет конечную полосу, т. е. его импеданс велик только внутри интервала частот $\Delta\omega$, $\Delta\omega/2\pi \approx 1/(2\pi R_L C)$, с центром ω_0. Поэтому максимальная ширина полосы частот модуляции (частотный спектр модулирующего напряжения) не должна превышать

$$\Delta\omega/2\pi \approx (2\pi R_L C)^{-1} \qquad (14.6.1)$$

при условии, что модулирующее поле является точной копией модулирующего напряжения.

На практике требующаяся полоса частот модуляции определяется спецификой применения. Предположим, что в процессе модуляции должна быть достигнута амплитуда запаздывания $\Gamma_м$. С помощью (14.2.4) выразим $\Gamma_м$ через амплитуду модулирующего напряжения $U_м = (E_z)_м l$ и, вернувшись затем к (14.6.1), получим, что мощность $U_м^2/2R_L$, требуемая для достижения величины $\Gamma_м$, связана с полосой частот модуляции $\Delta\nu$ соотношением

$$\mathcal{P} = \Gamma_м^2 \lambda^2 A\varepsilon\Delta\nu/(4\pi l n_0^6 r_{63}^2), \qquad (14.6.2)$$

в котором l — длина оптического пути в кристалле; A — площадь сечения кристалла, перпендикулярного l; ε — диэлектрическая постоянная на частоте модуляции ω_0.

Ограничения на частоту электрооптической модуляции, накладываемые временем прохода света через кристалл. Согласно (14.2.4) запаздывание в электрооптическом кристалле, обусловленное полем, может быть записано в виде

$$\Gamma = aEl, \qquad (14.6.3)$$

где $a = \omega n_0^3 r_{63}/C$; l — длина оптического пути в кристалле. Если поле E заметно меняется в течение времени прохода $\tau_d = nl/C$ света через кристалл[1)], то необходимо заменить (14.6.3) на

$$\Gamma(t) = a\int_0^l E(t')\,dz = \frac{ac}{n}\int_{t-\tau_d}^{t} E(t')\,dt', \qquad (14.6.4)$$

где c — скорость света в вакууме; $E(t')$ — мгновенное значение модулирующего поля. Пределы интегрирования по времени взяты из тех соображений, что волновой фронт, выходящий из кристалла

[1)] Поскольку $r_{63}E_z \ll n_0^{-2}$, то $n \approx n_0$ — *Прим. пер.*

в момент времени t, входил в кристалл в момент $t - \tau_d$. Предположим также, что в данный момент времени поле $E(t)$ имеет одинаковую величину во всем кристалле.

Взяв $E(t')$ в виде синусоиды $E(t') = E_м \exp(i\omega_м t')$, получим из (14.6.4)

$$\Gamma(t) = \frac{ac}{n} E_м \int_{t-\tau_d}^{t} \exp(i\omega_м t')dt' =$$

$$= \Gamma_0 \left(\frac{1 - \exp(i\omega_м \tau_d)}{i\omega_м \tau_d} \right) \exp(i\omega_м t), \qquad (14.6.5)$$

где $\Gamma_0 = (ac/n)\,\tau_d E_м$ — амплитудное значение разности фаз, которое получается при $\omega_м \tau_d \ll 1$. Фактор

$$r = \frac{1 - \exp(i\omega_м \tau_d)}{i\omega_м \tau_d} \qquad (14.6.6)$$

определяет уменьшение амплитуды запаздывания, обсуловленное конечным временем прохода. Значение $r = 1$ достигается при $\omega_м \tau_d \ll 1$, т. е. время прохода должно быть меньше самого короткого периода модуляции. График зависимости фактора r от $(\omega_м \tau_d)$ представлен на рис. 14.11. Если, например, максимальная частота модуляции удовлетворяет условию $\omega_м \tau_d = \pi/2$ (такой выбор соответствует на рис. 14.11 $r = 0{,}9$), то в силу $\tau_d = ln/c$

$$(\nu_м)_{max} = c/4ln. \qquad (14.6.7)$$

Для кристалла KDP ($n \approx 1{,}5$) длиной $l = 1$ см, $(\nu_м)_{max} = 5 \cdot 10^9$ Гц.

Модуляторы бегущей волны. Одним из способов, позволяющих, в принципе, обойти ограничение, связанное с конечным временем прохода света через кристалл, является использование модулирующего напряжения в виде бегущей волны [7] (см. рис. 14.12). Если фазовые скорости оптического и модулирующего полей равны, то световая волна, распространяясь в электрооптическом кристал-

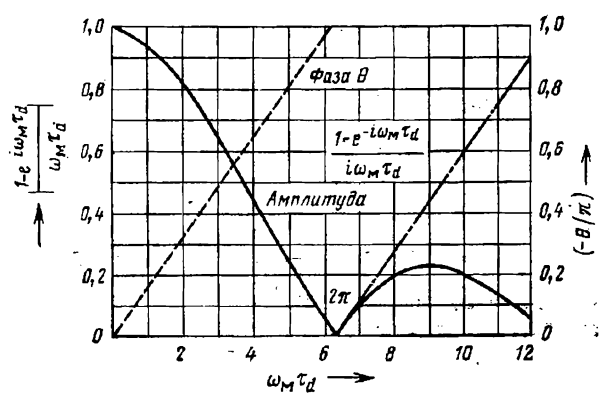


Рис. 14.11. Зависимости фазы и амплитуды коэффициента $r = (1 - \exp i\omega_м\tau_d)/i\omega_м\tau_d$ от $\omega_м\tau_d$

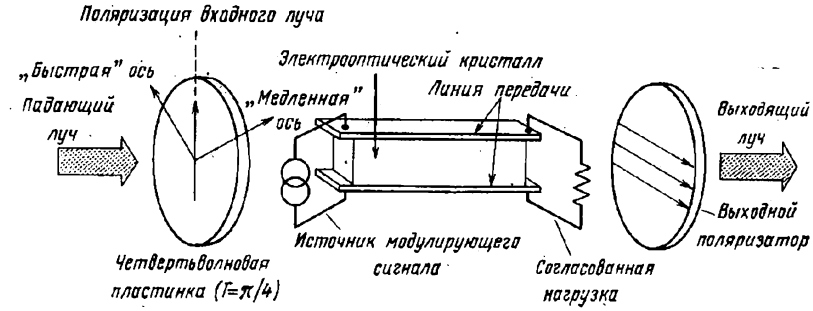


Рис. 14.12. Электрооптический модулятор бегущей волны

ле, будет подвергаться в каждый момент времени действию того же мгновенного электрического поля, которое встретило волну на входе в кристалл, так как модулирующее поле распространяется («бежит») вдоль кристалла. Модуляторы бегущей волны работают, как правило, по поперечной схеме, так как бегущие радиочастотные поля имеют преимущественно поперечную структуру.

Рассмотрим волновой фронт, который входит в кристалл ($z = 0$) в момент времени t. Координата z этого волнового фронта в более поздний момент времени t' равна

$$z(t') = c\,(t' - t)/n. \tag{14.6.8}$$

Разность фаз, достигаемая в этой точке:

$$\Gamma(t) = \frac{ac}{n} \int_{t}^{t+\tau_d} E\,[t',\, z\,(t')]\,at' \tag{14.6.9}$$

аналогична (14.6.4). Здесь $E\,[t',\, z\,(t')]$ — мгновенное значение модулирующего поля, которое «ощущает» наблюдатель, перемещающийся вместе с волной.

Взяв модулирующее поле в виде $E\,(t',\, z) = E_м \exp\,[i\,(\omega_м t' - k_м z)]$ и используя (14.6.8), получим

$$E\,[t',\, z\,(t')] = E_м \exp\left\{i\left[\omega_м t' - k_м \frac{c}{n}(t' - t)\right]\right\}. \tag{14.6.10}$$

Учитывая, что $k_м = \omega_м/c_м$, где $c_м$ — фазовая скорость модулирующего поля, подставим (14.6.10) в (14.6.9) и выполним интегрирование. В результате получим

$$\Gamma(t) = \Gamma_0\, e^{i\omega_м t}\, \frac{\exp\{i\,[\omega_м \tau_d\,(1 - c/nc_м)]\} - 1}{i\omega_м \tau_d\,(1 - c/nc_м)}, \tag{14.6.11}$$

где $\Gamma_0 = alE_м = a\,(c/n)\,\tau_d E_м$ — разность фаз, которая была бы достигнута в случае стационарного поля $E_м$. Фактор снижения

$$r = \frac{\exp\{i[\omega_м \tau_d(1 - c/nc_м)]\} - 1}{i\omega_м \tau_d\,(1 - c/nc_м)} \tag{14.6.12}$$

отличается от (14.6.6) лишь заменой τ_d на $\tau_d\,(1 - c/nc_м)$. Если обе фазовые скорости совпадают $c/n = c_м$, то $r = 1$ и максимально возможная разность фаз достижима вне зависимости от длины кристалла. Считая, что $\omega_м\tau_d(1 - c/nc_м) = \pi/2$, получим максимальное значение частоты модуляции

$$(\nu_м)_{max} = \frac{c}{4nl\,(1 - c/nc_м)}. \qquad (14.6.13)$$

Сравнение (14.6.7) с (14.6.13) показывает, что в последнем случае максимальная (граничная) частота возрастает в $(1 - c/nc_м)^{-1}$ раз или во столько же раз увеличивается полезная длина кристалла. Проблеме создания электрооптических модуляторов бегущей волны посвящены работы [8—10].

14.7. Электрооптическое отклонение луча

Электрооптический эффект может быть также использован для отклонения светового пучка [11, 12]. Действие дефлектора (элемента, отклоняющего световой пучок) поясняет рис. 14.13. Предположим, что волна падает на кристалл, в котором оптическая длина пути зависит от поперечной координаты x. Это будет иметь место в случае, когда скорость распространения (или показатель преломления) зависит от x (рис. 14.13). Задав показатель преломления в виде линейной функции x, получим, что для верхнего луча A показатель преломления равен $n + \Delta n$. Следовательно, время распространения луча A через кристалл

$$t_A = l\,(n + \Delta n)\,c.$$

Для нижнего луча B показатель преломления равен n и время прохода луча через кристалл

$$t_B = ln/c.$$

Различие времен прохода лучей через кристалл приводит к отставанию луча A относительно B на величину

$$\Delta y = c\,(t_A - t_B)/n = l\Delta n/n,$$

которой соответствует отклонению направления распространения пучка непосредственно перед выходом из кристалла на угол

$$\theta' = -\frac{\Delta y}{D} = -\frac{l\Delta n}{Dn} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}. \qquad (14.7.1)$$

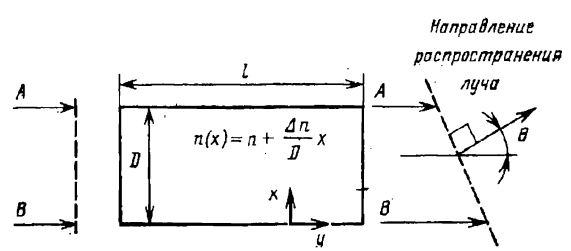


Рис. 14.13. Схема дефлектора светового луча.

Показатель преломления изменяется в направлении x по линейному закону $n(x) = n_0 + ax$. Луч B «опережает» луч A при прохождении через кристалл, что приводит к повороту фронта волны на угол θ

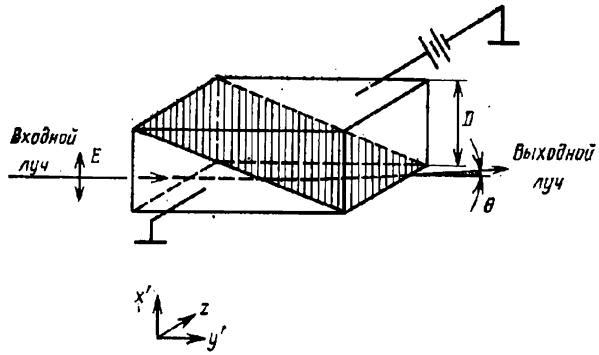


Рис. 14.14. Дефлектор на сдвоенных призмах из KDP. Верхняя и нижняя призмы имеют противоположно направленные оси z. Отклоняющее поле приложено вдоль z

В последнем равенстве $\Delta n/D$ заменено на dn/dx. Угол отклонения θ пучка после выхода из кристалла, измеряемый относительно горизонтальной оси, связан с углом θ' законом преломления Снеллиуса:

$$\sin\theta/\sin\theta' = n.$$

Используя (14.7.1) и полагая $\sin\theta \approx \theta \ll 1$, получим

$$\theta = \theta_n' = -l\Delta n/D = -l dn/dx. \qquad (14.7.2)$$

Простая схема дефлектора с использованием кристалла KDP показана на рис. 14.14. Дефлектор состоит из двух KDP-призм, ребра которых ориентированы вдоль осей[1] x', y' и z. Оси z этих призм ориентированы навстречу друг другу. Электрическое поле направлено вдоль z; свет, поляризованный вдоль x', распространяется в направлении y'. В этом случае показатель преломления для луча A, целиком лежащего в верхней призме, дается выражением (14.1.11)

$$n_A = n_0 - r_{63} E_z n_0^3/2.$$

Луч B лежит целиком в нижней призме, где электрическое поле имеет обратное направление относительно оси z и поэтому

$$n_B = n_0 + r_{63} E_z n_0^3/2.$$

Подставляя в (14.7.2) значение $\Delta n = n_A - n_B$, находим угол отклонения

$$\theta = n_0^3 r_{63} E_z l/D. \qquad (14.7.3)$$

В соответствии с (6.6.18) каждый пучок в дальней зоне имеет конечный угол расходимости $\theta_{\text{пучка}}$. Ясно, что фундаментальной характеристикой качества дефлектора является не угол отклонения θ, который может быть увеличен с помощью линзы, а параметр N, показывающий, во сколько раз θ превышает $\theta_{\text{пучка}}$. Если бы, например, нужно было сфокусировать выходной пучок, то N

[1] Они являются главными осями эллипсоида показателей при наличии электрического поля, направленного вдоль z.

соответствовало бы числу разрешимых элементов в фокальной плоскости при использовании отклоняющих полей, достигающих величины E_z.

Для того, чтобы вычислить N, предположим, что кристалл помещен в «шейке» гауссова пучка шириной ρ_0. Согласно (6.6.18) угол дифракции в дальней зоне $\theta_{\text{пучка}} = \lambda/\pi n \rho_0$. Такой пучок может проходить через кристалл высотой $D \gtrsim 2\rho_0$. Взяв $n = n_0$ и используя (14.7.3), получим

$$N = 0/\theta_{\text{пучка}} = \pi l n_0^3 r_{63}/(2\lambda). \qquad (14.7.4)$$

Из (14.7.4) непосредственно следует, что электрическое поле, вызывающее разность фаз (на расстоянии l) $\Gamma = \pi$, приводит к $N \approx 1$. Важно отметить, что электрооптическое запирание пучка, которое в соответствии с (14.3.4) достигается при $\Gamma = \pi$, эквивалентно отклонению на диаметр пучка.

14.8. Фотоупругость

Линейный фотоупругий эффект заключается в том, что оптические характеристики непроводящих сред изменяются пропорционально механическим деформациям. Так же, как и электрооптический эффект, см., в частности, (14.1.3), фотоупругость характеризуется тензором четвертого ранга p_{idkl}, именуемым тензором фотоупругости, причем имеет место соотношение

$$\Delta (1/n^2)_{id} = p_{idkl} S_{kl}, \qquad (14.8.1)$$

где $(1/n^2)_{id}$ — константа эллипсоида показателей (14.1.2); S_{kl} — компонента деформаций [13],

$$S_{kl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k(\mathbf{r})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l(\mathbf{r})}{\partial x_k}\right],$$

а $u_k(\mathbf{r})$ — проекция на направление k (k, l = 1, 2, 3) отклонения точки $\mathbf{r}$ от равновесия в кристалле.

Воздействие деформаций на распространение света можно описать, используя формализм, развитый в § 14.1—14.3. Однако более удобен другой, формально эквивалентный путь. Получим сначала связь постоянных $(1/n^2)_{id}$ эллипсоида показателей (14.8.1) с диэлектрическим тензором ε_{ij} (5.2.1). Начнем с уравнения для поверхности постоянной энергии (5.2.6) в **D**-пространстве

$$2w_e = D_i E_i = \varepsilon_{ij} E_i E_j. \qquad (14.8.2)$$

Теперь нужно заменить компоненты электрического поля E_i в (14.8.2) на D_i. Воспользуемся соотношениями

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad E_i = g_{ij} D_j, \qquad (14.8.3)$$

где $g = \varepsilon^{-1}$ — матрица, обратная ε. Используя правила для нахождения элементов обратной матрицы и то, что ε_{ij} $(i \neq j) \ll \varepsilon_{ii}$ и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, получим

$$g_{ij} = \varepsilon_{ii}^{-1},\ g_{\substack{ij \\ i \neq j}} \approx -\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ii}\,\varepsilon_{jj}} = -\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ii}\,\varepsilon_{jj}}. \qquad (14.8.4)$$

Введя обозначение $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0$ и используя (14.8.4), можно переписать (14.8.2) в виде

$$2w_e\varepsilon_0 = \frac{D_x^2}{\varepsilon'_{11}} + \frac{D_y^2}{\varepsilon'_{22}} + \frac{D_z^2}{\varepsilon'_{33}} - 2\frac{\varepsilon'_{32}}{\varepsilon'_{33}\,\varepsilon'_{22}} D_z D_y -$$

$$- 2\frac{\varepsilon'_{31}}{\varepsilon'_{33}\,\varepsilon'_{11}} D_z D_x - 2\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{22}\,\varepsilon'_{11}} D_x D_y.$$

Подставляя, как и в § 5.3, $\mathbf{D} = \sqrt{2w_e\varepsilon_0}\mathbf{r}$ в последнее уравнение, приходим к

$$\frac{x^2}{\varepsilon'_{11}} + \frac{y^2}{\varepsilon'_{22}} + \frac{z^2}{\varepsilon'_{33}} - 2\frac{\varepsilon'_{32}}{\varepsilon'_{33}\,\varepsilon'_{22}} zy - 2\frac{\varepsilon'_{31}}{\varepsilon'_{33}\,\varepsilon'_{11}} zx -$$

$$- 2\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{22}\,\varepsilon'_{11}} xy = 1. \qquad (14.8.5)$$

Это и есть уравнение эллипсоида показателей преломления. Если первоначальный выбор системы координат x, y, z таков, что $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то недиагональные члены в (14.8.5) обусловлены наличием возмущающих полей (механических деформаций, электрических полей и т. д.). Приравняв соответствующие члены (14.8.5) членам уравнения (14.1.2), получим

$$(1/n^2)_{ij} = -\varepsilon'_{ij}/\varepsilon'_i\,\varepsilon'_j,\ (1/n^2)_{ii} = 1/\varepsilon'_i, \qquad (14.8.6)$$

где $\varepsilon'_i = \varepsilon'_{ii}$. Равенства (14.8.6) связывают формализм эллипсоида показателей и описание с помощью диэлектрического тензора ε_{ij}.

Возвращаясь к эффекту фотоупругости, перепишем (14.8.1) с учетом (14.8.6)

$$\Delta\varepsilon'_{id} = -\varepsilon'_i\,\varepsilon'_d\,p_{idkl}\,S_{kl}. \qquad (14.8.7)$$

Соотношение (14.8.7) формально эквивалентно (14.8.1) при описании эффекта фотоупругости.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда оптическое поле E и поле деформаций S_{kl} присутствуют в кристалле одновременно. Из (14.8.3) имеем

$$D_i = \varepsilon_{id}E_d = \varepsilon_0 E_i + P_i.$$

Разрешая это равенство относительно P_i:

$$P_i = \varepsilon_{id}\,E_d - \varepsilon_0\,E_i = (\varepsilon_{id} - \varepsilon_0\,\delta_{id})\,E_d,$$

получаем выражение для поляризации, наведенной деформацией

$$\Delta P_i = \Delta\varepsilon_{id} E_d = \varepsilon_0 \Delta\varepsilon'_{id} E_d.$$

Подставляя (14.8.7) в последнее выражение, получим

$$\Delta P_i = -(\varepsilon_i \varepsilon_d/\varepsilon_0)\, p_{idkl} S_{kl} E_d. \qquad (14.8.8)$$

Выражение (14.8.8) показывает, что механические деформации S_{kl} и компонента поля E_d наводят поляризацию, компонента которой пропорциональна произведению E_d, S_{kl}.

Таким образом, можно рассматривать фотоупругость как нелинейный эффект, так как тензор фотоупругости связывает компоненту поляризационного поля (P_i) с произведением двух других полей.

14.9. Брэгговская дифракция света на акустических волнах

Пусть в некоторой прозрачной среде (жидкость, кристалл) распространяется акустическая волна. На эту среду падает пучок света. Часть света дифрагирует в новом направлении, испытывая при этом сдвиг по частоте, равный частоте акустической волны [14, 16, 17]. Этот сдвиг может быть как положительным, так и отрицательным. Таким образом, взаимодействуют между собой два оптических поля с частотами ω_i и $\omega_d = \omega_i \pm \omega_s$ и акустическое поле частоты ω_s.

Будем считать среду неограниченной, игнорируя вопрос о том, как поле вводится в среду и как выводится из нее. Этот вопрос легко выяснить, зная общее решение и граничные условия.

Возьмем волновое уравнение для электромагнитного поля, распространяющегося в среде, в которой одновременно присутствует акустическое поле

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta \mathbf{P}), \qquad (14.9.1)$$

где $\Delta\mathbf{P}$ — изменение поляризации, вызванное звуковой волной и определяемое выражением (14.8.8). Пусть электромагнитное поле состоит из двух плоских волн: одна из них, поляризованная вдоль i, распространяется в направлении $\mathbf{k}_i$; вторая волна, поляризованная вдоль d, распространяется в направлении $\mathbf{k}_d$, причем в общем случае, $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_d$ не параллельны:

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{r}, t) &= {}^1/_2 E_i(r_i) \exp[i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})] + \text{к. с.}, \\ E_d(\mathbf{r}, t) &= {}^1/_2 E_d(r_d) \exp[i(\omega_d t - \mathbf{k}_d \mathbf{r})] + \text{к. с.}. \end{aligned} \qquad (14.9.2)$$

Здесь r_i и r_d — расстояния, измеряемые вдоль направлений $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_d$ соответственно. Продифференцировав дважды (14.9.2), приходим к соотношению

$$\nabla^2 E_j(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{1}{2}\left(k_i^2 E_i + 2ik_i \frac{dE_i}{dr_i}\right) \exp[i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})] + \text{к.с.}, \qquad (14.9.3)$$

где $k_i = \omega_i \sqrt{\mu\varepsilon_i}$. Предположим, что $\nabla^2 E_i \ll k_i \frac{dE_i}{dr_i}$. Далее подставим (14.9.3) в левую часть (14.9.1). В правую часть (14.9.1) входит величина

$$\Delta P_i(\mathbf{r}, t) = -{}^1/_2 \varepsilon_0 \varepsilon_i' \varepsilon_d' p_{idkl} S_{kl}(\mathbf{r}, t) E_d(r_d) \{\exp[i(\omega_d t - \mathbf{k}_d \mathbf{r})] + \text{к. с.}\},$$

совпадающая с (14.8.8). Поле деформаций $S_{kl}(\mathbf{r}, t)$ возьмем в виде акустической волны частоты ω_s, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}_s$:

$$S_{kl}(\mathbf{r}, t) = \frac{S_{kl}}{2} \exp[i(\omega_s t - \mathbf{k}_S \mathbf{r})] + \text{к .с.} \qquad (14.9.4)$$

Подставив (14.9.4) в последнее выражение для ΔP_i, получим

$$\Delta P_i(\mathbf{r}, t) = -{}^1/_2 \varepsilon_0 \varepsilon_i' \varepsilon_d' p_{idkl} E_d(r_d) \{\exp[i(\omega_d t - \mathbf{k}_d \mathbf{r})] + \text{к. с.}\} S_{kl} \{\exp[i(\omega_s t - \mathbf{k}_S \mathbf{r})] + \text{к. с.}\}. \qquad (14.9.5)$$

При синхронном возбуждении поля E_i член, стоящий в правой части (14.9.1), должен содержать компоненту, меняющуюся по закону $\exp[i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})]$. В противном случае вклад от ΔP_i будет локализован (в пространстве и во времени) и при усреднении во времени или в пространстве обратится в нуль.

Эти требования могут быть удовлетворены согласно (14.9.5), если

$$\omega_i = \omega_d \pm \omega_s, \qquad (14.9.6а)$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_d \pm \mathbf{k}_s. \qquad (14.9.6б)$$

Оставим для начала в равенствах (14.9.6) только знак (+). Подставляя далее резонансный член из (14.9.5) в (14.9.1) и используя (14.9.3) и (14.9.6), получим

$$\frac{dE_i}{dr_i} = \frac{i}{4} \sqrt{\mu\varepsilon_0}\, \varepsilon_i' \varepsilon_d' p_{idkl} S_{kl} E_d \exp[-i(\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)\mathbf{r}]. \qquad (14.9.7)$$

Взяв $\varepsilon_i' \approx \varepsilon_d' \equiv n^2$ и учитывая, что $\omega_i \sqrt{\mu\varepsilon_0} = 2\pi/\lambda$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dE_i}{dr_i} = i\eta_{id} E_d \exp[+i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_d)\mathbf{r}]. \qquad (14.9.8а)$$

Аналогичный вид имеет уравнение для E_d

$$\frac{dE_d}{dr_d} = i\eta_{di} E_i \exp[+i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_d)\mathbf{r}]. \qquad (14.9.8б)$$

Добавим к этому соотношение

$$\eta_{di} = \eta_{id} \approx (\pi n^3/2\lambda) p_{idkl} S_{kl},\ \lambda_i \approx \lambda_d \equiv \lambda. \qquad (14.9.9)$$

Теперь становится понятной необходимость условий фазового синхронизма

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_d. \qquad (14.9.10)$$

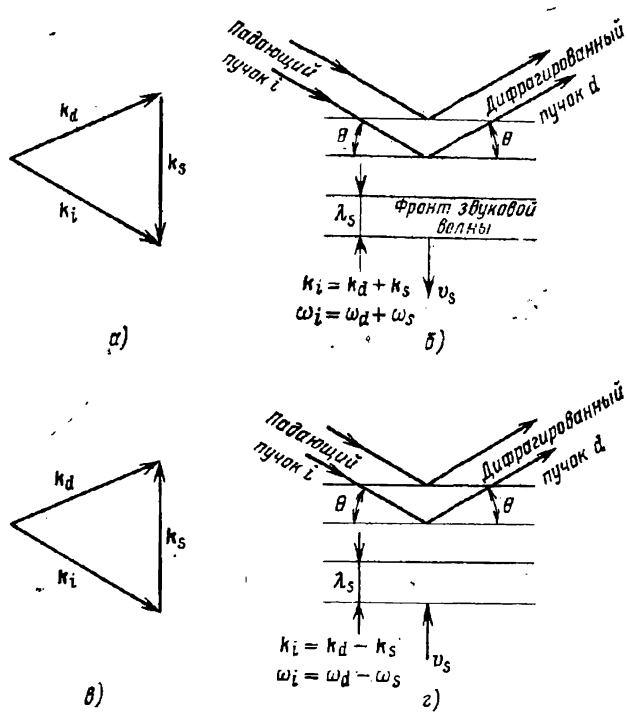


Рис. 14.15. Векторные диаграммы и соответствующие им картины брэгговской дифракции света на убегающей (*а, б*) и набегающей (*в, г*) звуковых волнах

Если (14.9.10) не удовлетворяется, то составляющие поля E_i в E_d (и наоборот), как видно из (14.9.8), периодически с пространственным периодом

$$l_c = \pi/|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_d|$$

меняют знак. На расстояниях $l > l_c$ взаимодействие не накапливается. Расстояние l_c называют когерентной длиной. Более подходящим представляется термин «период биений».

Использование знака (+) в (14.9.6) приводит к условию для частот

$$\omega_i = \omega_s + \omega_d. \qquad (14.9.11)$$

Взаимодействие в этом случае можно рассмотреть по-другому. Фотон с энергией $\hbar\omega_i$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}_i$ падает на звуковую волну, имеющую частоту ω_s и импульс $\hbar\mathbf{k}_s$. Падающий фронт аннигилирует, рождая взамен фотон ω_d, $\mathbf{k}_d$ и фотон ω_s, $\mathbf{k}_s$. Таким образом, (14.9.10) представляет собой закон сохранения импульса, а (14.9.11) — закон сохранения энергии.

Изложенная ситуация изображена на рис. 14.15, где для простоты считается $n_i = n_d$. Поскольку $\omega_s \ll \omega_i$, в этом случае $k_i \approx \approx k_d = k$. Из векторного треугольника рис. 14.15, *а* получаем

$k_s = 2k \sin 0$, а с учетом $k_s = 2\pi/\lambda_s$ и $k = 2\pi n/\lambda$ последнее выражение эквивалентно

$$2\lambda_s \sin\theta = \lambda/n. \qquad (14.9.12)$$

Это условие идентично условию Брэгга первого порядка ($m = 1$) [13, 18] для рассеяния рентгеновских лучей в кристаллах

$$2d \sin\theta = m\lambda/n, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Периодический характер звуковой волны играет ту же роль, что и регулярность атомных плоскостей, расстояние между которыми d. Отсутствие в (14.9.12) углов дифракции более высокого порядка ($m = 2, 3, \ldots$) связано с синусоидальностью звуковых волн. Атомные же плоскости локализованы, и это приводит к дифракции более высокого порядка (этим вопросам посвящена задача 14.8).

Другой особенностью дифракции рентгеновских лучей является отсутствие частотного сдвига. Это вызвано неподвижностью атомных слоев, тогда как акустическая «решетка» движется со скоростью v_s. Действительно, если вычислить доплеровский сдвиг частоты волны ω_i, падающей под углом θ, удовлетворяющим условию (14.9.12), на плоскость, движущуюся со скоростью v_s, то получим $\omega_d = \omega_i + \omega_s$.

Вернемся к решению системы уравнений (14.9.8). Пусть угол падения θ выбран так, что (14.9.10) удовлетворяется. При этом система уравнений сводится к

$$\frac{dE_i}{dr_i} = i\eta E_d, \quad \frac{dE_d}{dr_d} = i\eta E_i, \qquad (14.9.13)$$

где $\eta_{id} = \eta_{di} = \eta$, поскольку $\omega_i \approx \omega_d$.

Уравнения (14.9.13) являются основным результатом параграфа. Кажущаяся трудность решения этой системы — наличие координат r_i и r_d, откладываемых вдоль различных направлений $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_d$. Эту трудность можно преодолеть, перейдя к координате ζ вдоль биссектрисы угла, образованного, как показано на рис. 14.16, векторами $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_d$. Определяя величины r_d и r_i как проекции ζ на направления $\mathbf{k}_d$ и $\mathbf{k}_i$, запишем

$$r_i = \zeta\cos\theta, \quad r_d = \zeta\cos\theta. \qquad (14.9.14)$$

В итоге уравнения (14.9.13) принимают вид

$$\frac{dE_i}{d\zeta} = \frac{dE_i}{dr_i}\cos\theta = i\eta E_d\cos\theta, \quad \frac{dE_d}{d\zeta} = i\eta E_i\cos\theta \qquad (14.9.15)$$

и имеют следующие решения:

$$E_i(\zeta) = E_i(0)\cos(\eta\zeta\cos\theta) + iE_d(0)\sin(\eta\zeta\cos\theta),$$
$$E_d(\zeta) = E_d(0)\cos(\eta\zeta\cos\theta) + iE_i(0)\sin(\eta\zeta\cos\theta).$$

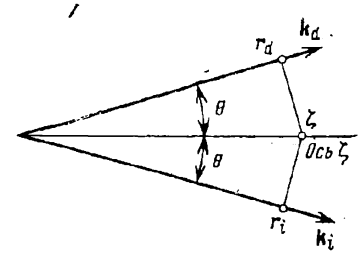


Рис. 14.16. Направления и углы, входящие в уравнение (14.9.15)

Имея в виду указанную выше связь между ζ, r_i и r_d, можно переписать решение в виде

$$E_i(r_i) = E_i(0)\cos(\eta r_i) + iE_d(0)\sin(\eta r_i),$$
$$E_d(r_d) = E_d(0)\cos(\eta r_d) + iE_i(0)\sin(\eta r_d). \qquad (14.9.16)$$

Описания взаимодействия двух полей с частотами ω_i и ω_d произвольными фазами и амплитудами ($E_i(0)$ и $E_d(0)$-комплексные величины) при выполнении брэгговского условия (14.9.10) и условия синхронизма ($\omega_i = \omega_s + \omega_d$ являются достаточно общими. В частном случае, когда $E_d(0) = 0$, имеем

$$E_i(r_i) = E_i(0)\cos(\eta r_i),\ E_d(r_d) = iE_i(0)\sin(\eta r_d) \qquad (14.9.17)$$

и, следовательно,

$$|E_i(r_i)|^2 + |E_d(r_d = r_i)|^2 = |E_i(0)|^2, \qquad (14.9.18)$$

т. е. суммарная мощность, переносимая обеими волнами, сохраняется [20][1]).

Если длина взаимодействия пучков такова, что $\eta r_i = \eta r_d = \pi/2$, то вся мощность падающего пучка переходит в дифрагировавший пучок. Так как этот процесс имеет большое число технологических и научных приложений, имеет смысл сделать оценку эффективности дифракции в известных акустических средах при достижимых уровнях мощности акустической волны.

Доля энергии падающего пучка, которая преобразуется на расстоянии l в дифрагированный пучок, дается, с учетом (14.9.17), выражением

$$\frac{I_{\text{дифр}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{E^2_{\text{дифр}}}{E_i(0)} = \sin^2(\eta l) = \sin^2\left(\frac{\pi n^3}{2\lambda} pSl\right), \qquad (14.9.19)$$

где

$$pS \equiv p_{idkl} S_{kl}. \qquad (14.9.20)$$

[1]) Более строго, сохраняется не суммарная мощность, а полное число фотонов с частотами ω_i и ω_d. Но так как $\omega_i \approx \omega_d$ (с точностью до коэффициента $\omega_s/\omega_i \leqslant 10^{-6}$), можно говорить о сохранении суммарной мощности. Чтобы убедиться в несохранении мощности в общем случае, необходимо использовать при решении системы (14.9.8) вместо $\eta_{id} = \eta_{di} \equiv \eta$ (как это было ранее) соотношение $\eta_{di} = (\omega_d/\omega_i)\,\eta_{id}$.

Преобразуем (14.9.19) к виду, наиболее удобному для практических приложений. На практике нам часто известна интенсивность акустической волны $I_{\text{акуст}}$ (Вт · м^2). Амплитуда деформации S связана с $I_{\text{акуст}}$ соотношением[1]

$$S = \sqrt{2I_{\text{акуст}}/(\rho v_s^3)}, \qquad (14.9.21)$$

где v_s — скорость звука в среде; ρ — плотность (кг/м^3). Комбинируя (14.9.19) и (14.9.21), получим

$$\frac{I_{\text{дифр}}}{I_{\text{пад}}} = \sin^2\left(\frac{\pi l}{\sqrt{2}\,\lambda}\sqrt{\frac{n^6 p^2}{\rho v_s^3} I_{\text{акуст}}}\right), \qquad (14.9.22)$$

и используя следующее определение эффективности фотоупругого материала

$$M \equiv n^6 p^2/(\rho v_s^3), \qquad (14.9.23$$

перепишем (14.9.22)

$$\frac{I_{\text{дифр}}}{I_{\text{пад}}} = \sin^2\left(\frac{\pi l}{\sqrt{2}\,\lambda}\sqrt{M I_{\text{акуст}}}\right). \qquad (14.9.24)$$

Пример.

Дифракция на акустических волнах в воде. Зададим $\lambda = 0{,}6328$ мкм, а остальные параметры возьмем из табл. 14.4: $n = 1{,}33$; $p = 0{,}31$; $v_s = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с; $S = 1000$ кг/м^3. Из равенства (14.9.24) получим

$$\left(\frac{I_{\text{дифр}}}{I_{\text{пад}}}\right)_{\substack{H_2O \\ \lambda = 0{,}6328\text{мкм}}} = \sin^2(1{,}4 l \sqrt{I_{\text{акуст}}}). \qquad (14.9.25)$$

Два последних равенства можно скомбинировать для получения удобной рабочей формулы и дифракционной эффективности других материалов и других длин волн

$$\frac{I_{\text{дифр}}}{I_{\text{пад}}} = \sin^2\left(1{,}4\,\frac{0{,}6328}{\lambda_{\text{пад}}} l \sqrt{M_\omega I_{\text{акуст}}}\right), \qquad (14.9.26)$$

где $M_\omega = M_{\text{мат}}/M_{\text{H}_2\text{O}}$ — отношение эффективности произвольного фотоупругого материала к эффективности воды. Величины M и M_ω для некоторых материалов представлены в табл. 14.4 и 14.5.

---

[1] Потенциальная энергия единицы объема, обусловленная полем деформаций S, равна $TS^2(t)/2$, где T — модуль всестороннего сжатия. Усредненная по времени энергия единицы объема, связанная с распространением звуковой волны с амплитудой деформаций S, есть сумма плотностей средней потенциальной и средней кинетической энергий $\mathscr{E}/V = T\overline{S^2}(t) = TS^2/2$, так как $\overline{S^2}(t) = S^2/2$ (черта означает усреднение по времени). Используя связь $I_{\text{акуст}} = v_s\mathscr{E}/V$ и $T/\rho = v_s^2$, где ρ — плотность, а v_s — скорость звука, получим $I_{\text{акуст}} = \rho v_s^3 S^2/2$ или $S = \sqrt{2I_{\text{акуст}}/(\rho v_s^3)}$, т. е. получаем выражение (14.9.21).

Таблица 14.4

Параметры материалов, часто используемых для получения дифракции света на звуке

Материал	ρ, мг/м³	v_s, км/с	n	p	M_ω
Вода	1,0	1,5	1,33	0,31	1,0
Сверхплотный флинт	6,3	3,1	1,92	0,25	0,12
Плавленый кварц (SiO_2)	2,2	5,97	1,46	0,20	0,006
Полистирол	1,06	2,35	1,59	0,31	0,8
KRS-5	7,4	2,11	2,60	0,21	1,6
Ниобат лития ($LiNbO_3$)	4,7	7,40	2,25	0,15	0,012
Флюорид лития (LiF)	2,6	6,00	1,39	0,13	0,001
Рутил (TiO_2)	4,26	10,30	2,60	0,05	0,001
Сапфир (Al_2O_3)	4,0	11,00	1,76	0,17	0,001
Молибдат свинца ($PbMO_4$)	6,95	3,75	2,30	0,28	0,22
Йодовая кислота (HIO_3)	4,63	2,44	1,90	0,41	0,5
Двуокись теллура (TeO_2) (медленная поперечная волна)	5,99	0,617	2,35	0,09	5,0

Примечание: ρ — плотность, v_s — скорость звука, n — показатель преломления, p — константа фотоупругости, M_ω — относительная дифракционная эффективность фотоупругого материала, введенная в (14.9.26).

Согласно (14.9.24) при малой дифракционной эффективности материала интенсивность дифрагировавшего света пропорциональна интенсивности акустической волны. Это обстоятельство используется для акустической модуляции оптического излучения. Содержащий информацию сигнал модулирует интенсивность акустических волн. Эта модуляция затем преобразуется, в соответствии с (14.9.22), в модуляцию интенсивности дифрагировавшего пучка [20].

Пример.

Рассеяние в $PbMoO_4$. Определим долю света ($\lambda = 0{,}06328$ мкм), которая испытывает брэгговскую дифракцию на акустической волне в $PbMO_4$ при следующих условиях: акустическая мощность = 1 Вт; поперечные сечения акустического пучка = 1 × 1 мм; l — оптический путь в акустическом пучке = 1 мм; M_ω (из табл. 14.4) = 0,22.

Подставив эти данные в (14.9.26), получим

$$I_{\text{дифр}}/I_{\text{пад}} \approx 37\ \%.$$

14.10. Отклонение света звуком

Одним из наиболее важных применений акустического взаимодействия является отклонение оптического пучка. Оно может быть осуществлено изменением частоты звуковой волны вблизи брэгговского значения. Этот способ поясняют рис. 14.17 и 14.18. Предположим, что условия Брэгга (14.9.10) удовлетворены. Этой ситуации соответствует замкнутая векторная диаграмма (см. рис. 14.15, *а*).

Таблица 14.5

Некоторые характеристики материалов, применяемых в акустооптике. $M = n^6 p^2/\rho v_s^3$ в соответствии с (14.9.23) приводится в единицах СИ [19]

Материал	λ, мкм	n	ρ, г/см³	Поляризация и направление акустической волны	v_s, 10^5 см/с	Поляризация и направление оптического излучения[1])	$M = n^6 p^2/\rho v_s^3$, 10^{-15}
Плавленый кварц	0,63	1,46	2,2	Продольная	5,95	$\perp$	1,51
Плавленый кварц	0,63			Поперечная	3,76	$\parallel$ или $\perp$	0,467
GaP	0,63	3,31	4,13	Продольная в [110]	6,32	$\parallel$	44,6
GaP	0,63			Поперечная в [100]	4,13	$\parallel$ или $\perp$ в [010]	24,1
GaAs	1,15	3,37	5,34	Продольная в [110]	5,15	$\parallel$	104
GaAs	1,15			Поперечная в [100]	3,32	$\parallel$ или $\perp$ в [010]	46,3
TiO_2	0,63	2,58	4,6	Продольная в [11—20]	7,86	$\perp$ в [001]	3,93
$LiNbO_3$	0,63	2,20	4,7	Продольная в [11—20]	6,57	(b)	6,99
YAG	0,63	1,83	4,2	Продольная в [100]	8,53	$\parallel$	0,012
YAG	0,63			Продольная в [110]	8,60	$\perp$	0,073
YIG	1,15	2,22	5,17	Продольная в [100]	7,21	$\perp$	0,33
$LiTaO_3$	0,63	2,18	7,45	Продольная в [001]	6,19	$\parallel$	1,37
As_2S_3	0,63	2,61	3,20	Продольная	2,6	$\perp$	433
As_2S_3	1,15	2,46		Продольная		$\parallel$	347
SF—4	0,63	1,616	3,59	Продольная	3,63	$\perp$	4,51
β—ZnS	0,63	2,35	4,10	Продольная в [110]	5,51	$\parallel$ в [001]	3,41
β—ZnS	0,63			Поперечная в [110]	2,165	$\parallel$ или $\perp$ в [001]	0,57
$\alpha - Al_2O_3$	0,63	1,76	4,0	Продольная в [001]	11,15	$\parallel$ в [11—20]	0,34
CdS	0,63	2,44	4,82	Продольная в [11—20]	4,17	$\parallel$	12,1
ADP	0,63	1,58	1,803	Продольная в [100]	6,15	$\parallel$ в [010]	2,78
ADP	0,63			Поперечная в [100]	1,83	$\parallel$ или $\perp$ в [001]	6,43
KDP	0,63	1,51	2,34	Продольная в [100]	5,50	$\parallel$ в [010]	1,91
KDP	0,63			Поперечная в [100]		$\parallel$ или $\perp$ в [001]	3,83
H_2O	0,63	1,33	1,0	Продольная	1,5		160
Te	10,6	4,8	6,24	Продольная в [11—20]	2,2	$\parallel$ в [001]	4400
$PbMoO_4$ [14]	0,63	2,4		$\parallel c$	3,75	$\parallel$ или $\perp$	73

[1]) Направление оптического луча в действительности отличается от указанного в таблице на брэгговский угол. Поляризация определяется как параллельная или перпендикулярная по отношению к плоскости рассеяния, образованной k-векторами акустической и оптической волн.

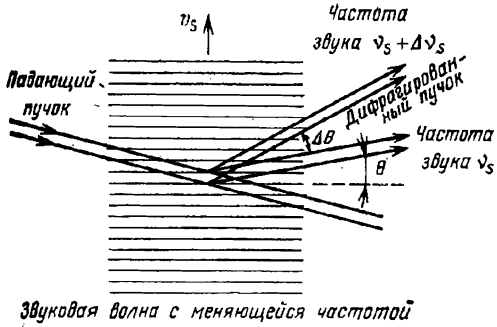


Рис. 14.17. Изменение частоты звуковой волны от ν_s до $\nu_s+\Delta\nu_s$, вызывающее согласно (14.10.1) изменение направления диафрагировавшего пучка на угол $\Delta\theta$

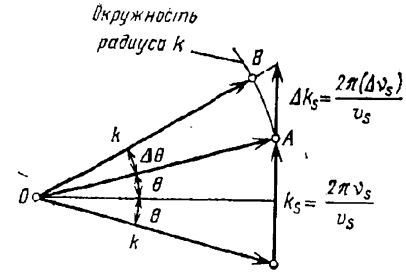


Рис. 14.18. Диаграмма волновых векторов, поясняющая, как изменение частоты звука от ν_s до $\nu_s+\Delta\nu_s$ приводит к изменению направления дифрагировавшего пучка от θ до $\Delta\theta$

Пучок дифрагирует в направлении, образующем с горизонталью угол θ (14.9.12). Теперь пусть частота звуковой волны изменяется от ν_s до $\nu_s + \Delta\nu_s$. Поскольку $k_s = 2\pi\nu_s/v_s$, изменение частоты сопровождается изменением волнового вектора звуковой волны на величину $\Delta k_s = 2\pi(\Delta\nu_s)/v_s$ (рис. 14.18). Поскольку угол падения по-прежнему равен θ и величина волнового вектора $\mathbf{k}_d$ не изменилась [1], то конец вектора лежит на окружности, показанной на рис. 14.18. Теперь нельзя замкнуть диаграмму и, строго говоря, импульс не сохраняется. Пучок будет дифрагировать в направлении OB, которое соответствует наименьшему нарушению закона сохранения импульса [2]. При этом пучок отклоняется от первоначального направления на угол $\Delta 0$. Учитывая, что углы θ и $\Delta\theta$ малы и $k_s = 2\pi\nu_s/v_s$, получаем

$$\Delta 0 = \Delta k_s/k = \lambda\Delta\nu_s/nv_s, \qquad (14.10.1)$$

и, следовательно, угол отклонения пропорционален изменению звуковой частоты.

Как и в случае электрооптического отклонения, нас интересует не столько значение самого отклонения $\Delta\theta$, сколько число разрешимых элементов, т. е. отношение $\Delta\theta$ к угловой расходимости пучка. Если мы возьмем угол дифракционной расходимости порядка

---

[1] Небольшое изменение волнового вектора дифрагировавшего пучка вследствие изменения частоты составляет по порядку величины $\Delta k/k \approx 10^{-7}$. Поэтому им можно пренебречь.

[2] Нарушение закона сохранения импульса эквивалентно гасящей интерференции в дифрагировавшем пучке, поэтому интенсивность пучка будет меньше, чем при выполнении условия Брэгга; когда импульс сохраняется, дифрагировавший пучок достигает максимальной интенсивности вдоль направления, в котором гасящая интерференция минимальна. Оно соответствует направлению, в котором нарушение закона сохранения импульса минимально, что видно из рис. 14.18.

$\lambda/D_{\text{п}}$, где $D_{\text{п}}$ — диаметр пучка, то число разрешимых элементов N составит

$$N = \frac{\Delta\theta}{\theta_{\text{дифр}}} = \frac{\lambda}{nv_s}\,\frac{\Delta\nu_s}{\lambda/nD_{\text{п}}} = \Delta\nu_s\,\frac{D_{\text{п}}}{v_s} = \Delta\nu_s\,\tau, \quad (14.10.2)$$

где $\tau = D_{\text{п}}/v_s$ — время прохождения звуком расстояния, равного диаметру светового пучка.

Пример.

Отклонение пучка. Рассмотрим отклоняющую систему, использующую стекло (флинт). Частота звукового пучка может изменяться от 80 до 120 МГц, так что $\Delta\nu_s = 40$ МГц. Диаметр оптического пучка $D_{\text{п}} = 1$ см. Из табл. 14.4 $v_s = 3{,}1 \cdot 10^5$ см/с, следовательно, $\tau = D_{\text{п}}/v_s = 3{,}23 \cdot 10^{-6}$ с и $N = \Delta\nu_s\tau = 130$.

Заметим, что все результаты были получены при использовании выражений (14.9.6) со знаком (+). Все результаты останутся в силе также, если выбрать знак (—), поэтому

$$\omega_i = \omega_d - \omega_s, \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_s. \quad (14.10.3)$$

Рассеяние, которому отвечают соотношения (14.10.3), отличается от рассмотренного в § 14.9 только тем, что направление распространения звуковой волны заменено на обратное, как это показано на рис. 14.15, *в*, *г*.

14.11. Брэгговское рассеяние в кристаллах с естественным двулучепреломлением

Брэгговское рассеяние, рассмотренное выше, описывалось при помощи векторной диаграммы рис. 14.15, *а*, представляющей собой равнобедренный треугольник. Это является следствием закона сохранения импульса

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_d \pm \mathbf{k}_s \quad (14.11.1)$$

при $k_i \approx k_d = (\omega_d/c)n$. В более общем случае $n_i \neq n_d$ и, следовательно, $k_i \neq k_d$. Относительные направления падающего и дифрагировавшего пучков находятся из векторного треугольника

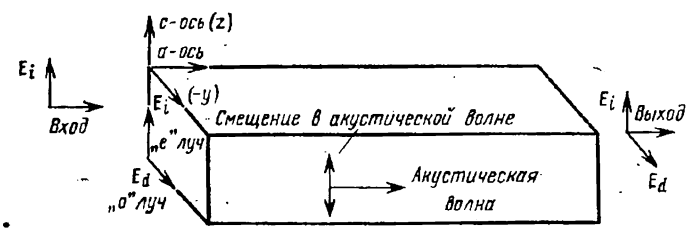


Рис. 14.19. Коллинеарное взаимодействие необыкновенной (поляризованной вдоль z), обыкновенной (поляризованной вдоль y) электромагнитных волн и поперечной акустической волны S_{zx}

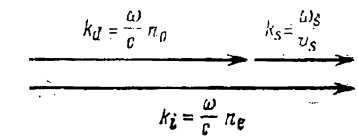


Рис. 14.20. Фазовый синхронизм для коллинеарных волн в двулучепреломляющем кристалле

$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_d \pm \mathbf{k}_s$. При заданных оптической частоте и направлениях $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_d$ можно определить частоту и направление распространения акустической волны.

Пример.

Коллинеарное рассеяние в $CaMoO_4$ [22—24]. Рассмотрим кристалл (рис. 14.19), в котором происходит взаимодействие акустической волны и двух ортогонально-поляризованных световых волн, распространяющихся вдоль оси x кристалла $CaMoO_4$. Для этого кристалла отличным от нуля будет элемент p_{45} матрицы фотоупругих коэффициентов и в соответствии с (14.9.5) возможно коллинеарное взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн (рис. 14.19). Условие фазового синхронизма при коллинеарном взаимодействии имеет, согласно (14.11.1), вид

$$\omega (n_0 - n_e)/c = \omega_s/v_s. \qquad (14.11.2)$$

Это условие поясняет рис. 14.20. Здесь i соответствует поляризованному вдоль z необыкновенному лучу, в то время как d соответствует поляризованному вдоль y обыкновенному лучу. Чтобы связать две таких оптических волны при помощи акустической волны, необходимо согласно (14.9.16), чтобы $p_{zyzx} \neq 0$. Поскольку для кристалла $CaMoO_4$ $p_{zyzx} = p_{45} \neq 0$, то связь осуществляется поперечной акустической S_{zx}-волной, распространяющейся вдоль x.

Математическое описание этого взаимодействия дается выражениями (14.9.16) с $r_i = r_d = x$. Если падающая световая волна E_0 поляризована вдоль оси z и частота акустической волны удовлетворяет (14.11.2), то взаимодействие описывается выражениями

$$E_z(x) = E_0 \cos \eta x, \quad E_y(x) = iE_0 \sin \eta x, \quad \eta = \frac{\pi l}{\sqrt{2}\lambda} \sqrt{\frac{n^6 p_{45}^2}{\rho v_s^3} I_{\text{акуст}}} \qquad (14.11.3)$$

Взаимодействие может быть «выключено» перестройкой частоты ω_s поскольку это приводит к нарушению закона сохранения импульса (14.11.2) (см. задачу 14.10). Оптический фильтр, основанный на этом принципе, описан в работах [22, 23].

Задачи

14.1. Выведите для девяти значений разности фаз Г уравнения эллипсов, описываемых концом вектора напряженности электрического поля волны (см. рис. 14.3, *в*).

14.2. Как сказывается на работе амплитудного модулятора, изображенного на рис. 14.4, наличие не зависящей от поля составляющей разности фаз $(\omega l/c)\ (n_0 - n_e)$, см. (14.15.1)?

14.3. Используя разложение sin (a sin x) по функциям Бесселя, представьте (14.3.7) в виде ряда, содержащего гармоники частоты модуляции $\omega_м$. Начертите график зависимости от $\Gamma_м$ отношения интенсивностей третьей ($3\omega_м$) и основной гармоник на выходе. Какова максимально допустимая величина $\Gamma_м$, если это отношение не должно превышать 10^{-2}?

Ответ: $\Gamma_м < 0{,}5$.

14.4. Покажите, что выходной ток квадратичного детектора, принимающего модулированную по фазе волну, имеет только постоянную компоненту.

14.5. Используя работы [8, 9], сконструируйте частично нагруженный фазовый модулятор на KDP, работающий на частоте $\nu_м = 10^9$ Гц при максимальном отклонении фазы $\delta = \pi/3$. Чему равна мощность модулирующего сигнала?

14.6. Выведите аналогичную (14.6.2) формулу для мощности модулирующего сигнала в случае электрооптического модулятора, работающего по поперечной схеме на кристалле класса $\bar{4}3\,m$ (модулятор подобен описанному в примере § 14.5).

14.7 (а). Покажите, что если луч распространяется под углом $\theta\ (\ll 1)$ к оси z в системе (см. рис. 14.4), то вклад двулучепреломления в разность фаз составляет

$$\Delta\Gamma_{\text{двулуч}} = (n_0^2/n_e^2 - 1)\, n_0\, \theta^2\, \omega l/(2c),$$

что соответствует отличию в показателях преломления

$$n_0 - n_e(\theta) = (n_0^2/n_e^2 - 1)\, n_0\theta^2/2.$$

(б) Выведите приближенное выражение для максимально допустимого угла расходимости пучка, при котором $\Delta\Gamma_{\text{двулуч}}$ не влияет на работу модулятора.

Ответ: $\theta < \{\lambda/[4n_0 l\,(n_0^2/n_e^2 - 1)]\}^{1/2}$.

14.8. Изучив вопрос по литературе (см., например, [17, 18]), опишите различия между дифракцией Брэгга и дифракцией Дебая — Сирса. В каких условиях имеет место та или иная из них?

14.9. Условие дифракции Брэгга для рентгеновских лучей в кристалле записывается в виде $2d \sin\theta = m\lambda/n$, $m = 1, 2, 3 \ldots$, где n — показатель преломления; d — расстояние между атомными слоями (постоянная кристаллической решетки); θ — угол падения; λ — длина волны в вакууме. Дифракция Брэгга на звуке (см. рис. 14.15) происходит, когда $2\lambda_s \sin\theta = \lambda/n$. Если сравнить последнее выражение с условием дифракции рентгеновских лучей при $\lambda_s = d$, то обнаружим, что разрешен только случай $m = 1$. Объясните это различие. Почему в случае рассеяния на акустиче-

ских волнах нельзя получить дифрагировавших пучков вдоль направлений θ, соответствующих $m = 2, 3, \ldots$?

Указание: дифракция рентгеновских лучей имеет место на дискретной слоистой атомной структуре, которую можно идеализировать бесконечно тонкими слоями, в то время как звуковая волна имеет синусоидальную форму.

14.10. Решите систему уравнений (14.9.8) для случая $\Delta k = |k_i - k_s - k_d| \neq 0$ и слабого поля на входе. Предположите взаимодействие коллинеарным, так что $r_i = r_d = r_s = z$. Покажите, что максимальная доля энергии падающей волны, которая преобразуется в диафрагировавший пучок, равна $\eta^2/[\eta^2 + (\Delta k/2)^2]$. Из этого выражения следует, что величина максимально допустимого рассогласования Δk зависит от η. Можете ли вы дать интуитивное объяснение (предполагаемому) нарушению закона сохранения импульса?

14.11. Выведите соотношение (14.9.11), исходя из доплеровских представлений и (14.9.22).

Глава 15

КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ СО СРЕДОЙ

Сталкиваясь с задачами взаимодействия излучения с системой атомов, мы до сих пор ограничивались рассмотрением стационарных ситуаций. Предполагалось, что длительность взаимодействия превосходит времена релаксации среды T_1 и T_2, благодаря чему отклик среды удавалось характеризовать восприимчивостью χ, определяемой, например, формулами (8.1.19).

Однако в условиях, когда поле излучения больше насыщающего, а времена релаксации атомной системы достаточно велики, в последней могут возбуждаться процессы, характерные временные масштабы которых меньше времен релаксации. В таких случаях поляризация перестает быть явной функцией мгновенного значения электрического поля.

Новые явления, имеющие место в указанных условиях, требуют для своего описания нового математического подхода. К числу таких явлений относятся: фотонное эхо, сверхизлучающее состояние и самоиндуцированная прозрачность.

Непосредственному рассмотрению таких явлений мы предпошлем изложение разработанного Фейнманом, Верноном и Хелварсом формализма [1], который устанавливает сходство в поведении системы двухуровневых молекул и парамагнитной спиновой системы в магнитном поле. Аналогия с более простым по своему смыслу движением—прецессией спинов—позволяет наглядно пред-

ставить себе поведение дипольной атомной системы. Уравнения движения, описывающие эволюцию атомной системы, оказываются идентичными уравнениям для парамагнетика, помещенного в постоянное магнитное поле.

15.1. Векторная модель взаимодействия поля излучения с двухуровневой системой [1]

Уравнение Шредингера, привлекаемое для описания взаимодействия двухуровневой системы с электромагнитным полем, допускает простое, но в то же время точное, геометрическое истолкование. Эволюцию волновой функции атома можно представить как движение некоторого воображаемого вектора. Это формальное представление оказывается особенно плодотворным в тех случаях, когда можно пренебречь процессами релаксации. К ним относятся, например, процесс распространения мощных ультракоротких импульсов. Ниже геометрическое представление будет использоваться при изучении явлений оптической нутации, фотонного эха и самоиндуцированной прозрачности.

Нам необходимо найти решение уравнения Шредингера

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = i\hbar\,\partial\psi/\partial t \tag{15.1.1}$$

с гамильтонианом

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}(t), \tag{15.1.2}$$

представленным в виде суммы невозмущенного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0$ и гамильтониана взаимодействия атомов с электромагнитным полем $\hat{V}(t)$.

Волновую функцию атома, входящего в ансамбль не взаимодействующих между собой атомов, можно записать в форме

$$\psi(t) = a(t)\,u_a + b(t)\,u_b, \tag{15.1.3}$$

где u_a и u_b — не зависящие от времени собственные функции гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0$: $\hat{\mathcal{H}}_0 u_a = (\hbar\omega/2)\,u_a$, $\hat{\mathcal{H}}_0 u_b = -(\hbar\omega/2)\,u_b$. Предполагается, что взаимодействие вызывает переходы только между состояниями $|a\rangle$ и $|b\rangle$, энергетический зазор между которыми равен $\hbar\omega$ (см. рис. 15.1).

Волновая функция $\psi(t)$ полностью определяется четырьмя величинами, которыми являются действительные и мнимые части $a(t)$ и $b(t)$. Ввиду того, что абсолютная фаза $\psi(t)$ физического

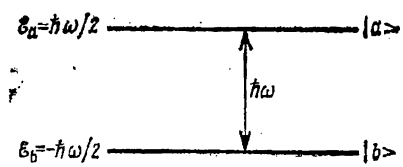


Рис. 15.1. Двухуровневая система, положенная в основу векторной модели, которая рассматривается в § 15.1

смысла не имеет, число величин снижается до трех, и в качестве них можно взять модули $a(t)$ и $b(t)$, а также разность их фаз. Можно, однако, поступить и по другому: образовать из a и b три действительных функции

$$r_1 = ab^* + ba^*, \quad r_2 = i(ab^* - ba^*), \quad r_3 = aa^* - bb^* \quad (15.1.4)$$

и рассматривать их как компоненты некоторого вектора $\mathbf{r}$ в обобщенном пространстве, координаты которого обозначены индексами (1, 2, 3). Вектор $\mathbf{r}$ удовлетворяет условию нормировки

$$|\mathbf{r}|^2 = (|a|^2 + |b|^2)^2 = \int \psi^* \psi dv = 1.$$

Через элементы матрицы плотности, введенной в § 8.1, компоненты вектора $\mathbf{r}$ выражаются как

$$r_1 = 2\,\mathrm{Re}\,(\rho_{21}),\ r_2 = -2\mathrm{Im}\,(\rho_{21}),\ r_3 = \rho_{22} - \rho_{11}. \quad (15.1.5)$$

Временная зависимость вектора $\mathbf{r}$ может быть получена из уравнения Шредингера (15.1.1), записанного в форме

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V})(au_a + bu_b) = i\hbar(\dot{a}u_a + \dot{b}u_b). \quad (15.1.6)$$

Умножая (15.1.6) на u_a^* и интегрируя по всему пространству, приходим к уравнению

$$\frac{da}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[a\left(\frac{\hbar\omega}{2} + V_{aa}\right) + bV_{ab}\right]. \quad (15.1.7а)$$

Умножая (15.1.6) на u_b^*, аналогичным путем получаем

$$\frac{db}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[b\left(-\frac{\hbar\omega}{2} + V_{bb}\right) + aV_{ba}\right]. \quad (15.1.7б)$$

Дальнейшее рассмотрение ограничено условием $V_{aa},\ V_{bb} \ll \hbar\omega$ [1].

Пренебрегая в (15.1.7) величинами V_{aa} и V_{bb}, можно показать, что вектор $\mathbf{r}$, определенный соотношениями (15.1.4), подчиняется простому уравнению

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}, \quad (15.1.8)$$

в котором

$$\omega_1 = (V_{ab} + V_{ba})/\hbar, \quad \omega_2 = i(V_{ab} - V_{ba})/\hbar, \quad \omega_3 = \omega. \quad (15.1.9)$$

Для доказательства этого утверждения спроектируем (15.1.8) на одну из координатных осей:

$$\frac{dr_1}{dt} = \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2. \quad (15.1.10)$$

[1] Диагональные компоненты V_{aa} и V_{bb} равны нулю, когда речь идет о магнитодипольных переходах в системе со спином 1/2 или об электродипольных переходах в системе, обладающей центром инверсии, а следовательно, и определенной четностью состояний.

Левая часть (15.1.10) равна $ab^* + ab^* +$ к. с. Подстановка (15.1.7) с учетом $V_{aa} = V_{bb} = 0$ дает

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}(-\hbar^*\omega ab^* + V_{ba}^* aa^* - V_{ab}\, bb^*) + \text{к. с.}$$

Используя (15.1.4) и (15.1.9), получаем

$$\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 = (i/\hbar)(V_{ab} - V_{ba})(aa^* - bb^*) - i\omega(ab^* - ba^*),$$

что совпадает с предыдущим выражением для dr_1/dt. Точно так же можно убедиться в справедливости двух других компонент векторного уравнения (15.1.8).

Для дальнейшего продвижения необходима более конкретная информация о переходе $a \to b$ и об электромагнитном поле. Рассмотрим важный класс дипольных переходов, удовлетворяющих правилам отбора $\Delta m = \pm 1$. Обозначения будут соответствовать электродипольным переходам.

Указанные правила отбора означают, что атом взаимодействует с циркулярно-поляризованными компонентами поля. Поэтому гамильтониан взаимодействия

$$\hat{V} = -\hat{\mu}_x E_x - \hat{\mu}_y E_y \tag{15.1.11}$$

удобнее представить в другой форме, введя новые переменные

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^+ &= \hat{\mu}_x + i\hat{\mu}_y, \quad E^+ = E_x + iE_y, \\ \hat{\mu}^- &= \hat{\mu}_x - i\hat{\mu}_y, \quad E^- = E_x - iE_y. \end{aligned} \tag{15.1.12}$$

В этих переменных (15.1.11) запишется как

$$\hat{V} = -(\hat{\mu}^+ E^- + \hat{\mu}^- E^+)/2. \tag{15.1.13}$$

Для рассматриваемых переходов с $\Delta m = \pm 1$ имеем

$$\langle m+1 \,|\, \hat{\mu}^- \,|\, m\rangle = 0, \qquad \langle m \,|\, \hat{\mu}^+ \,|\, m+1\rangle = 0, \tag{15.1.14}$$

так что из (15.1.12) и (15.1.13) следует

$$\begin{aligned} V_{ab} &= -{}^1/_2\, \mu_{ab}^+ (E_x - iE_y), \\ V_{ba} &= -{}^1/_2\, \mu_{ba}^- (E_x + iE_y). \end{aligned} \tag{15.1.15}$$

Мы вправе выбрать фазы волновых функций u_a и u_b так, чтобы величина μ_{ab}^+ была действительной и положительной:

$$\mu_{ab}^+ = \mu_{ba}^- = 2\mu, \quad \mu = \langle b \,|\, \mu_x \,|\, a\rangle. \tag{15.1.16}$$

Соотношения (15.1.9) и (15.1.15) дают

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (V_{ab} + V_{ba})/\hbar = -2\mu E_x(t)/\hbar, \\ \omega_2 &= i(V_{ab} - V_{ba})/\hbar = -2\mu E_y(t)/\hbar. \end{aligned} \tag{15.1.17}$$

Отсюда можно сделать вывод, что вектор $\boldsymbol{\omega}$, располагающийся в плоскости *1—2* обобщенного пространства, подобен вектору **E**, лежащему в плоскости $x - y$ физического пространства. Чтобы

придать физический смысл также и вектору $\mathbf{r}$; рассмотрим среднюю величину x-компоненты дипольного момента

$$\langle \mu_x \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^+ + \mu^- \rangle = \frac{1}{2} \int (a^* u_a^* + b^* u_b^*)(\mu^+ + \mu^-) \times$$
$$\times (a u_a + b u_b)\, dv.$$

Учитывая (15.1.14) и то, что $u_a \to |m+1\rangle$, $u_b \to |m\rangle$, получаем

$$\langle \mu_x \rangle = \mu r_1, \quad \langle \mu_y \rangle = \mu r_2. \tag{15.1.18}$$

Таким образом, имеется полное соответствие между вектором среднего дипольного момента в физическом пространстве и вектором $\mathbf{r}$ в обобщенном пространстве.

Итак, мы построили аппарат, предназначенный для исследования дипольного взаимодействия двухуровневой системы с электромагнитным полем. Остается лишь решить векторное уравнение (15.1.8)с $\boldsymbol{\omega}$, заданным формулами (15.1.17). Поперечные компоненты дипольного момента атома связаны соотношениями (15.1.18) непосредственно с $\mathbf{r}$. В силу того, что волновая функция $\psi(t)$ однозначно связана с $\mathbf{r}$ соотношениями (15.1.4), знание $\mathbf{r}(t)$ эквивалентно полному (в квантовомеханическом смысле) описанию системы. Решение (15.1.8) зависит от начального значения $\mathbf{r}(0)$ точно так же, как решение уравнения Шредингера зависит от $\psi(0)$.

В последующих параграфах мы будем заниматься решением уравнения (15.1.8) применительно к некоторым простым случаям. Но перед этим полезно обсудить вопрос о значимости уравнения (15.1.8) в случае спиновой системы со спином 1/2. В этом случае $u_a = |{}^1/_2\rangle$, $u_b = |-{}^1/_2\rangle$ и

$$\boldsymbol{\mu} = (2\beta/\hbar)\, \mathbf{S},$$

где β — магнетон Бора; $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный дипольный момент и $\mathbf{S}$ — механический спиновый момент. Обратившись к (15.1.16), имеем

$$2\mu = \mu_{ab}^+ = \frac{2\beta}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2} \middle| S^+ \middle| -\frac{1}{2} \right\rangle = 2\beta.$$

Из (15.1.18) теперь вытекает, что

$$\langle \mu_x \rangle = \beta r_1, \quad \langle \mu_y \rangle = \beta r_2.$$

В данном случае имеется и третья компонента

$$\langle \mu_z \rangle = \left\langle a u_{1/2} + b u_{-1/2} \middle| \frac{2\beta}{\hbar} S_z \middle| a u_{1/2} + b u_{-1/2} \right\rangle =$$
$$= \beta (a a^* - b b^*) = \beta r_3,$$

так что $\langle \mu \rangle$ совершенно идентично $\beta \mathbf{r}$.

Взяв (15.1.17) и заменив там $E_{x,y}$ на соответствующие компоненты магнитного поля $H_{x,y}$, запишем

$$\omega_1 = -2\beta H_x/\hbar, \quad \omega_2 = -2\beta H_y/\hbar.$$

Осталось показать, что $\omega_3 = -2\beta H_z/\hbar$. Это очень несложно сделать, зная, что энергетический интервал $\hbar\omega$ между спиновыми уровнями равен $-2\beta H_z$, откуда и следует

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega = -2\beta H_z.$$

Мы установили наличие полного соответствия между $\omega(t)$ и $-2\beta\mathbf{H}(t)/\hbar$. Теперь имеются все основания для перехода от (15.1.8) к

$$\frac{d\langle\boldsymbol{\mu}\rangle}{dt} = \gamma\langle\boldsymbol{\mu}\rangle \times \mathbf{H}, \qquad (15.1.19)$$

где $\gamma = 2\beta/\hbar$ — гиромагнитное отношение. Получилось хорошо известное уравнение движения магнитного момента в магнитном поле. Найденное соответствие между r_3 и μ_z не является общей закономерностью. Его нет, например, в обсуждавшемся выше случае электродипольного перехода с $\Delta m = \pm 1$, когда

$$\langle\mu_z\rangle \infty \langle au_a + bu_b \mid z \mid au_a + bu_b\rangle = 0,$$

поскольку $\langle u_a \mid z \mid u_a\rangle = 0$ и $\langle u_b \mid z \mid u_a\rangle = 0$. Первая из этих величин обращается в нуль благодаря нечетности интегрируемой функции $u_a|^2 z$, а вторая — вследствие того, что она содержит интеграл $\int_0^{2\pi} \exp(i\varphi)\, d\varphi$. Соответствие между поперечными компонентами $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\mu}$, зафиксированное в (15.1.18), остается в силе и, как показано ниже, оказывается весьма полезным[1]. Компонента же r_3 в этом случае пропорциональна среднему значению невозмущенного гамильтониана:

$$\langle\mathcal{H}\rangle = \int \psi^* \hat{\mathcal{H}}_0 \psi dv = (aa^* - bb^*)\frac{\hbar\omega}{2} = r_3\frac{\hbar\omega}{2}. \qquad (15.1.20)$$

Переход во вращающуюся систему координат. Решение уравнения (5.1.8) существенно упрощается с переходом из неподвижной (*1*, *2*, *3*) системы координат во вращающуюся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. В соответствии с основной теоремой векторного исчисления скорость изменения некоторого вектора, наблюдаемая во вращающейся системе координат, соотносится со скоростью, наблюдаемой в покоящейся системе, как

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{вр}}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{вр}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\text{вр}}. \qquad (15.1.21)$$

[1] Такое соответствие имеет место только для рассматриваемого здесь частного случая, когда переход удовлетворяет правилу отбора $\Delta m = \pm 1$. В общем же случае электродипольных переходов простой аналогии между компонентами вектора $\boldsymbol{\mu}$ в физическом пространстве и вектора $\mathbf{r}$ в обобщенном пространстве нет вообще (см., например, [15], стр. 113). — *Прим. ред.*

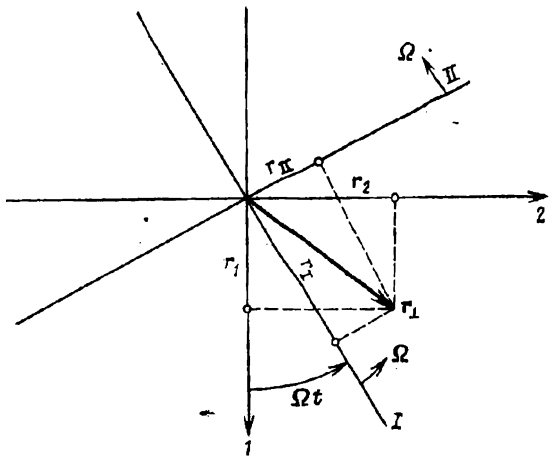


Рис. 15.2. Соотношение между поперечными компонентами $\mathbf{r}$ в неподвижной ($1, 2$) и вращающейся (I, II) системах координат.
Система (I, II, III) вращается вокруг оси 3 с угловой скоростью Ω (оси 3 и III совпадают)

Индекс «вр» означает, что данный вектор взят во вращающейся системе координат[1]. Применяя (15.1.21), получаем из (15.1.8) уравнение

$$\frac{d\mathbf{r}_{вр}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_{вр} - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}_{вр}. \qquad (15.1.22)$$

Поведение $\mathbf{r}(t)$ в отсутствие электромагнитного поля. Найдем решение для $\mathbf{r}(t)$ в отсутствие поля излучения. В этом случае из (15.1.17) следует $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega \to \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}_3\omega$, где $\mathbf{a}_3$ — единичный вектор в направлении оси 3. Ось вращения удобно взять параллельной $\mathbf{a}_3$. Обозначая оси вращающейся системы координат как I, II, III, мы в этом случае имеем $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{a}_{III}\,\Omega$, а взамен (15.1.22) уравнение

$$\frac{d\mathbf{r}_{вр}}{dt} = \mathbf{a}_{III}(\omega - \Omega) \times \mathbf{r}_{вр}. \qquad (15.1.23)$$

Теперь уместно вспомнить, что выбор величины и направления $\boldsymbol{\Omega}$ диктуется исключительно соображениями удобства, и, взяв $\Omega = \omega$, получаем в качестве решения (15.1.23) $\mathbf{r}_{вр} = \text{const}$ или после обратного преобразования к системе (1, 2, 3), как это видно из рис. 15.2:

$$r_1 = r_I \cos\omega t - r_{II} \sin\omega t, \quad r_2 = r_I \sin\omega t + r_{II} \cos\omega t,$$
$$r_3 = \sqrt{1 - r_I^2 - r_{II}^2}. \qquad (15.1.24)$$

Таким образом, движение $\mathbf{r}(t)$ — это прецессия относительно оси 3 под произвольным углом наклона. При этом r_3, а в силу (15.1.20) и энергия, являются константами движения. Постоянство этой

[1] Если вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ задан в системе координат ($1, 2, 3$), то в системе (I, II, III) он поворачивается на угол Ωt относительно оси 3, преобразуясь в $\mathbf{A}_{вр} = (A_I, A_{II}, A_{III})$, где $A_I = A_1 \cos\Omega t + A_2 \sin\Omega t$, $A_{II} = -A_1 \sin\Omega t + A_2 \cos\Omega t$. В связи с этим см. задачу 15.4.

величины является геометрическим отражением того факта, что в отсутствие поля невозможны и переходы между $|a\rangle$ и $|b\rangle$, т. е. величины $|a|^2$ и $|b|^2$ постоянны[1].

Зная компоненты r_1 и r_2, нетрудно вычислить амплитуды $U_п$ и $V_п$ поляризации среды

$$P_x = U_п \cos \omega t - V_п \sin \omega t.$$

Из (15.1.18) и (15.1.24) находим

$$P_x = N \langle \mu_x \rangle = N\mu r_1 = N\mu (r_I \cos \omega t - r_{II} \sin \omega t)$$

и получаем соотношение $U_п = N\mu r_I$, $V_п = N\mu r_{II}$, где N — плотность атомов. Если в начальный момент $t = 0$ на верхнем уровне находилось N_a атомов/м^3, а на нижнем уровне их было N_b, то $U_п = (N_a - N_b)\,\mu r_I$, $V_п = (N_a - N_b)\,\mu r_{II}$. Здесь $r_{I,\,II}(t)$ — решение уравнения для атома, первоначально находившегося на верхнем уровне $|a\rangle$, так что $r_{III}(0) = 1$. Доказательство последнего утверждения предоставляется в качестве упражнения.

Поведение $\mathbf{r}(t)$ при наличии электромагнитного поля. Рассмотрим вначале поведение $\mathbf{r}(t)$ в электрическом поле

$$E_x = E \cos \omega_0 t, \quad E_y = E \sin \omega_0 t, \tag{15.1.25}$$

циркулярно-поляризованном в плоскости $x - y$. Компоненты $\boldsymbol{\omega}(t)$ находим из (15.1.17):

$$\omega_1 = (2\mu/\hbar) E \cos \omega_0 t, \quad \omega_2 = -(2\mu/\hbar) E \sin \omega_0 t, \quad \omega_3 = \omega. \tag{15.1.26}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ вращается относительно оси *3* с угловой скоростью ω_0. В проекции на плоскость *1—2* этот вектор имеет постоянную длину $2\mu E/\hbar$. В системе координат, вращающейся синхронно с $\boldsymbol{\omega}(t)$, т. е. со скоростью $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{a}_{III}\omega_0$, вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ неподвижен, поэтому $\boldsymbol{\omega}_{вр} = (-2\mu E/\hbar,\ 0,\ \omega)$ и уравнение движения (15.1.22) приобретает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{r}_{вр}}{dt} = \left[\mathbf{a}_I\left(-\frac{2\mu E}{\hbar}\right) \pm \mathbf{a}_{III}(\omega - \omega_0)\right] \cdot r_{вр}(\omega) = \boldsymbol{\omega}_{эфф} \times \mathbf{r}_{вр}(\omega). \tag{15.1.27}$$

Задача свелась к исследованию прецессии $\mathbf{r}_{вр}$ относительно неподвижного вектора $\boldsymbol{\omega}_{эфф} = \mathbf{a}_I[-(2\mu E/\hbar)] \pm \mathbf{a}_{III}(\omega - \omega_0)$. Эта прецессия, описываемая формулами (15.1.24), происходит с частотой

$$\omega_e = |\boldsymbol{\omega}_{эфф}| = \sqrt{(2\mu E/\hbar)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{15.1.28}$$

и поясняется рис. 15.3, который соответствует начальному условию $\mathbf{r}_{вр}(0) = \mathbf{a}_{III}$, когда атом первоначально находится в верхнем состоянии $|a\rangle$. Ось I вращающейся системы координат выбрана так, что она совпадает с проекцией $\boldsymbol{\omega}$ на плоскость *1—2*, поэтому $\omega_{II} = 0$.

[1] Возможность спонтанного перехода с $|a\rangle$ на $|b\rangle$ не охватывается данной моделью вследствие того, что поле считается классическим.

Используя известные формулы тригонометрии и руководствуясь рис. 15.3, находим

$$r_{\mathrm{I}} = \frac{\omega_{\mathrm{I}}(\omega-\omega_0)}{\omega_e^2}(1-\cos\omega_e t), \quad r_{\mathrm{II}} = -\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_e}\sin\omega_e t,$$

$$r_{\mathrm{III}} = 1-2\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_e}\right)^2\sin^2\frac{\omega_e t}{2}, \qquad (15.1.29)$$

где $\omega_{\mathrm{I}} = -2\mu E/\hbar$ — отрицательная величина. Воспользовавшись (15.1.29), соотношением $r_{\mathrm{III}} = |a|^2 - |b|^2$ и условием нормировки $|a|^2 + |b|^2 = 1$, приходим к выражениям

$$|a|^2 = 1-\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_e}\right)^2\sin^2\frac{\omega_e t}{2}, \quad |b|^2 = \left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_e}\right)^2\sin^2\frac{\omega_e t}{2} \qquad (15.1.30)$$

для вероятностей обнаружения атома на верхнем a или нижнем b уровнях, если первоначально он находился на верхнем уровне.

При резонансе ($\omega = \omega_0$) имеет место равенство $\omega_e = \omega_{\mathrm{I}}$ и

$$|a|^2 = \cos^2(\omega_{\mathrm{I}} t/2),$$

$$|b|^2 = \sin^2(\omega_{\mathrm{I}} t/2), \qquad (15.1.31)$$

т. е. населенности уровней полностью инвертируются через каждые π/ω_{I} с. Изменение во времени вероятностей $|a|^2$ и $|b|^2$ показано на рис. 15.4 как в резонансе ($\omega = \omega_0$), так и вдали от него.

В заключение нужно отметить, что в большинстве экспериментов на атом действует не циркулярно-поляризованное поле (15.1.25), которое фигурирует выше, а линейно-поляризованное поле

$$E_x = E\cos\omega_0 t. \qquad (15.1.32)$$

Его можно разложить на два поля, поляризованные по кругу во встречных направлениях:

$$E_{x1} = (E/2)\cos\omega_0 t,$$
$$E_{y1} = (E/2)\sin\omega_0 t, \qquad (15.1.33)$$

$$E_{x2} = (E/2)\cos\omega_0 t,$$
$$E_{y2} = -(E/2)\sin\omega_0 t. \qquad (15.1.34)$$

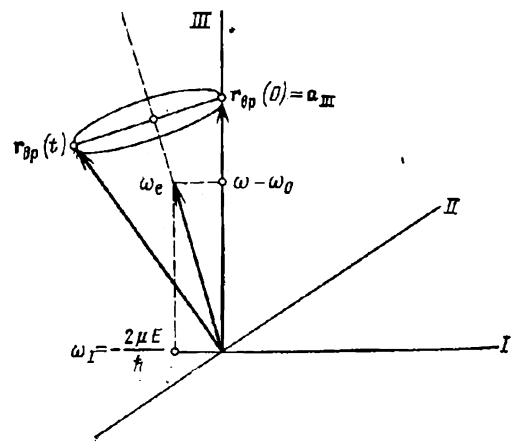


Рис. 15.3. Движение вектора $\mathbf{r}_{\text{рв}}(t)$ во вращающейся системе координат (*I, II, III*).

Движение представляет собой прецессию со скоростью ω_e относительно неподвижного вектора $\omega_{\text{эфф}}$. Рисунок соответствует начальному условию $r_{\text{вр}}(0) = a_{\text{III}}$, когда атом первоначально находился в возбужденном состоянии $|a\rangle$

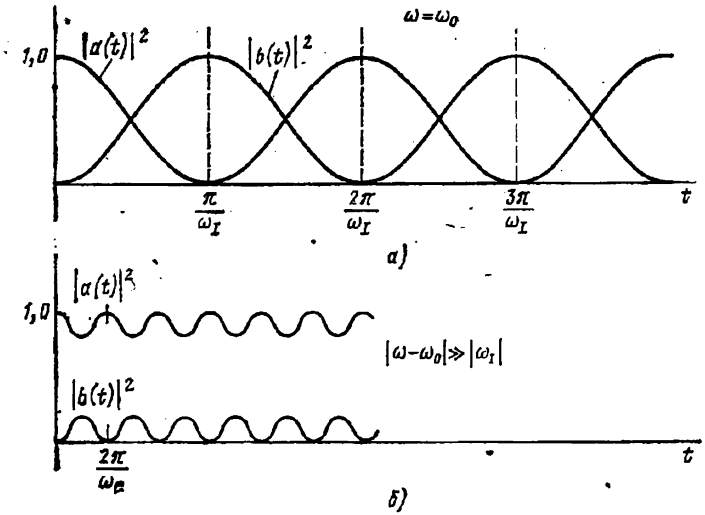


Рис. 15.4. Изменение во времени вероятностей $|a|^2$ и $|b|^2$ под действием оптического поля.
а) $\omega=\omega_0$; *б*) $|\omega-\omega_0| \gg |\omega_I|$

Во вращающейся синхронно с полем (15.1.33) системе координат поле (15.1.34) выглядит вращающимся с угловой скоростью $2\omega_0$, так что средний опрокидывающий момент, приложенный к $\mathbf{r}$ со стороны этого поля, в первом приближении равен нулю. Результирующее движение вектора $\mathbf{r}$ оказывается таким же, что и излученное выше, и лишь E необходимо заменить на $E/2$.

15.2. Сверхизлучение

Рассмотрим прецессию вектора $\mathbf{r}$ в пространстве (I, II, III) под действием приложенного циркуляционно-поляризованного поля частоты $\omega_0 = \omega$, где $\hbar\omega$ — расстояние между энергетическими уровнями. Пусть атом первоначально находится на нижнем уровне b, так что $\mathbf{r}_{вр}(0) = -\mathbf{a}_{III}$. Переделав рис. 15.3 применительно к исследуемому случаю, получим картину, изображенную на рис. 15.5. «Выключим» поле в момент t_0, когда $|\omega_I| t_0 = \pi/2$. Для $t > t_0$

$$r_I = r_{III} = 0, \quad r_{II} = -1 \qquad (15.2.1)$$

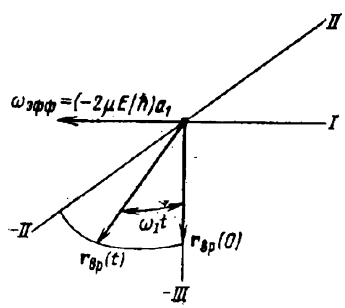


Рис. 15.5. Движение вектора $\mathbf{r}_{вр}(t)$ в пространстве (*I, II, III*) в случае, когда первоначально атом находился в основном состоянии $|b\rangle$

Конец вектора $\mathbf{r}_{вр}(t)$ описывает окружность в плоскости (II, III). Если выключить поле в момент $t_0=\pi/2\omega_I$ вектор $\mathbf{r}_{вр}$ останется при $t>t_0$, ориентированным в направлении — II.

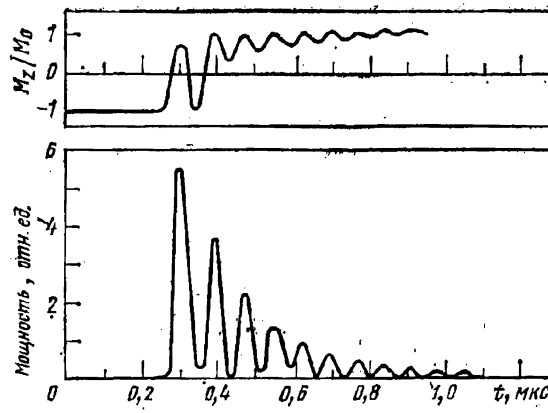


Рис. 15.6. Сверхизлучение инвертированной спиновой системы.
На верхнем графике представлен временной ход намагниченности, на нижнем рисунке — излучаемой мощности [5]

и согласно (15.1.18) и (15.1.24) высокочастотный дипольный момент атома в реальном пространстве имеет компоненты

$$\mu_x = \mu r_1 = \mu \sin\omega(t - t_0), \quad \mu_y = \mu r_2 = -\mu\cos\omega(t - t_0). \quad (15.2.2)$$

Это наибольший дипольный момент, который может быть наведен в атоме. Если начальные условия соответствуют наличию N_a атомов/м^3 на верхнем и N_b атомов/м^3 на нижнем уровне, то поляризация при $t > t_0$ оказывается равной

$$P_x = (N_b - N_a)\mu\sin\omega(t - t_0),$$
$$P_y = -(N_b - N_a)\mu\cos\omega(t - t_0). \quad (15.2.3)$$

Каждый из атомов, составляющих ансамбль, вносит свой когерентный вклад в единый гигантский дипольный момент. Такое состояние системы атомов было названо Дике [2] сверхизлучающим. Под сверхизлучением понимается идущий с повышенной вероятностью процесс спонтанного излучения этого гигантского диполя.

Для того чтобы получить выражение для скорости спонтанного распада диполя, описываемого формулами (15.2.3), рассмотрим образец объемом V_s с начальной плотностью населенностей уровней N_a и N_b. Поместим этот образец внутрь резонатора, имеющего добротность Q и объем V_c. Излучая, диполь возбуждает поле в резонаторе. Приравнивая друг другу мощность, отдаваемую поляризацией полю в соответствии с (5.1.13), и мощность, диссипируемую границами, находим мощность

$$\mathscr{P}_{\text{дис}} = \frac{\omega Q (N_b - N_a)^2 \mu^2 V_s}{\varepsilon V_c}, \quad (15.2.4)$$

которая излучается атомами в начальной фазе процесса, сразу после окончания $\pi/2$-импульса. Энергия, запасенная в образце к моменту времени t_0, равна $\mathscr{E} = (N_b - N_a)\hbar\omega V_s/2$. Постоянная

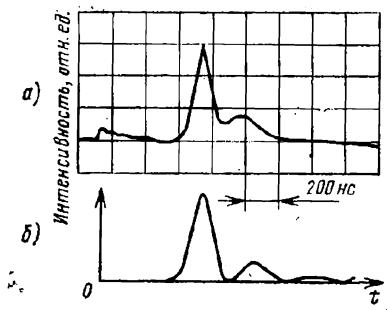


Рис. 15.7. Осциллограмма импульса сверхизлучения, наблюдавшегося при оптической накачке HF (*а*) и результат численного решения при $T_2^* = 220$ нс, $\tau_{вр} = 4{,}7$ нс [6] (*б*)

времени распада начального сверхизлучающего состояния запишется как

$$\tau = \frac{\hbar\varepsilon}{2Q(N_b - N_a)\mu^2}\left(\frac{V_c}{V_s}\right). \quad (15.2.5)$$

Следовательно, при $N_b \gg N_a$ имеем $\tau \sim 1/N_b$; этот результат отражает коллективный характер процесса распада.

Явление сверхизлучения было обстоятельно изучено в диапазоне СВЧ на примере неравновесных спиновых систем [3—5]. Сверхизлучение в далекой инфракрасной области обсуждалось в работе [6]. Теоретическая форма импульса сверхизлучения показана на рис. 15.6, а экспериментальные результаты, относящиеся к инфракрасному диапазону. — на рис. 15.7.

15.3. Фотонное эхо

Прямым подтверждением существования оптических когерентных эффектов служит явление фотонного эха. Этот эффект впервые был обнаружен и изучен в работах по ядерному магнитному резонансу [7] и значительно позднее — в оптических экспериментах [8]. Основной эксперимент заключается в том, что на ансамбль атомов оказывается последовательное воздействие двумя импульсами, имеющими резонансную несущую частоту, а затем наблюдается импульс излучения возбужденной атомной системы. Излучаемый импульс (эхо) задержан относительно второго возбуждающего импульса на время, равное интервалу между первым и вторым импульсами.

Рассмотрим результат действия на образец двух линейно-поляризованных световых импульсов, которые показаны на рис. 15.8. Обозначим несущую частоту импульса через ω_0. Проследим во вращающейся системе координат за эволюцией векторов **r** трех атомов с резонансными частотами $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0$, $\omega_3 = \omega_0 + \Delta\omega$, которые первоначально находятся на нижнем уровне. Если первый импульс осуществляет поворот на угол $\pi/2$, т. е.

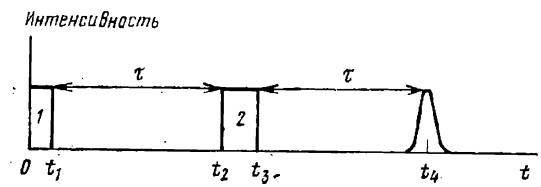


Рис. 15.8. Действие $\pi/2$-импульса (*1*) и π-импульса (*2*) на ансамбль поглощающих атомов приводит к излучению эхо-импульса в момент t_4

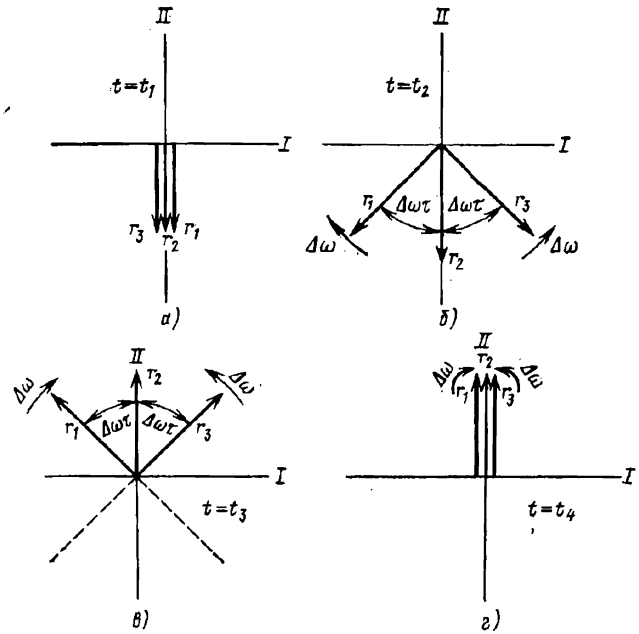


Рис. 15.9. Положение векторов $\mathbf{r}_{вр}$ в разные моменты времени:
а) $t=t_1$; б) $t=t_2$; в) $t=t_3$; г) $t=t_4$

$\mu E t_1/\hbar = \pi/2$, то в момент t_1 все три $\mathbf{r}$-вектора выстроятся параллельно оси II, как показано на рис. 15.9, *а*. Движение их на интервале времени от t_1 до t_2 описывается выражением (15.1.27) при условии $E = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\omega)}{\partial t} = \mathrm{a}_{\mathrm{III}}(\omega - \omega_0) \times \mathbf{r}(\omega).$$

Вектор $\mathbf{r}_1$ будет прецессировать вокруг оси z со скоростью $-\Delta\omega$, вектор $\mathbf{r}_3$ — со скоростью $\Delta\omega$, тогда как $\mathbf{r}_2$ останется неподвижным.

Распространяя это рассуждение на ансамбль из большого числа атомов, мы придем к выводу, что развертывание в плоскости I—II веера $\mathbf{r}$-векторов сопровождается исчезновением сверхизлучающего состояния за время $\sim 2\pi/\Delta$, где Δ — характерная ширина распределения резонансных частот [$\Delta \approx (\Delta\omega)_{\text{неодн}}$]. Однако в случае бестолкновительного неоднородного уширения этот процесс обратим. Для того чтобы показать это, рассмотрим действие второго импульса. Длительность его подбирается таким образом, чтобы он вызвал поворот (относительно оси I) на угол π, т. е. $(\mu E/\hbar)(t_3 - t_2) = \pi$. Состояние системы в момент времени t_3 показано на рис. 15.9, *в*. Относительный порядок следования $\mathbf{r}$ векторов теперь сменился на обратный: $\mathbf{r}_1$ лидирует, а $\mathbf{r}_3$ запаздывает. При $t > t_3$ $\mathbf{r}$-векторы возобновляют движение с теми же скоростями, что и в предыдущем интервале между t_1 и t_2. «Быстрый» атом ($\mathbf{r}_3$) и «медленный» атом ($\mathbf{r}_1$) сойдутся с $\mathbf{r}_2$ в момент времени $t_4 = t_3 + \tau$, при этом резуль-

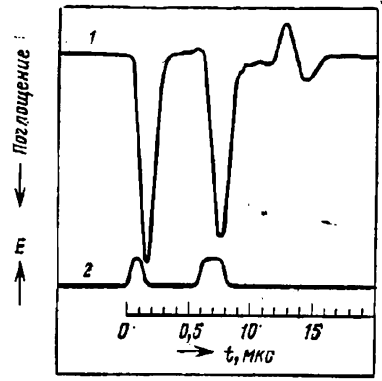


Рис. 15.10. Фотонное эхо в $C^{13}H_3F$ при давлении 0,69 Па (0,0052 мм рт. ст.)

1 — откликом на $\pi/2$- и π-импульсы является фотонное эхо; *2* — штарковские $\pi/2$- и π-импульсы. В этом эксперименте использовалось монохроматическое излучение, а резонанс в молекулярной системе достигался на необходимое время с помощью эффекта Штарка в электрическом поле, форма которого показана кривой *2* [8]

тирующий поперечный дипольный момент достигает максимальной величины и возникает эхо-импульс сверхизлучения.

Нарисованную картину нетрудно обобщить на систему атомов с непрерывным распределением по частотам переходов. Полагаем, что неоднородное уширение линии описывается функцией распределения, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega) = 1. \qquad (15.3.1)$$

Характерную ширину функции $g(\Delta\omega)$ обозначим через Δ. Если определить комплексный вектор $\mathbf{R}$ как сумму всех $\mathbf{r}$-векторов на плоскости I—II, то в интервале $t_1 < t < t_2$

$$\mathbf{R}(t) = -iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\, e^{i\Delta\omega\,(t-t_1)}\, d(\Delta\omega). \qquad (15.3.2)$$

Коэффициент i перед интегралом в (15.3.2) выбран из тех соображений, чтобы при $t = t_1$ вектор $\mathbf{R}(t_1) = -iN$ был параллелен оси II, как показано на рис. 15.9, *а*. Отметим, что для моментов времени t, удовлетворяющих условию $\Delta\omega(t - t_1) > \pi$, $\mathbf{R}(t) \to 0$. При $t = t_2$

$$\mathbf{R}(t_2) = -iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\, e^{i\Delta\omega\tau}\, d(\Delta\omega). \qquad (15.3.3)$$

Действие второго π-импульса сводится к замене азимутального угла $\Delta\omega\tau$ на $\pi - \Delta\omega\tau$, как показано на рис. 15.9, *в* и к моменту t_3

$$\mathbf{R}(t_3) = -iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\, e^{i\,(\pi-\Delta\omega\tau)}\, d(\Delta\omega). \qquad (15.3.4)$$

После этого атомы продолжают эволюционировать в соответствии с законом $\exp[i\Delta\omega\,(t - t_3)]$, так что

$$\mathbf{R}(t > t_3) = -iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\, e^{i\,(\pi-\Delta\omega\tau)}\, e^{i\Delta\omega\,(t-t_3)}\, d(\Delta\omega). \qquad (15.3.5)$$

В момент $t_4 = t_3 + \tau$ имеем

$$\mathbf{R}(t_4) = -iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\, e^{i\pi}\, d(\Delta\omega) = iN.$$

Это означает, что все r-векторы выстроились вдоль оси II и образовалась сверхизлучающая суперпозиция, показанная на рис. 15.9, *г*. В момент t_4 излучается импульсный эхо-сигнал.

Фотонное эхо наблюдалось в экспериментах с кристаллами рубина [9, 10], а также с молекулярными газами [8]. На рис. 15.10 представлены экспериментальные данные, касающиеся наблюдения фотонного эха в $C^{13}H_3F$ [8].

15.4. Самоиндуцированная прозрачность

В качестве еще одного важного проявления когерентного взаимодействия излучения с ситемой атомов можно назвать эффект самоиндуцированной прозрачности [11—13]. Явление заключается в том, что короткий резонансный импульс определенной длительности с интенсивностью, превосходящей некоторую пороговую величину, испытывает при прохождении через *поглощающую в обычных условиях* среду аномально малое затухание. Оно имеет место при длительности импульса, меньшей времен релаксации среды, в случае совпадения несущей частоты с частотой атомного перехода. Пройдя расстояние, в несколько раз превышающее характерный классический масштаб затухания, ультракороткий импульс достигает стационарного состояния, в котором *ширина, энергия и форма* его сохраняются неизменными. Скорость распространения такого импульса заметно меньше «обычной» групповой скорости света в среде. Фактор замедления может достигать нескольких порядков.

По-видимому, явление самоиндуцированной прозрачности является наиболее убедительным примером непригодности привычного подхода, основывающегося на концепции диэлектрической и магнитной восприимчивости, к распространению излучения в среде.

Наше изложение ведется в духе оригинальной работы МакКолла и Хана [12], которые первыми предсказали и наблюдали это явление. Предположим, что световой импульс воздействует на двухуровневую систему. Поляризацию среды, наведенную полем, можно вычислить, пользуясь формализмом матрицы плотности. С другой стороны, решая уравнения Максвелла, можно найти поле, индуцированное поляризацией среды. В результате самосогласованного решения указанных двух систем уравнений находим форму импульса, его энергию и длительность. Схема, поясняющая самосогласованный подход к решению задачи, изображена на рис. 15.11.

Линейно-поляризованное поле и поляризацию среды, в которой распространяется импульс, запишем в следующей форме:

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2}\{e(z, t)\, e^{i[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z, t)]} + \text{к. с.}\}, \qquad (15.4.1)$$

$$P_x(z, t) = \frac{1}{2}\{[U_\text{п}(z, t) + iV_\text{п}(z, t)]\, e^{i[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z, t)]}\}. \qquad (15.4.2)$$

Здесь $\varphi(z, t)$ учитывает возможность медленного изменения комплексной фазы; $U_\text{п}$ и $V_\text{п}$ — действительные величины: $U_\text{п}$ — синфазная компонента поляризации, связанная с дисперсией, $V_\text{п}$ — квадратурная компонента, отражающая наличие поглощения.

Выражения (15.4.1) и (15.4.2) подставляются в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \qquad (15.4.3)$$

Здесь и ниже индекс x опущен. Отделяя действительную часть (15.4.3) от мнимой, приходим к системе двух связанных уравнений. Вид этой системы существенно упрощается с выполнением условий плавности огибающей: $\partial F/\partial t \ll \omega_0 F$, $\partial F/\partial z \ll k_0 F$, $\partial^2 F/\partial t^2 \ll \omega_0 \partial F/\partial t$, $\partial^2 F/\partial z^2 \ll k_0 \partial F/\partial z$, где $F = e$, $U_\text{п}$, $V_\text{п}$, φ. В этом случае уравнения имеют вид

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\omega_0 c \mu_0}{2n} V_\text{п}, \qquad (15.4.4)$$

$$e\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{\omega_0 c \mu_0}{2n} U_\text{п}. \qquad (15.4.5)$$

На следующем этапе рассмотрения необходимо связать компоненты поляризации среды ($U_\text{п}$ и $V_\text{п}$) с электрическим полем. Обратимся к уравнениям для элементов матрицы плотности (8.1.6) и (8.1.7):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{11} - \rho_{22}) = \frac{2i\mu}{\hbar} E(\rho_{21} - \rho_{12}), \qquad (15.4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{21} = -i\omega\rho_{21} + \frac{i\mu}{\hbar} E(\rho_{11} - \rho_{22}). \qquad (15.4.7)$$

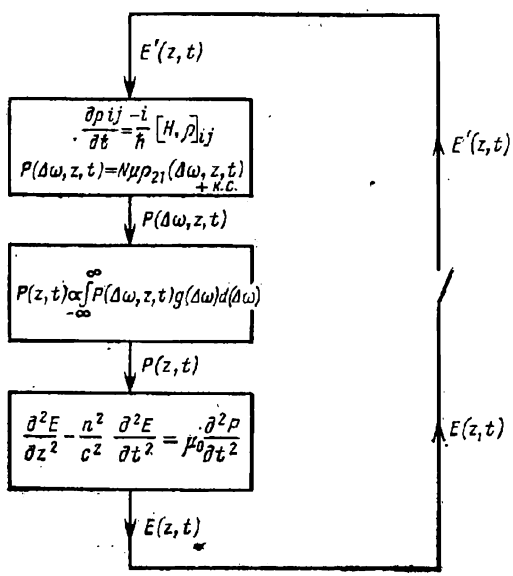


Рис. 15.11. Схема, иллюстрирующая самосогласованный подход в задаче о распространении светового импульса $E(z, t)$ в резонансной среде

Все переменные здесь являются функциями z и t, через μ обозначен недиагональный матричный элемент дипольного момента

$$\mu = \langle 1 | \mu_x | 2 \rangle = \langle 2 | \mu_x | 1 \rangle, \qquad (15.4.8)$$

$\hbar\omega = E_2 - E_1$ — расстояние между энергетическими уровнями атома. Уравнениями (15.4.6) и (15.4.7) описываются лишь те атомы ансамбля, резонансная частота которых равна ω. Это обстоятельство заставляет записывать элементы матрицы плотности в виде $\rho_{ij}(z, t, \Delta\omega)$, где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — отстройка от несущей частоты импульса ω_0.

Рассмотрим вклад атомов с резонансной частотой $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ в поляризацию среды. Согласно (8.1.5) имеем

$$P(\Delta\omega, z, t) = N\mu [\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) + \rho_{12}(\Delta\omega, z, t)]. \qquad (15.4.9)$$

Теперь вернемся к выражениям (15.4.2). Поскольку в $U_\text{п}$ и $V_\text{п}$ вносят свой вклад атомы, резонансные частоты которых заполняют целый интервал расстроек $\Delta\omega$, можно записать

$$U_\text{п}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\Delta\omega, z, t)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega),$$

$$V_\text{п}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega), \qquad (15.4.10)$$

где $g(\Delta\omega)$ — нормированная функция распределения, описывающая неоднородное уширение линии перехода.

Полная поляризация дается выражением (15.4.2), в котором $U_\text{п}$ и $V_\text{п}$ имеют вид (15.4.10). Если же обратиться к (15.4.9), то поляризацию можно записать как

$$P(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Delta\omega, z, t)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega) =$$

$$= N\mu \int_{-\infty}^{\infty} [\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) + \text{к. с.}]\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega).$$

Сравнивая это выражение и (15.4.2), находим, что

$$\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) = \frac{1}{2N\mu} [u(\Delta\omega, z, t) + iv(\Delta\omega, z, t)]\, e^{i(k_0 z - \omega_0 t + \varphi)}. \qquad (15.4.11)$$

Подставляя (15.4.11) в (15.4.7) и разделяя затем действительную и мнимую части, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\left(\Delta\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -u\left(\Delta\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{\mu e(z, t)}{\hbar} w, \qquad (15.4.12)$$

в которых

$$w(\Delta\omega, z, t) = N\mu [\rho_{11}(\Delta\omega, z, t) - \rho_{22}(\Delta\omega, z, t)] \qquad (15.4.13)$$

— умноженная на μ разность населенностей, отнесенная к единице объема и единичному частотному интервалу. Подставляя (15.4.1) и (15.4.11) в (15.4.6) и пренебрегая членами, представляющими колебания с частотой $2\omega_0$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} e(z, t) v. \tag{15.4.14}$$

Уравнения (15.4.12) и (15.4.14) для амплитуд поляризации u, v и для нормированной разности населенностей w идентичны уравнениям Блоха в отсутствие релаксации (см. [1], гл. 8]. Дополняя их феноменологическими релаксационными членами с характерными временами T_1 и T_2, введенными в § 8.1, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= v\left(\Delta\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{u}{T_2}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -u\left(\Delta\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{\mu e}{\hbar} w - \frac{v}{T_2}, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\mu e}{\hbar} v - \frac{w - w_0}{T_1}.
\end{aligned} \tag{15.4.15}$$

С помощью (15.4.10) уравнения для поля (15.4.4) перепишутся в виде

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\omega_0 c \mu_0}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega),$$

$$e\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{\omega_0 c \mu_0}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} u(\Delta\omega, z, t)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega). \tag{15.4.16}$$

Уравнения (15.4.15) вместе с (15.4.16) образуют замкнутую систему, описывающую при заданных граничных и начальных условиях поведение среды и поля, взаимодействующих между собой. Предположим, что $g(\Delta\omega)$ является четной функцией. Это имеет последствия, а именно:

$u(\Delta\omega, z, t)$ — нечетная функция,
$v(\Delta\omega, z, t)$ — четная функция,
$w(\Delta\omega, z, t)$ — четная функция,
$\varphi(z, t) = 0$.

Ограничимся рассмотрением импульсов предельно короткой длительности, в сравнении с которой времена релаксации можно считать бесконечно большими, и положим $T_1 = \infty$ и $T_2 = \infty$. При этом си-

стема уравнений (15.4.15) и (15.4.16) значительно упрощается и принимает вид

$$\partial u/\partial t = \Delta\omega v,\ \partial v/\partial t = -\Delta\omega u + (\mu/\hbar)e w,\ \partial w/\partial t = -(\mu/\hbar)e v, \quad (15.4.17)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\omega_0 c \mu_0}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega).$$

Первые три уравнения из системы (15.4.17) можно рассматривать как компоненты векторного соотношения

$$\partial \mathbf{r}/\partial t = \mathbf{T}\times\mathbf{r}, \quad (15.4.18)$$

в котором

$$\mathbf{r} = (1/N\mu)(\mathbf{e}_u u + \mathbf{e}_v v + \mathbf{e}_w w), \quad (15.4.19)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_u(\mu e/\hbar) - \mathbf{e}_w \Delta\omega. \quad (15.4.20)$$

Оно описывает прецессию псевдовектора $\mathbf{r}$ вокруг $\mathbf{T}$ в обобщенном пространстве $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$. Уравнение (15.4.18) может быть идентифицировано с (15.1.8), поскольку имеется соответствие $r_u \to r_1$, $r_v \to -r_2$, $r_w \to -r_3$, вытекающее непосредственно из исходных положений. Заметим также, что $\mathbf{e}$ занимает в соотношении (15.4.20) то же место, что $2E_{x,y}$ в соотношениях (15.1.17). Отличие объясняется тем, что сейчас мы оперируем с полем, имеющим линейную, а не круговую поляризацию.

Теорема площадей. Используя (15.4.17), получим важный результат, известный под названием теоремы «площадей». Но прежде установим следующие два положения.

1. Для атомов с $\Delta\omega = 0$ справедливы соотношения

$$u(0, z, t) = 0, \quad v(0, z, t) = w_0 \sin\theta(z, t),$$
$$w(0, z, t) = w_0 \cos\theta(z, t). \quad (15.4.21)$$

Согласно (15.4.18)—(15.4.20) величина

$$\theta(z, t) = \frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} e(z, t')\, dt' \quad (15.4.22)$$

представляет собой угол нутации вектора $\mathbf{r}(\Delta\omega = 0, z, t)$ относительно оси $\mathbf{e}_u$.

2. Если $e(z, t) = 0$ при $t \geqslant t_0$, то в этом временном интервале

$$u(\Delta\omega, z, t) = u_0 \cos[\Delta\omega(t - t_0)] + v_0 \sin[\Delta\omega(t - t_0)],$$
$$v(\Delta\omega, z, t) = -u_0 \sin[\Delta\omega(t - t_0)] + v_0 \cos[\Delta\omega(t - t_0)], \quad (15.4.23)$$
$$w(\Delta\omega, z, t) = w(\Delta\omega, z, t_0),$$

где $u_0 = u(\Delta\omega, z, t_0)$, $v_0 = v(\Delta\omega, z, t_0)$.

Доказательство 1. При $\Delta\omega = 0$, полагая $u(0, z, -\infty) = v(0, z, -\infty) = 0$, из (15.4.17) имеем

$$\partial u/\partial t = 0 \text{ и } u(0, z, t) = 0,\ \partial v/\partial t = (\mu/\hbar)e w,\ \partial w/\partial t = -(\mu/\hbar)e v \quad (15.4.24)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(v^2+w^2)=2v\frac{\partial v}{\partial t}+2w\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{2\mu}{\hbar}e(vw-vw)=0$$

и

$$v^2+w^2=w_0^2. \qquad (15.4.25)$$

Из последнего уравнения системы (15.4.24) и из соотношения (15.4.25) вытекает, что

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\mu}{\hbar}e\sqrt{w_0^2-w^2}, \qquad \frac{dw}{\sqrt{w_0^2-w^2}}=-\frac{\mu}{\hbar}edt.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от $-\infty$ до t, получаем

$$-\arccos\frac{w}{w_0}\Big|_{w_0}^{w}=-\arccos\frac{w}{w_0}=-\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}e(z,t')\,dt',$$

откуда

$$w(0,z,t)=w_0\cos\left[\frac{\mu}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}e(z,t')\,dt'\right]=w_0\cos\theta(z,t)$$

и, наконец, $v=\sqrt{w_0^2-w_0^2\cos^2\theta}=w_0\sin\theta(z,t)$.

Доказательство 2. В случае $e(z,t)=0$ для $t>t_0$ система уравнений (15.4.17) упрощается:

$$\partial u/\partial t=(\Delta\omega)v,\ \partial v/\partial t=-(\Delta\omega)u,\ \partial w/\partial t=0. \qquad (15.4.26)$$

Действуя аналогично тому, как при доказательстве 1, приходим к уравнению $\partial(u^2+v^2)/\partial t=0$, интеграл которого $u^2+v^2=u_0^2+v_0^2$, т. е. $v=\sqrt{u_0^2+v_0^2-u^2}$.

Первое из уравнений (15.4.26) теперь можно записать как $du/\sqrt{u_0^2+v_0^2-u^2}=(\Delta\omega)dt$. Интегрируя его в пределах от t_0 до t, получаем

$$\arccos\left[(u/\sqrt{u_0^2+v_0^2})\right]_{u_0}^{u}=(\Delta\omega)(t-t_0)$$

и далее

$$u/\sqrt{u_0^2+v_0^2}=\cos\left[-(\Delta\omega)(t-t_0)+\arccos(u_0/\sqrt{u_0^2+v_0^2})\right].$$

Поскольку

$$\sin(\arccos u_0/\sqrt{u_0^2+v_0^2})=v_0/\sqrt{u_0^2+v_0^2},$$

мы приходим к выражениям

$$u=u_0\cos[(\Delta\omega)(t-t_0)]+v_0\sin[(\Delta\omega)(t-t_0)],$$

$$v=\sqrt{u_0^2+v_0^2-u^2}=v_0\cos[(\Delta\omega)(t-t_0)]-u_0\sin[(\Delta\omega)(t-t_0)],$$

совпадающим с (15.4.23).

Теперь можно приступить к доказательству теоремы площадей. Теорема может быть сформулирована в виде уравнения

$$dA/dz = (-\alpha/2)\sin A. \qquad (15.4.27)$$

Площадь импульса A дается формулой

$$A(z) = \lim_{t\to\infty} \theta(z, t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e(z, t')\, dt', \qquad (15.4.28)$$

а коэффициент α — выражением

$$\alpha = \omega_0 \pi \mu_0 N \mu^2 c g(0)/n\hbar. \qquad (15.4.29)$$

Здесь предположено, что $e(z, t) \to 0$ при $t \to \infty$. Через N в (15.4.29) обозначена плотность поглощающих атомов.

Доказательство (15.4.27) начнем с дифференцирования (15.4.28):

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial z} e(z, t')\, dt'.$$

Подстановка $\partial e/\partial z$ из последнего уравнения системы (15.4.17) дает

$$\frac{dA}{dz} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' \left\{ -\frac{\omega_0 c\mu_0}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t') \times \right.$$

$$\left. \times g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega) - \frac{n}{c} \frac{\partial e}{\partial t'} \right\} = \lim_{t\to\infty} \left\{ -\frac{n\mu}{c\hbar} [e(z, t) - e(z, -\infty)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_0 c\mu_0 \mu}{2n\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega)\, g(\Delta\omega) \int_{-\infty}^{t} dt'\, v(\Delta\omega, z, t') \right\}. \qquad (15.4.30)$$

Выражение в квадратных скобках обращается в нуль, так как $e(z, +\infty) = e(z, -\infty)$. Используем первое из уравнений (15.4.17) для замены $v(\Delta\omega, z, t')$ в подынтегральном выражении:

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\omega_0 c\mu_0 \mu}{2n\hbar} \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{\partial u(\Delta\omega, z, t')}{\partial t'} =$$

$$= -\frac{\omega_0 c\mu_0 \mu}{2n\hbar} \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} [u(\Delta\omega, z, t) - u(\Delta\omega, z, -\infty)] =$$

$$= \frac{\omega_0 c\mu_0 \mu}{2n\hbar} \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} u(\Delta\omega, z, t).$$

Здесь учтено, что $u(\Delta\omega, z, -\infty) = 0$.

Выберем t_0 таким, чтобы $e(z, t) \approx 0$ при $t \geqslant t_0$, и подставим первое из выражений (15.4.23) в последнее уравнение. В результате получаем

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\omega_0 c\mu_0 \mu}{2n\hbar} \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} \{u(\Delta\omega, z, t)\cos[\Delta\omega(t-t_0)] +$$

$$+ v(\Delta\omega, z, t_0)\sin[\Delta\omega(t-t_0)]\}\, d(\Delta\omega).$$

Благодаря осцилляторному характеру функций $\cos[\Delta\omega(t-t_0)]$ и $\sin[\Delta\omega(t-t_0)]$ в пределе $t\to\infty$ вклад в интеграл вносит лишь малый частотный интервал вблизи $\Delta\omega = 0$. Поскольку $u(\Delta\omega, z, t_0)$ является нечетной функцией $\Delta\omega$, мы можем аппроксимировать ее в окрестности $\Delta\omega = 0$ разложением $u(\Delta\omega, z, t_0) \approx a_1\Delta\omega + a_2(\Delta\omega)^3$. Интеграл, содержащий u, теперь берется:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega)\frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} u(\Delta\omega, z, t_0)\cos[\Delta\omega(t-t_0)] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{g(0)\, a_1 \sin[\Delta\omega(t-t_0)]}{t-t_0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Поскольку $v(\Delta\omega, z, t_0)$ является четной функцией $\Delta\omega$, имеем

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\omega_0 c\mu_0 \mu}{2n\hbar} v(0, z, t_0)\, g(0) \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega)\frac{\sin[\Delta\omega(t-t_0)]}{\Delta\omega}.$$

Последний интеграл равен π. Далее из (15.4.21) и (15.4.28) находим $v(0, z, t_0) = w_0 \sin\theta(z, t_0) = w_0 \sin A$ и переписываем последнее выражение для dA/dz в форме $dA/dz = (-\alpha/2)\sin A$, где α дается выражением (15.4.29). Полагаем, что все атомы первоначально находятся в основном состоянии, т. е. $w = N\mu$, тогда из (15.4.13) следует $\rho_{11}(\Delta\omega, z, -\infty) = 1$. Таким образом, доказана справедливость (15.4.27).

Познакомимся теперь с некоторыми следствиями из теоремы площадей. В случае слабых импульсов с малой площадью $\sin A \approx A$ и решение (15.4.27) имеет вид $A(z) = A(0)\exp[-(\alpha/2)z]$, а энергия импульса затухает по закону

$$\mathscr{E}(z) = \mathscr{E}(0)\, e^{-\alpha z}. \qquad (15.4.31)$$

Декремент затухания слабого импульса α, определяемый выражением (15.4.29), в точности тот же, что и для слабого непрерывного монохроматического излучения с частотой ω_0.

В общем случае импульса произвольной площади, как следует из (15.4.27), стационарные решения $(dA/dz) = 0$ возможны при $A = m\pi$, где $m = 1, 2, 3\ldots$ Решения, соответствующие нечетным m, нестабильны по отношению к малым вариациям A, в то время как четным m отвечают устойчивые решения. Импульс с заданной на-

чальной площадью эволюционирует таким образом, что его площадь стремится к величине, соответствующей ближайшему четному m.

Этот процесс иллюстрируется рис. 15.12, на котором показана эволюция импульсов с начальными площадями $A(0) = 0{,}9\pi$ и $A(0) = 1{,}1\ \pi$. На рис. 15.12, *б* приведены результаты расчета на ЭВМ формы импульсов и их площадей в различных точках z. Качественное объяснение представленного на рисунке уширения импульса по мере распространения вдоль оси z основывается на простых энергетических соображениях и поэтому предоставляется читателю.

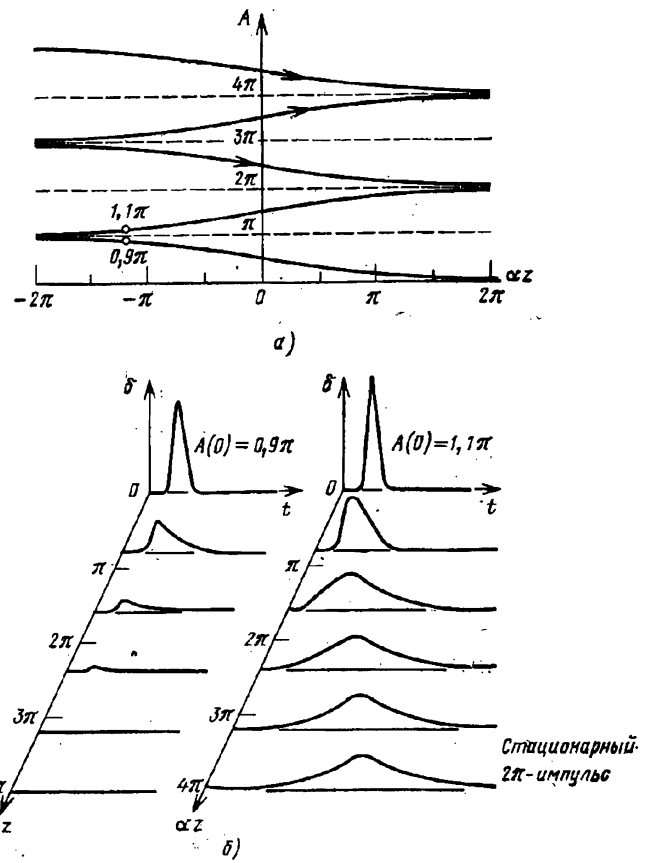


Рис. 15.12. Иллюстрация к теореме площадей в теории самоиндуцированной прозрачности:

а — ветви решения уравнения (15.4.27). Началу среды может соответствовать любая точка z. Для поглощающей среды с $\alpha>0$ площадь импульса по мере роста z стремится к ближайшему из значений, равных четному числу π. Решения, соответствующие площади импульса, равной четному и нечетному числу π, являются соответственно устойчивыми и неустойчивыми. В усиливающей среде эволюция происходит в сторону уменьшающихся z и устойчивыми оказываются решения, соответствующие площади, равной нечетному числу π [12]; *б* — численные решения, показывающие эволюцию импульса в среде при $A(0)=0{,}9\pi$ и $A(0)=1{,}1\pi$

Относительно $A(z)$ уже было сказано, что эта величина соответствует углу прецессии псевдовектора $\mathbf{r}$ ($\Delta\omega = 0, z$). Для стационарного импульса, у которого $A = 2\pi$, атомы с $\Delta\omega = 0$ полностью переводятся в возбужденное состояние головной частью импульса и вновь возвращаются в основное состояние к концу импульса. Детально этот процесс будет обсужден ниже.

Стационарные решения. Мы установили, что площадь импульса стремится, в зависимости от начального значения, к ближайшей величине из последовательности $2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, 3...$ Ниже будет показано, что форма импульса и его ширина также становятся стационарными, и будут получены выражения для стационарных величин. Предположим, что при этом импульсы распространяются со скоростью $v_и$. Стационарные решения для u, v, w и e должны быть функциями только одной переменной

$$\vartheta = t - z/v_и. \tag{15.4.32}$$

Скорость импульса $v_и$ подлежит определению. Для произвольной функции $f(\vartheta)$ справедливы соотношения

$$\partial f/\partial t = df/d\vartheta, \quad \partial f/\partial z = (-1/v_и)df/d\vartheta.$$

Уравнения движения (15.4.17) в новых переменных запишутся как

$$\frac{du}{d\vartheta} = (\Delta\omega)v, \quad \frac{dv}{d\vartheta} = -(\Delta\omega)u + \frac{\mu}{\hbar}ew, \tag{15.4.33}$$

$$\frac{dw}{d\vartheta} = -\frac{\mu}{\hbar}ev,$$

$$\left(\frac{n}{c} - \frac{1}{v_и}\right)\frac{de}{e\vartheta} = -\frac{\omega_0 c\mu_0}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, \vartheta)\, g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega).$$

Решения (15.4.33) имеют вид

$$u(\Delta\omega, z, t) = \frac{2N\mu\tau_и\,\Delta\omega}{1+(\Delta\omega)^2\tau_и^2}\operatorname{sch}\left(\frac{t-z/v_и}{\tau_и}\right),$$

$$w(\Delta\omega, z, t) = N\mu - 2N\mu\frac{1}{1+(\Delta\omega)^2\tau_и^2}\operatorname{sch}^2\left(\frac{t-z/v_и}{\tau_и}\right),$$

$$v(\Delta\omega, z, t) =$$

$$= -2N\mu\frac{1}{1+(\Delta\omega)^2\tau_и^2}\operatorname{th}\left(\frac{t-z/v_и}{\tau_и}\right)\operatorname{sch}\left(\frac{t-z/v_и}{\tau_и}\right),$$

$$e(z, t) = \frac{2\hbar}{\mu\tau_и}\operatorname{sch}\left(\frac{t-z/v_и}{\tau_и}\right). \tag{15.4.34}$$

Ширина импульса $\tau_и$ является *произвольной* величиной. Скорость импульса $v_и$ дается выражением

$$\frac{1}{v_и} = \frac{n}{c} + \frac{\omega_0 c\mu_0 N\mu^2 \tau_и^2}{2n\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{1+(\Delta\omega)^2\tau_и^2} d(\Delta\omega) =$$

$$= \frac{n}{c} + \frac{\alpha\tau_и^2}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{1+(\Delta\omega)^2\tau_и^2} d(\Delta\omega), \qquad (15.4.34a)$$

в котором α определяется по формуле (15.4.29). Убедимся теперь в справедливости (15.4.34).

Предположим, что решение для $v(\Delta\omega, \vartheta)$ имеет вид

$$v(\Delta\omega, \vartheta) = v(\vartheta) f(\Delta\omega), \qquad (15.4.35)$$

где $v(\vartheta)$ и $f(\Delta\omega)$ подлежат определению, а $f(0)$ произвольно выбрано равным единице. Выражение (15.4.35) определяет форму всех других переменных. Первое уравнение (15.4.33) можно записать следующим образом: $du/d\vartheta = v(\vartheta)[\Delta\omega f(\Delta\omega)]$. Интегрирование этого уравнения приводит к

$$u(\Delta\omega, \vartheta) = \left[\int_{-\infty}^{\vartheta} v(\vartheta')\, d\vartheta'\right][\Delta\omega f(\Delta\omega)] = u(\vartheta) f(\Delta\omega)\, \Delta\omega,$$

если учесть, что $u(\Delta\omega, -\infty) = 0$. Из третьего уравнения системы (15.4.33) следует

$$dw(\Delta\omega, \vartheta)/d\vartheta = -(\mu/\hbar) e v(\Delta\omega, \vartheta) = -(\mu/\hbar) e(\vartheta) v(\vartheta) f(\Delta\omega).$$

После интегрирования от $-\infty$ до ϑ с учетом того, что $w(\Delta\omega, -\infty) = N\mu$, получаем

$$w(\Delta\omega, \vartheta) = N\mu - \frac{\mu}{\hbar} f(\Delta\omega) \int_{-\infty}^{\vartheta} e(\vartheta') v(\vartheta')\, d\vartheta' = N\mu - w(\vartheta) f(\Delta\omega).$$

Наконец, последнее из уравнений (15.4.33) преобразуется к виду

$$\frac{de(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{\omega_0 c\mu_0}{2n(1/v_и - n/c)} v(\vartheta) \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega) =$$

$$= \frac{\hbar}{N\mu^2\tau_и^2} v(\vartheta),$$

где

$$\frac{1}{\tau_и^2} = \frac{\omega_0 c\mu_0 N\mu^2}{2n\hbar(1/v_и - n/c)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega)\, d(\Delta\omega).$$

Таким образом, уравнения движения сводятся к системе

$$du(\vartheta)/d\vartheta = v(\vartheta),$$

$$\frac{dv(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{1}{f(\Delta\omega)}\left[-u(\vartheta)(\Delta\omega)^2 f(\Delta\omega) + \right.$$

$$\left. + e(\vartheta)\frac{N\mu^2}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} e(\vartheta) w(\vartheta) f(\Delta\omega)\right], \qquad (15.4.36)$$

$$dw(\vartheta)/d\vartheta = (\mu/\hbar) e(\vartheta) v(\vartheta), \quad de(\vartheta)/d\vartheta = (\hbar/N\mu^2\tau_и^2) v(\vartheta).$$

Эти уравнения получаются из (15.4.33) и соотношений

$$u = u(\vartheta)\Delta\omega f(\Delta\omega), v = v(\vartheta) f(\Delta\omega), w = N\mu - w(\vartheta) f(\Delta\omega), \quad (15.4.37$$

выведенных выше.

Из первого и последнего уравнений (15.4.36) находим

$$\frac{du}{d\vartheta} = v(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{N\mu^2\tau_и^2}{\hbar} e(\vartheta)\right), \qquad (15.4.38)$$

$$u(\vartheta) = \frac{N\mu^2\tau_и^2}{\hbar} e(\vartheta), \qquad (15.4.39)$$

имея в виду, что $u(-\infty) = e(-\infty) = 0$. Аналогично получаем

$$\frac{dw}{d\vartheta} = \frac{\mu}{\hbar} e(\vartheta) \frac{N\mu^2\tau_и^2}{\hbar} \frac{de(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{N\mu^3\tau_и^2}{2\hbar^2} \frac{d}{d\vartheta} e^2(\vartheta), \qquad (15.4.40)$$

откуда следует

$$w(\vartheta) = \frac{N\mu^3\tau_и^2}{2\hbar^2} e^2(\vartheta), \qquad (15.4.41)$$

поскольку $w(-\infty) = e(-\infty) = 0$. И, наконец, подставляя только что полученные выражения для $u(\vartheta)$ и $w(\vartheta)$ во второе из уравнений (15.4.36), получаем

$$\frac{dv(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{N\mu^2\tau_и^2}{\hbar} e(\vartheta)(\Delta\omega)^2 + \frac{N\mu^2}{\hbar f(\Delta\omega)} e(\vartheta) - \frac{N\mu^4\tau_и^2}{2\hbar^3} e^3(\vartheta) =$$

$$= -\frac{N\mu^4\tau_и^2}{2\hbar^3} e^3(\vartheta) + \frac{N\mu^2}{\hbar} e(\vartheta)\left[\frac{1}{f(\Delta\omega)} - (\Delta\omega)^2\tau_и^2\right]. \qquad (15.4.42)$$

Последнее справедливо только при условии, что член в квадратных скобках не зависит от $\Delta\omega$, т. е. $1/f(\Delta\omega) - (\Delta\omega)^2\tau_и^2 = \text{const}$ и, следовательно,

$$f(\Delta\omega) = [1 + (\Delta\omega)^2\tau_и^2]^{-1} \qquad (15.4.43)$$

в соответствии с выбранным условием нормировки $f(0) = 1$.

Мы должны теперь найти решение для $e(\vartheta)$. С помощью (15.4.18), (15.4.19) и начальных условий $u(-\infty) = v(-\infty) = 0$, $\rho_{11}(-\infty) = 1$, можно показать, что

$$u^2 + v^2 + w^2 = w_0^2 = N^2\mu^2,$$

а воспользовавшись (15.4.37), перейти к

$$u^2 + v^2 + w^2 = u^2(\Delta\omega)^2 f^2(\Delta\omega) + v^2 f^2(\Delta\omega) + N^2\mu^2 - \\ - 2wf(\Delta\omega)N\mu + w^2 f^2(\Delta\omega).$$

Приравнивая друг другу два последних выражения, исключая из результата u и w с помощью (15.4.39), (15.4.41) и разрешая относительно v, приходим к формуле

$$v = \frac{N\mu^2\tau_и}{\hbar} e \sqrt{1 - \left(\frac{\mu\tau_и}{2\hbar} e\right)^2}. \qquad (15.4.44)$$

В соответствии с последним из уравнений (15.4.36)

$$v = \frac{N\mu^2\tau_и^2}{\hbar}\frac{de}{d\vartheta}$$

и, следовательно,

$$\frac{de}{d\vartheta} = \frac{1}{\tau_и} e \sqrt{1 - \left(\frac{\mu\tau_и}{2\hbar} e\right)^2}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать в пределах от ϑ_0 до ϑ, воспользовавшись табличным интегралом

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}} = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2x^2}}{ax}\right).$$

В результате имеем

$$\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\tau_и} = -\ln\left[\frac{1+\sqrt{1-[(\mu\tau_и/2\hbar)\,e]^2}}{(\mu\tau_и/2\hbar)\,e}\right]_{e(\vartheta_0)}^{e(\vartheta)}$$

или

$$\exp[-(\vartheta-\vartheta_0)/\tau_и] = \frac{1+\sqrt{1-[(\mu\tau_и/2\hbar)\,e]^2}}{1+\sqrt{1-[(\mu\tau_и/2\hbar)\,e(\vartheta_0)]^2}}\frac{e(\vartheta_0)}{e(\vartheta)},$$

так что

$$\frac{e\exp[-(\vartheta/\tau_и)]}{1+\sqrt{1-[(\mu\tau_и/2\hbar)\,e]^2}} = \frac{\exp[-(\vartheta_0/\tau_и)]\,e(\vartheta_0)}{1+\sqrt{1-[(\mu\tau_и/2\hbar)e(\vartheta_0)]^2}}.$$

Поскольку ϑ_0 произвольная величина, правая часть последнего равенства не должна зависеть от нее. Обозначив правую часть через B, перепишем это равенство в форме

$$Be^{\vartheta/\tau_и}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\mu\tau_и}{2\hbar} e\right)^2}\right] = e$$

или, чуть иначе,

$$e - Be^{\vartheta/\tau_и} = Be^{\vartheta/\tau_и}\sqrt{1-\left(\frac{\mu\tau_и}{2\hbar} e\right)^2}.$$

Возводя последнее равенство в квадрат и разрешая его относительно e, находим

$$e(\vartheta) = 2\left[\frac{1}{B}\,e^{-\vartheta/\tau_и} + \frac{\mu^2\tau_и^2}{4\hbar^2}\,Be^{\vartheta/\tau_и}\right]^{-1}.$$

Введем новую постоянную ϑ_p посредством соотношения

$$B = \frac{2\hbar}{\mu\tau_и}\,e^{-\vartheta_p/\tau_и}$$

с тем, чтобы выражение для $e(\vartheta)$ приобрело вид

$$e(\vartheta) = \frac{2\hbar}{\mu\tau_и}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\vartheta-\vartheta_p}{\tau_и}\right).$$

Поскольку величина ϑ_p определяет только начало отсчета времени, мы можем считать ее равной нулю. Вспомнив определение $\vartheta = t - z/v_и$, перепишем последнее соотношение в форме, совпадающей с (15.4.34):

$$e(z, t) = \frac{2\hbar}{\mu\tau_и}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t-z/v_и}{\tau_и}\right). \qquad (15.4.45)$$

Остальные соотношения из (15.4.34) находятся подстановкой (15.4.45) в (15.4.39), (15.4.41) и (15.4.44).

График огибающей стационарного импульса $e(z, t)$, построенный по формуле (15.4.45), представлен на рис. 15.13. По оси абсцисс может быть отложено либо время, если рассматривается прохождение импульса через фиксированную точку пространства, либо пространственная координата z, если фиксируется момент времени. Для определенности будем считать, что по оси абцисс отложено время. Верхняя кривая демонстрирует, как поворачивается псевдовектор $\mathbf{r}$, относящийся к атому с $\Delta\omega$ в точке z. Ордината φ дается выражением (15.4.22). Атом, первоначально находившийся в основном состоянии, момент (1) на графике, постепенно уходит из него, и в момент (5) псевдовектор оказывается уже в плоскости u—v. В момент (6), соответствующий середине импульса, атом находится в возбужденном состоянии, а к моменту (11) он вновь возвращается в основное состояние. В итоге никакого обмена энергией с полем в этом случае не происходит.

Атом с $\Delta\omega \neq 0$ никогда не достигает верхнего уровня. В этом убеждает второе уравнение системы (15.4.34), из которого следует, что $w(\Delta\omega \neq 0,\ t = z/v_и) > -N\mu$. Такой атом тем не менее возвращается после окончания импульса в основное состояние, поскольку $w(\Delta\omega,\ t = \infty,\ z) = N\mu$. Следовательно, обмен энергией с полем равен нулю для всех атомов независимо от величины $\Delta\omega$, что согласуется с постоянством энергии стационарного импульса.

Скорость распространения огибающей импульса $v_и$ дается формулой (15.4.34а)

$$\frac{1}{v_и} = \frac{n}{c} + \frac{\alpha\tau_и^2}{2\pi g(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\Delta\omega)}{1+(\Delta\omega)^2\tau_и^2}\,d(\Lambda\omega). \qquad (15.4.46)$$

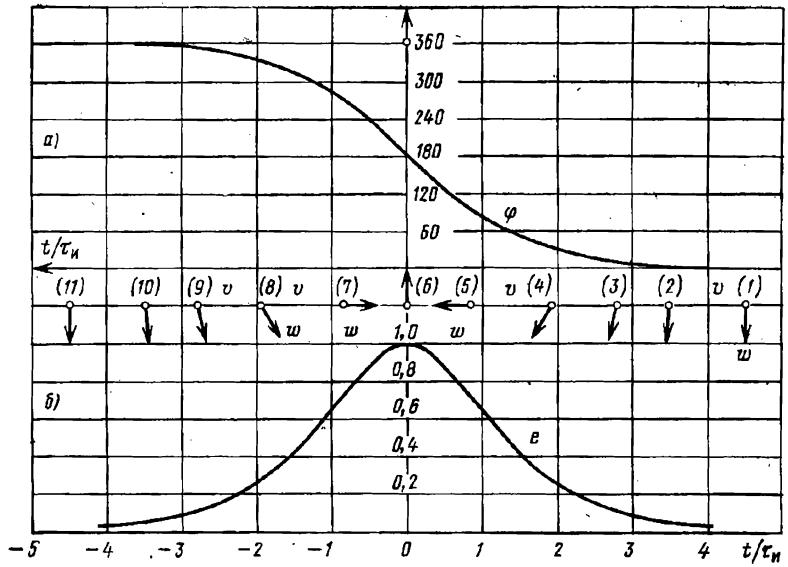


Рис. 15.13. Изменение положения вектора r со временем для первоначально невозбужденного атома ($\Delta\omega=0$) (*а*) и форма стационарного импульса, распространяющегося в поглощающей среде (*б*)

Предположим, что функция распределения имеет лоренцеву форму

$$g(\Delta\omega)=\frac{\Delta\omega_{ат}}{2\pi\left[(\Delta\omega)^2+(\Delta\omega_{ат}/2)^2\right]},$$

где $\Delta\omega_{ат}$ — полная ширина $g(\Delta\omega)$ по уровню 0,5. В случае широкой линии с $\Delta\omega_{ат}\tau_и \gg 1$ (15.4.46) сводится к

$$\frac{1}{v_и}=\frac{n}{c}+\frac{\alpha}{2}\tau_и, \qquad (15.4.47)$$

тогда как для узких линий, для которых $\Delta\omega_{ат}\tau_и \ll 1$, интегрирование (15.4.46) приводит к

$$\frac{1}{v_и}=\frac{n}{c}+\frac{\alpha\Delta\omega_{ат}}{4}\tau_и^2. \qquad (15.4.48)$$

Пример. Рассмотрим импульс длительностью $\tau_и = 5\cdot10^{-9}$ с, распространяющийся в газе с показателем поглощения на резонансной частоте $\alpha = 10^4$ м$^{-1}$. Однородную ширину линии $\Delta\nu_{ат} = (1/2\pi)\Delta\omega_{ат}$ примем равной 1 МГц. Подстановка этих цифр в 15.4.48) дает

$$\frac{1}{v_и}=\frac{n}{3\cdot10^8}+\frac{1180}{3\cdot10^8} \text{ или } v_и \approx \frac{c}{1180}.$$

Скорость распространения импульса более чем на три порядка меньше скорости света.

Хорошим примером самоиндуцированной прозрачности служит эксперимент, в котором исследовалось прохождение импульса излучения лазера на ^{202}Hg через пары ^{87}Rb, обладающего резонансным переходом с $\lambda = 794{,}77$ нм [14]. Ярко выраженный эффект самоиндуцированной прозрачности наблюдался при длительности импульса $\tau_и \approx 7 \cdot 10^{-9}$ с, малой по сравнению с временем расфазировки атомов вследствие соударений ($\approx 55 \cdot 10^{-9}$ с) и временем спонтанной релаксации ($\approx 40 \cdot 10^{-9}$с).

Сравнение измеренного коэффициента передачи энергии с величиной, предсказываемой теорией, проведено на рис. 15.14. Отметим, что достигнута передача через ячейку почти 90% энергии импульса, тогда как коэффициент передачи слабого сигнала составляет $\exp(-5) \approx 0{,}7\%$.

Когерентное распространение импульса в усиливающей среде также подчиняется закону (15.4.27), с той лишь разницей, что в данном случае $N < 0$ и согласно (15.4.29) $\alpha < 0$. Из этого следует, что площадь стабильных импульсов теперь оказывается равной $A = \pi$, 3π, 5π ... Рис. 15.12, *а* и *б* по-прежнему верны, однако эволюции импульса в данном случае соответствует движение по графикам в $-z$-направлении. Любой $(2m + 1)\pi$-импульс, в частности π-им-

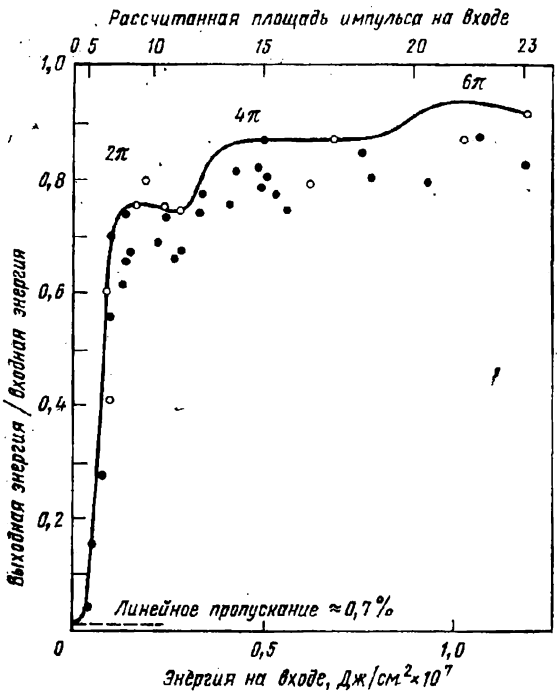


Рис. 15.14. Самоиндуцированная прозрачность в парах рубидия.

Сплошная кривая — численное решение в приближении неограниченной плоской волны. Черными точками нанесены экспериментальные данные, полученные с выходной апертурой 200 мкм, когда расчетное приближение достаточно корректно. Длительность входного импульса $\tau_и \approx 7 \cdot 10^{-9}$ с. Коэффициент пропускания слабого сигнала ячейкой составляет 0,7% [14]

пульс, распространяющийся в усиливающей среде, согласно (15.4.21), (15.4.22) оставляет позади себя атомы в основном энергетическом состоянии. По мере продвижения импульса его энергия возрастает. В связи с тем, что площадь импульса остается неизменной, его длительность должна сокращаться. Этот процесс можно представить, рассматривая смену картин на рис. 15.12, *б* в обратном порядке. Основное различие между двумя случаями состоит в том, что при когерентном распространении в поглощающей среде сохраняется неизменной площадь и форма импульса, а в усиливающей среде ширина импульса непрерывно уменьшается. В последнем случае энергия импульса возрастает до значения, при котором нельзя уже пренебрегать потерями в системе, и теория, развитая выше, нуждается в модификации [13].

Задачи

15.1. Покажите, что для атома, находящегося в начальный момент на нижнем уровне $|b\rangle$, так что $r_3(0) = -1$, траектория движения $\mathbf{r}(t)$ будет обратной по знаку траектории движения для атома, первоначально помещенного на верхний уровень $|a\rangle$.

15.2. Выведите формулы (15.1.29) и (15.1.30).

15.3. Вычислите дипольный момент ансамбля атомов, наведенный полем $E = E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{kr}) + E_1 \cos[(\omega_0 + \Delta)t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}]$, где ω_0 — частота атомного перехода, при условии, что $E_1 \ll E_0$ и все атомы первоначально находились в основном состоянии $|b\rangle$. Считая размеры образца много большими длины волны λ_0, покажите, что атомы будут излучать на частоте $\omega_0 - \Delta$ вдоль направления $2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$.

15.4. Удостоверьтесь в справедливости уравнения (15.1.21), взяв вместо $\mathbf{r}(t)$ произвольный вектор $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$.

Указание: возьмите

$$\mathbf{A}_R(t) = \begin{vmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix},$$

так что

$$\frac{d\mathbf{A}_R(t)}{dt} = T\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{dT}{dt}\mathbf{A},$$

где T — введенная выше матрица преобразования.

Глава 16

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ОПТИКУ. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

В главе 5 было рассмотрено распространение электромагнитного излучения в линейной среде, поляризация которой пропорциональна вызывающему ее электрическому полю. В данной главе мы обсудим некоторые следствия, вытекающие из нелинейности диэлектрических свойств определенных классов кристаллов. В этих средах, помимо линейного отклика, наводится поляризация, пропорциональная квадрату поля.

Нелинейность среды может привести к обмену энергией между электромагнитными полями различных частот. Укажем три наиболее важных приложения этого явления:

1) генерация второй гармоники, в процессе которой часть энергии световой волны частотой ω, проходя через кристалл, преобразуется в энергию световой волны частотой 2ω;

2) параметрическая генерация, при которой сильная волна накачки, имеющая частоту ω_3, вызывает в нелинейном кристалле одновременную генерацию излучения на частотах ω_1 и ω_2, причем $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$;

3) преобразование частоты вверх, когда слабый сигнал низкой частоты ω_1 преобразуется когерентно в сигнал высокой частоты ω_3 путем смешения с мощным лазерным излучением частоты $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$.

С понятием нелинейной восприимчивости мы уже сталкивались в §14.1 при изучении электрооптического эффекта. Этот эффект описывался посредством тензора r_{jlk}, который связывает изменение показателя преломления (точнее, постоянных эллипсоида показателя преломления) с приложенным полем:

$$\Delta (1/n^2)_{jl} = r_{jlk} E_k .$$

Линейный электрооптический эффект можно описывать и по-другому, выражая комплексную амплитуду поляризации на суммарной частоте $\omega + \Omega$ через произведение амплитуд электрического поля световой волны E^{ω} и низкочастотного электрического поля E^{Ω}:

$$P_j^{\omega' = \omega + \Omega} = d_{jkl}^{\omega' = \Omega + \omega} E_k^{\Omega} E_l^{\omega}. \qquad (16.0.1)$$

Тензор d, определяемый равенством (16.0.1), связан с электрооптическим тензором r соотношением

$$d_{jkl}^{\omega' = \Omega + \omega} = \frac{\varepsilon_j \varepsilon_l}{2\varepsilon_0} r_{jlk},$$

где ε_j и ε_l — главные значения тензора диэлектрической проницаемости на частоте ω. Последнее соотношение выводится так же, как (14.8.8). Различие состоит лишь в множителе 1/2 , отражающем тот факт, что в (16.0.1) используются комплексные амплитуды.

Точно так же описываются и оптические нелинейности среды, с которыми нам придется иметь дело ниже. Нужно лишь заменить низкую частоту Ω второй «оптической» частотой, которая расположена выше полосы «остаточных лучей». На таких частотах не могут быть возбуждены колебания ионов решетки, и поляризация на суммарной частоте возникает лишь за счет нелинейности электронных движений. Нелинейности эти малы, вследствие чего их изучение и использование стало возможным только с появлением лазеров (с их мощным и когерентным излучением).

Первые эксперименты в данной области относятся к 1961 г., когда было осуществлено удвоение частоты рубинового лазера в кристалле кварца [1].

16.1. Тензор нелинейной восприимчивости

Рассмотрим нелинейное взаимодействие двух электромагнитных полей. Одно из них, поляризованное в направлении j, описывается выражением

$$E_j^{\omega_1}(t) = \mathrm{Re}\left(E_j^{\omega_1} e^{i\omega_1 t}\right) = \frac{1}{2}\left(E_j^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \text{к.с.}\right), \qquad (16.1.1)$$

а второе, поляризованное в направлении k — выражением

$$E_k^{\omega_2}(t) = \mathrm{Re}\left(E_k^{\omega_2} e^{i\omega_2 t}\right). \qquad (16.1.2)$$

Если среда нелинейна, наличие этих двух полей может привести к появлению поляризации на частотах $n\omega_1 + m\omega_2$, где n и m — целые числа. Записав i-компоненту поляризации на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в виде

$$P_i^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}(t) = \mathrm{Re}\left(P_i^{\omega_3} e^{i\omega_3 t}\right), \qquad (16.1.3)$$

определим тензор нелинейной восприимчивости $d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}$ с помощью следующего соотношения для комплексных амплитуд:

$$P_i^{\omega_3} = d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2}, \qquad (16.1.4)$$

где подразумевается суммирование по всем повторяющимся индексам. Подобным же образом можно ввести тензор восприимчивости на разностной частоте $d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1-\omega_2}$:

$$P_i^{\omega_3} = d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1-\omega_2} E_j^{\omega_1} E_k^{-\omega_2}, \qquad (16.1.5)$$

где согласно (16.1.1) $E_k^{-\omega_2} = (E_k^{\omega_2})^*$. Подчеркнем, что тензор d_{ijk} отличен от нуля только в нецентросимметричных кристаллах. Действительно, в центросимметричном кристалле при смене знаков ком-

понент поля $E_j^{\omega_1}$ и $E_k^{\omega_2}$ должен измениться и знак компонент поляризации $P_i^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}$ без изменения их абсолютных значений. Используя далее соотношение (16.1.4), получаем

$$d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} = -d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2} \left(-E_j^{\omega_1}\right)\left(-E_k^{\omega_2}\right),$$

откуда следует, что $d_{ijk} \equiv 0$. Отсутствие центра инверсии является также необходимым условием наличия пьезоэлектрических свойств, поэтому можно ожидать, что пьезоэлектрики обладают квадратичной ($P \sim E^2$) нелинейностью. Прибегнув к той же аргументации, можно показать, что все кристаллы, жидкости и газы обладают кубичной оптической нелинейностью.

В большинстве нелинейных экспериментов используются кристаллы, прозрачные по всей области, в которой лежат частоты ω_1, ω_2 и ω_3. В этом случае гистерезисная зависимость P от E невозможна и P является однозначной функцией E. Следовательно, нелинейная поляризация может быть представлена в виде

$$P_i(t) = d_{ijk} E_j(t) E_k(t), \qquad (16.1.6)$$

причем d_{ijk} не зависит от частоты.

Мы можем поменять местами E_j и E_k в (16.1.6) поскольку нет физических причин, запрещающих это, и прийти к выводу, что $d_{ijk} = d_{ikj}$. Отсюда вытекает возможность замены двух индексов kj одним, как это принято в кристаллографии:

$$xx = 1, \quad yy = 2, \quad zz = 3,$$
$$yz = zy = 4, \quad xz = zx = 5, \quad xy = yx = 6.$$

В результате тензор d_{ij} заменяется матрицей 3×6, подействовав которой на одностолбцовую матрицу E^2, получим

$$\begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x^2 \\ E_y^2 \\ E_z^2 \\ 2E_z E_y \\ 2E_z E_x \\ 2E_x E_y \end{vmatrix}. \qquad (16.1.7)$$

Лишние (при отсутствии потерь) частотные индексы в d_{ijk} опущены.

Компоненты тензора d_{ij} удовлетворяют тем же соотношениям симметрии, что и компоненты пьезоэлектрического тензора и для данной точечной группы симметрии эти тензоры совпадают по форме, например, в кристалле KH_2PO_4 (KDP), который имеет точечную

группу симметрии $\bar{4}2m$, матрица d_{ij} выглядит следующим образом (см. табл. 14.1):

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{vmatrix}, \tag{16.1.8}$$

а компоненты нелинейной поляризации —

$$P_x = 2d_{14}E_zE_y,\ P_y = 2d_{14}E_zE_x,\ P_z = 2d_{36}E_xE_y. \tag{16.1.9}$$

16.2. Клейнмановские соотношения симметрии

Помимо накладываемых соотношениями симметрии ограничений на число независимых компонент d_{ij}, для кристаллов с электронным характером нелинейности, прозрачных во всем диапазоне частот нелинейного процесса, существуют дополнительные ограничения. Впервые они были сформулированы Клейнманом [3].

Для частот, существенно превышающих частоты колебаний ионов (т. е. выше полосы остаточных лучей), поляризация обусловлена, в основном, смещением электронов и вкладом движения ионов можно пренебречь. Если к тому же частоты взаимодействующих полей расположены много ниже области электронного поглощения (при отсутствии потерь),мы можем ввести поляризацию как однозначную функцию электрического поля. Эти предположения подтверждаются рассмотрением, проведенным в следующей главе в пределе $\omega \ll \omega_0$, $\Gamma = 0$ [см. (16.3.4) и (16.3.7)].

При выполнении указанных выше условий

$$\oint_c d(\mathbf{PE}) = 0,$$

где c — произвольный замкнутый контур в (E_x, E_y, E_z) - пространстве. Так как $d(\mathbf{PE}) = \mathbf{P}d\mathbf{E} + \mathbf{E}d\mathbf{P}$, то

$$-\oint_c \mathbf{P}d\mathbf{E} = \oint_c \mathbf{E}d\mathbf{P}. \tag{16.2.1}$$

Первая часть (16.2.1), как показано в § 5.1, представляет собой работу поля над поляризацией. Поскольку потери в среде отсутствуют, работа по замкнутому контуру равна нулю. Таким образом, $\oint_c \mathbf{E}d\mathbf{P}$ = изменение энергии = 0 и теперь из (16.2.1) следует

$$\oint_c \mathbf{P}d\mathbf{E} = 0. \tag{16.2.2}$$

Применение теоремы Стокса

$$\oint_c \mathbf{P}d\mathbf{E} = \int_s (\nabla_E \times \mathbf{P})\,\mathbf{n}\,ds_E$$

дает $\nabla_E \times \mathbf{P} = 0$ и можно ввести такую функцию $U(\mathbf{E})$, что

$$\mathbf{P} = -\nabla_E U(\mathbf{E}). \tag{16.2.3}$$

В неполярной среде низшая степень разложения $U(\mathbf{E})$ в ряд Тейлора — вторая:

$$U(\mathbf{E}) = -\frac{\varepsilon_0 \chi_{ij}}{2} \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j - \frac{2d_{ijk}}{3} \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k + \ldots, \qquad (16.2.4)$$

так что

$$P_i = -\frac{\partial U(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}_i} = \varepsilon_0 \chi_{ij} \mathbf{E}_j + 2d_{ijk} \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k. \qquad (16.2.5)$$

Поскольку физический смысл выражения (16.2.5) не меняется при перестановке компонент электрического поля, *все компоненты* d_{ijk}, *отличающиеся лишь порядком индексов, равны между собой.* Это утверждение известно как правило Клейнмана [3].

Заметим, что в отличие от условия $d_{ijk} = d_{ikj}$, продиктованного симметрией, соотношения Клейнмана справедливы лишь для сред без потерь. Тем не менее, поскольку большинство экспериментов нелинейной оптики проводятся в условиях отсутствия потерь, это соотношение имеет большое практические значение. В качестве примера возьмем коэффициент при $E_x E_y^2$ в (16.2.4). Правило Клейнмана утверждает, что $d_{xyy} = d_{yyx} = d_{yxy}$ или в сокращенных обозначениях § 16.1 $d_{12} = d_{26}$. Максимальное число независимых компонент d_{ijk} сократилось до 10:

$$\begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14}. \end{matrix} \qquad (16.2.6)$$

В случае же кристалла KDP, относящегося к точечной группе симметрии $\bar{4}2m$, число независимых компонент тензора d_{ijk} уменьшается с двух (14 и 36 в табл. 14.1) до одной, так как $d_{14} = d_{36}$.

16.3. Физическая природа нелинейных коэффициентов

При рассмотрении нелинейной восприимчивости Бломберген использовал модель ангармонического осциллятора [16]. Та же модель была применена Гарретом и Робинсоном [4] при выводе выражения для нелинейных коэффициентов в одномерном случае. Мы воспроизведем ниже основные результаты работы [4] и с их помощью проведем численные оценки величины d_{ij}.

В принятой модели предполагается, что отклик электронной системы на приложенное электрическое поле можно найти, считая, что электрон движется в непараболической потенциальной яме. Уравнение движения электрона имеет вид

$$\ddot{X} + \Gamma \dot{X} + \omega_0^2 X + DX^2 = \frac{eE_0}{2m} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \qquad (16.3.1)$$

где X — смещение из положения равновесия; mDX^2 — ангармоническая возвращающая сила [соответствующая члену $(m/3)DX^3$ в разложении потенциала]; $E_0 \cos \omega t$ — приложенное электрическое по-

ле; Γ — постоянная затухания. Поскольку нас интересует поляризация на частоте 2ω, будем искать решение в форме

$$X = \frac{1}{2}(q_1 e^{i\omega t} + q_2 e^{2i\omega t} + \text{к. с.}), \tag{16.3.2}$$

что после подстановки в (16.3.1) дает

$$-\frac{\omega^2}{2}\left(q_1 e^{i\omega t} + \text{к. с.}\right) - 2\omega^2 (q_2 e^{2i\omega t} + \text{к. с.}) +$$
$$+\frac{i\omega\Gamma}{2}(q_1 e^{i\omega t} - \text{к. с.}) + i\omega\Gamma (q_2 e^{2i\omega t} - \text{к. с.}) +$$
$$+\frac{\omega_0^2}{2}(q_1 e^{i\omega t} + q_2 e^{2i\omega t} + \text{к. с.}) + \frac{D}{4}(q_1^2 e^{2i\omega t} + q_2^2 e^{4i\omega t} + q_1 q_1^* +$$
$$+2q_1 q_2 e^{3i\omega t} + 2q_1 q_2^* e^{-i\omega t} + q_2 q_2^* + \text{к. с.}) =$$
$$= \frac{eE_0}{2m}(e^{i\omega t} + \text{к. с.}). \tag{16.3.3}$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{i\omega t}$ в обеих частях (16.3.3) и полагая, что $|Dq_2| \ll [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2]^{1/2}$, получаем

$$q_1 = \left(\frac{eE_0}{m}\right)\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}. \tag{16.3.4}$$

Линейная восприимчивость $\chi_л^{\omega}$ определяется равенством

$$P^{\omega}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}(\chi_л^{\omega} E_0 e^{i\omega t} + \text{к. с.}) = \frac{Ne}{2}(q_1 e^{i\omega t} + \text{к. с.}), \tag{16.3.5}$$

где N — число электронов в единице объема, дающих вклад в P. Отсюда следует, что

$$\chi_л^{\omega} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma]}. \tag{16.3.6}$$

Аналогичным образом найдем q_2. Приравнивая множители при $e^{2i\omega t}$ в обеих частях (16.3.3), получаем $q_2(-4\omega^2 + 2i\omega\Gamma + \omega_0^2) = -\frac{1}{2}Dq_1^2$, что с учетом (16.3.4) дает

$$q_2 = \frac{-De^2 E_0^2}{2m^2[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma]^2[(\omega_0^2 - 4\omega^2) + 2i\omega\Gamma]}. \tag{16.3.7}$$

Определяя нелинейную восприимчивость $d_{нел}^{2\omega}$ соотношением

$$P^{2\omega}(t) = \frac{1}{2}Ne(q_2 e^{2i\omega t} + \text{к. с.}) = \frac{1}{2}(d_{нел}^{2\omega} E_0^2 e^{2i\omega t} + \text{к. с.}), \tag{16.3.8}$$

получаем

$$d_{нел}^{2\omega} = \frac{-DNe^3}{2m^2[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma]^2[(\omega_0^2 - 4\omega^2) + 2i\omega\Gamma]}$$

или, используя (16.3.6),

$$d_{нел}^{2\omega} = \frac{mD(\chi_л^{\omega})^2 \chi_л^{2\omega}\varepsilon_0^2}{2N^2|e^3|}. \tag{16.3.9}$$

Параметр, определяемый соотношением

$$\delta^{2\omega} = \frac{d^{2\omega}_{\text{нел}}}{(\chi^{\omega}_{\text{л}})^2 \chi^{2\omega}_{\text{л}} \varepsilon_0^3}, \qquad (16.3.10)$$

равен

$$\delta^{2\omega} = \frac{mD}{2|e^3|N^2}. \qquad (16.3.11)$$

Этот результат впервые получен Гарретом и Робинсоном ([4]). Миллер [6] отметил, что аналогичный параметр в трехмерном случае

$$\delta_{ijk} = \frac{d^{2\omega}_{ijk}}{\chi^{2\omega}_{ii} \chi^{\omega}_{jj} \chi^{\omega}_{kk} \varepsilon_0^3} \qquad (16.3.12)$$

почти постоянен для большого числа кристаллов. Это хорошо видно из табл. 16.1, в которой приведены значения d_{ijk} и δ_{ijk} для некоторых кристаллов. В то время, как величина d_{ijk} варьируется в пределах четырех порядков (от кристалла ADP до кристалла Te), соответствующие величины δ сконцентрированы в интервале, границы которого лишь примерно в два раза отличаются от среднего значе-

Таблица 16.1

Нелинейные оптические коэффициенты некоторых кристаллов[1)]

Кристаллы	$d^{2\omega}_{ijk}$, 10^{-13} м/В	$\delta_{ijk}/4\pi$, 10^{-13} м/В	Кристаллы	$d^{2\omega}_{ijk}$, 10^{-13} м/В	$\delta_{ijk}/4\pi$, 10^{-13} м/В
$LiIO_3$	$d_{15}=4,4$		GaS	$d_{14}=72$	2,0
$NH_4H_2PO_4$	$d_{36}=0,45$	3,2	$BaTiO_3$	$d_{33}=6,4\pm0,5$	1,3
(ADP)	$d_{14}=0,50\pm$ $\pm0,02$	3,2		$d_{31}=18\pm2$	3,1
KH_2PO_3	$d_{36}=0,45\pm$ $\pm0,03$	3,4	$LiNbO_3$	$d_{15}=17\pm2$	2,9
(KDP)	$d_{14}=0,35$	3,4		$d_{15}=4,4$	1,4
KD_2PO_4	$d_{36}=0,42\pm$ $\pm0,02$	3,1	Te	$d_{22}=2,3\pm1,0$	0,66
	$d_{14}=0,42\pm$ $\pm0,02$	3,1	Se	$d_{11}=517$	0,8
KH_2AsO_4	$d_{36}=0,48\pm$ $\pm0,03$	2,9	$Ba_2NaNb_5O_{15}$	$d_{11}=130\pm30$	5,0
	$d_{14}=0,51\pm$ $\pm0,03$	3,1	Ag_3AsS_3	$d_{33}=10,4\pm0,7$	
Кварц	$d_{11}=0,37\pm$ $\pm0,02$	2,3	CdSe	$d_{32}=7,4\pm0,7$	
$AlPO_4$	$d_{11}=0,38\pm$ $\pm0,03$	2,5	$CdGeAs_2$	$d_{22}=22,5$	
ZnO	$d_{33}=6,5\pm0,2$	4,0	$AgGaSe_2$	$d_{36}=13,5$	
	$d_{31}=1,95\pm$ $\pm0,2$	1,3	$AgSbS_3$	$d_{31}=22,5\pm3$	
CdS	$d_{15}=2,1\pm0,2$	1,5	ZnS	$d_{36}=363\pm70$	
	$d_{33}=28,6\pm2$	3,8		$d_{36}=27\pm3$	
	$d_{31}=30\pm10$	1,9		$d_{36}=9,5$	
GaP	$d_{36}=33$	2,3		$d_{36}=13$	
	$d_{14}=80\pm14$	1,5			

[1)] Некоторые авторы определяют нелинейный оптический коэффициент d из соотношений $P=\varepsilon_0 dE^2$, в то время как здесь использовано соотношение $P=dE^2$.

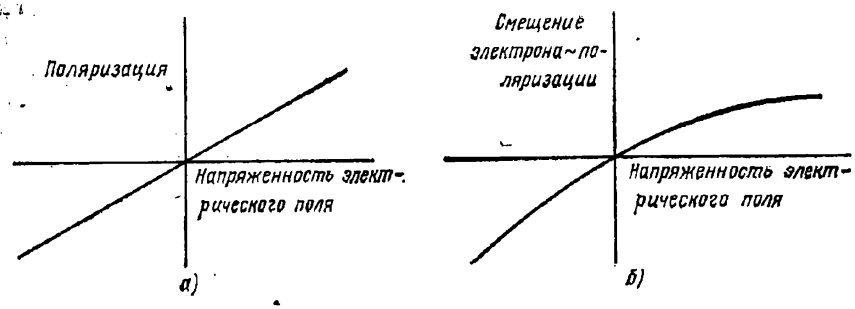


Рис. 16.1. Соотношение между поляризацией и вызывающим ее электрическим полем.

а — для линейного диэлектрика; *б* — для кристалла без центра инверсии, в котором электрон движется в потенциальной яме вида (16.3.1)

ния $\delta_{ср} \approx 2 \cdot 10^9$. Такое постоянство величины δ свидетельствует о том, что параметр нелинейности D примерно одинаков для различных материалов, а вариация величин d_{ijk} в широких пределах обусловлена зависимостью последних от линейных восприимчивостей.

Для оценки величины D вспомним, что согласно (16.3.1) ангармонический член в разложении потенциала равен

$$V^{(3)} = (m/3)DX^3, \qquad (16.3.13)$$

так что для центросимметричного кристалла $D = 0$. Численную оценку для D (и δ) можно получить, исходя из простейшей модели кристалла без центра инверсии. Построим эту модель следующим образом. Внесем дополнительный ионный заряд в некоторый узел (или удалим ионный заряд из этого узла) элементарной ячейки центросимметричного кристалла. Простейшую ангармоничную потенциальную функцию в одномерном случае образуют два заряда

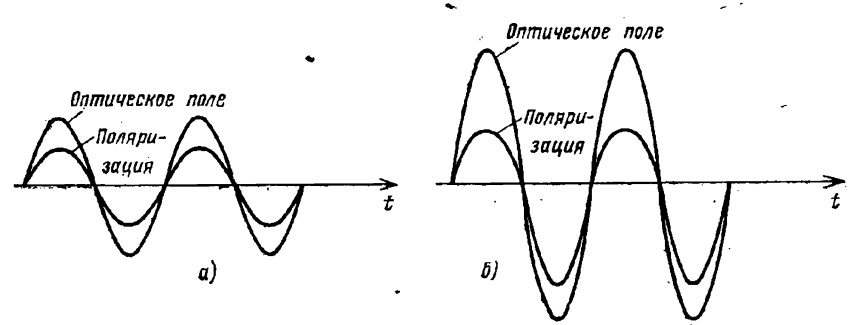


Рис. 16.2. Приложенное синусоидальное электрическое поле и вызываемая им поляризация:

а — линейный кристалл; *б* — кристалл без центра инверсии

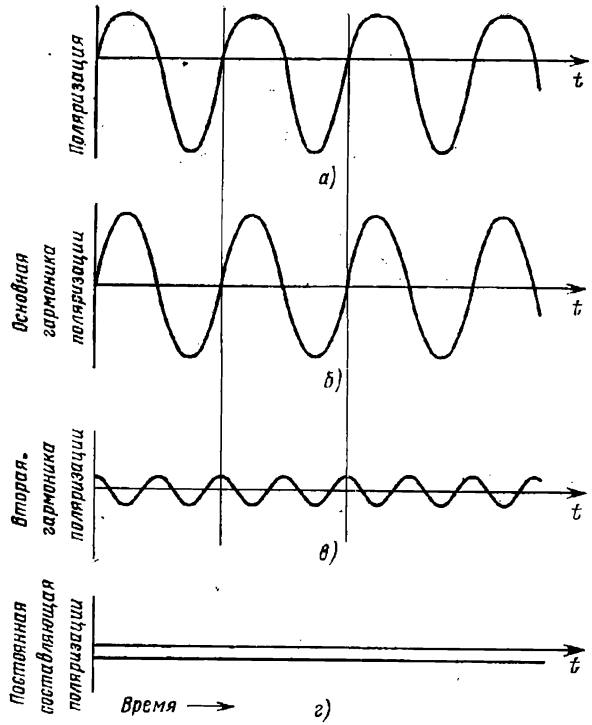


Рис. 16.3. Волна нелинейной поляризации ($а$) и ее составляющие: основная гармоника ω ($б$); вторая гармоника 2ω ($в$); отрицательная постоянная составляющая ($г$).

($2e$ и e), расположенные на расстоянии r_0. Разлагая потенциал такой системы вблизи минимума, получим

$$V(X) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(5{,}83 + 24{,}1\frac{X^2}{r_0^2} - 13{,}3\frac{X^3}{r_0^3} + \ldots\right), \quad (16.3.14)$$

где X — смещение из положения равновесия. Первый ангармоничный член $V^{(3)}(X)$ равен $(-13{,}3e^2/4\pi\varepsilon_0 r_0^4)X^3$. В соответствии с (16.3.13) получим

$$D = -39{,}9e^2/4\pi\varepsilon_0 m r_0^4. \quad (16.3.15)$$

Принимая $r_0 = 0{,}5$ нм и $N = 6\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$[1]), получаем $\delta \approx 3{,}5\cdot 10^9$, что хорошо согласуется со значениями δ из табл. 16.1.

Процесс образования второй гармоники поляризации при движении электрона в ангармонической потенциальной яме иллюстрируют рис. 16.1—16.3.

Более обоснованные и точные методы вычисления нелинейных оптических констант дает квантовый подход. Однако изложение этого подхода в данный момент увело бы нас чересчур далеко в сторону от главного направления, и поэтому оно выносится в приложение 2.

[1]) Это типичная величина N для кристалла с двумя валентными электронами на атом.

16.4. Нелинейное взаимодействие электромагнитных полей

Начнем с того, что запишем уравнения Максвелла, выделив в явном виде поляризацию **P**:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}),\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\mathbf{H}). \tag{16.4.1}$$

Поляризация представляется в виде суммы линейного и нелинейного членов

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_{\text{л}}\mathbf{E}+\mathbf{P}_{\text{нел}}, \tag{16.4.2}$$

где

$$(P_{\text{нел}})_i=d_{ijk}E_jE_k. \tag{16.4.3}$$

Тензорными свойствами $\chi_{\text{л}}$ пренебрегли.

Первое из уравнений (16.4.1) может быть записано в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{P}_{\text{нел}}}{\partial t}, \tag{16.4.4}$$

где σ — проводимость; $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_{\text{л}})$. Взяв ротор от обеих частей второго из уравнений (16.4.1), подставив rot **H** из (16.4.4) и использовав соотношение rot rot **E** = grad div **E** — $\nabla^2\mathbf{E}$ с учетом div **E** = = 0, получим

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial}{\partial t^2}\mathbf{P}_{\text{нел}}. \tag{16.4.5}$$

Дальнейший анализ проведем для одномерного случая ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$). За направление распространения выберем ось z. Ограничимся рассмотрением взаимодействия колебаний трех частот и соответствующие поля возьмем в виде бегущих плоских волн:

$$\begin{aligned}
E_i^{\omega_1}(z,t)&=\frac{1}{2}[E_{1i}(z)e^{i(\omega_1 t-k_1 z)}+\text{к. с.}],\\
E_k^{\omega_2}(z,t)&=\frac{1}{2}[E_{2k}(z)e^{i(\omega_2 t-k_2 z)}+\text{к. с.}],\\
E_j^{\omega_3}(z,t)&=\frac{1}{2}[E_{3j}(z)e^{i(\omega_3 t-k_3 z)}+\text{к. с.}],
\end{aligned} \tag{16.4.6}$$

где i, j, k — декартовы координаты. Заметим, что при $\mathbf{P}_{\text{нел}}=0$ решение уравнения (16.4.5) дается выражениями (16.4.6) с амплитудами, не зависящими от z. В качестве примера запишем i-компоненту

нелинейной поляризации на частоте $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$. Согласно (16.4.3) и (16.4.6) она имеет вид[1)]

$$\left[P^{\omega_1}_{\text{нел}}(z, t)\right]_i = \frac{d'_{ijk}}{2} E_{3j}(z) E^*_{2k}(z) \exp\{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]\} + \text{к. с.} \quad (16.4.7)$$

Вернемся к волновому уравнению (16.4.5). В одномерном случае

$$\nabla^2 E_l^{\omega_1}(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_l^{\omega_1}(z, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{E_{1i}(z) \exp[i(\omega_1 t - k_1 z)] + \text{к. с.}\}. \quad (16.4.8)$$

Выполняя операцию дифференцирования и полагая изменение комплексных амплитуд полей достаточно медленными, так что

$$\frac{dE_{1i}}{dz} k_1 \gg \frac{d^2 E_{1i}}{dz^2},$$

получаем

$$\nabla^2 E_l^{\omega_1}(z, t) = -\frac{1}{2}\left[k_1^2 E_{1i}(z) + 2ik_1 \frac{dE_{1i}(z)}{dz}\right] \exp[i(\omega_1 t - k_1 z)] + \text{к. с.} \quad (16.4.9)$$

Аналогичные выражения несложно вывести для $\nabla^2 E_l^{\omega_3}(z, t)$ и $\nabla^2 E_k^{\omega_2}(z, t)$. Подставляя (16.4.8) в (16.4.5), можно записать волновое уравнение для $E_l^{\omega_1}(z, t)$.

$$\left[\frac{k_1^2}{2} E_{1i} + ik_1 \frac{dE_{1i}}{dz}\right] \exp[i(\omega_1 t - k_1 z)] + \text{к. с.} = [-i\omega_1 \mu_0 \sigma + \omega_1^2 \mu_0 \varepsilon]\{(E_{1i}/2) \exp[i(\omega_1 t - k_1 z)] + \text{к. с.}\} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[P^{\omega_1}_{\text{нел}}(z, t)\right]_i, \quad (16.4.10)$$

где использовано соотношение $\partial/\partial t = i\omega_1$. Мы предполагаем, что при взаимодействии конечного числа полей (и, естественно, конечного числа частот) уравнение (16.4.5) должно удовлетворяться по отдельности для компонент с различными частотами.

Подставив выражение для $[P^{\omega_1}_{\text{нел}}(z, t)]$ из (16.4.7) и заметив, что $\omega_1^2 \mu_0 \varepsilon = k_1^2$, получим

$$ik_1 \frac{dE_{1i}}{dz} e^{-ik_1 z} = -\frac{i\omega_1 \sigma \mu_0}{2} E_{1i} e^{-ik_1 z} + \frac{\mu_0 \omega_1^2}{2} d'_{ijk} E_{3j} E^*_{2k} \exp[-i(k_3 - k_2)z]$$

[1)] Величины d'_{ijk} — это компоненты тензора из (16.1.6), трансформированные в результате перехода от системы координат, связанной с кристаллом, к системе, принятой нами для описания процесса распространения (см. задачу 16.9).

или (считая σ функцией частоты)

$$\frac{dE_{1i}}{dz} = -\frac{\sigma_1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}E_{1i} - \frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}d'_{ijk}E_{3j}E^*_{2k}\exp[-i(k_3-k_2-k_1)z] \quad (16.4.11а)$$

и аналогично

$$\frac{dE^*_{2k}}{dz} = -\frac{\sigma_2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}E^*_{2k} + \frac{i\omega_2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}d'_{kij}E_{1i}E^*_{3j}\exp[-i(k_1-k_3+k_2)z], \quad (16.4.11б)$$

$$\frac{dE_{3j}}{dz} = -\frac{\sigma_3}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}E_{3j} - \frac{i\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}d'_{jik}E_{1i}E_{2k}\times \exp[-i(k_1+k_2-k_3)z]. \quad (16.4.11в)$$

Эти уравнения мы применим в дальнейшем для рассмотрения ряда конкретных случаев.

16.5. Генерация второй гармоники света

Эксперимент по генерации второй гармоники света, возвестивший о начале нелинейной оптики, был выполнен Франкеном с соавторами в 1961 году [1]. Схема для проведения этого эксперимента приведена на рис. 16.4. Луч рубинового лазера с $\lambda = 694{,}3$ нм фокусировался на поверхность пластины из кристаллического кварца. Выходящее излучение анализировалось спектрометром. Было найдено, что в нем содержится компонента с удвоенной частотой (т. е. с $\lambda = 347{,}15$ нм). Эффективность преобразования в первых экспериментах была порядка 10^{-8}. Использование более эффектив-

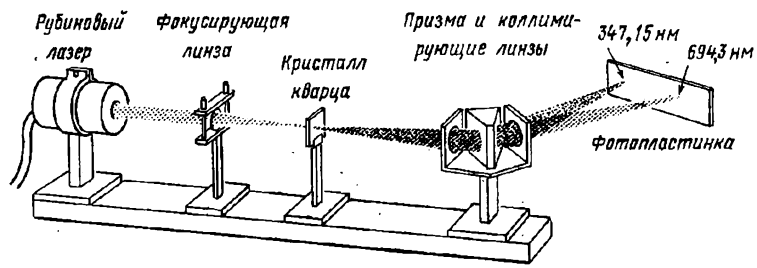


Рис. 16.4. Установка, на которой проводились первые эксперименты по генерации второй гармоники света [1].

Излучение рубинового лазера с $\lambda = 694$ нм фокусировалось на кристалл кварца, генерируя слабое излучение на $\lambda = 347$ нм. Затем пучки пространственно разделялись с помощью призмы и фотографировались

ных материалов, увеличение мощности лазера, работа в условиях фазового синхронизма позволили в последние годы довести коэффициент преобразования почти до единицы. Влияние перечисленных факторов на эффективность преобразования обсуждается ниже.

Применим уравнения (16.4.11) для рассмотрения генерации второй гармоники (ГВГ). Это частный случай взаимодействия полей трех частот, когда две частоты ω_1 и ω_2 одинаковы, а $\omega_3 = 2\omega_1$. Следовательно, необходимо анализировать лишь два уравнения системы (16.4.11) — первое (или второе) и последнее. В целях упрощения дальнейшего анализа, оправданного для большинства экспериментальных ситуаций, положим, что потери мощности входного луча (ω_1) за счет преобразования во вторую гармонику пренебрежимо малы, так что $(dE_{1i}/dz) \approx 0$ и, следовательно, необходимо рассматривать лишь последнее уравнение (16.4.11). Если среда прозрачна на частоте ω_3, то $\sigma_3 = 0$ и мы имеем

$$\frac{dE_{3j}}{dz} = -i\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, d'_{jik} E_{1i} E_{1k}\, e^{i\Delta kz}, \qquad (16.5.1а)$$

где

$$\omega = \omega_1 = \omega_3/2; \quad \Delta k = k_3^{(j)} - k_1^{(i)} - k_1^{(k)}, \qquad (16.5.1б)$$

а $k_1^{(l)}$ — постоянная распространения волны с частотой ω_1, поляризованной по оси i. Если $E_{3j}(0) = 0$ (вторая гармоника на входе отсутствует) и кристалл имеет длину l, решением (16.5.1) будет

$$E_{3j}(l) = -i\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, d'_{jik} E_{1i} E_{1k} \frac{e^{i\Delta kl} - 1}{i\Delta k} \qquad (16.5.2)$$

или

$$E_{3j}(l) E^*_{3j}(l) = \frac{\mu_0}{\varepsilon} \omega^2 (d'_{jik})^2 E_{1i}^2 E_{1k}^2 l^2 \frac{\sin^2(\Delta kl/2)}{(\Delta kl/2)^2}, \qquad (16.5.3)$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon_3$. Чтобы получить выражение для мощности второй гармоники $\mathcal{P}^{2\omega}$ на выходе, воспользуемся соотношением

$$\frac{\mathcal{P}^{2\omega}}{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, E_{3j} E^*_{3j}, \qquad (16.5.4)$$

где S — площадь поперечного сечения пучка. Приняв $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_3 \approx \varepsilon_0 n^2$, приходим к коэффициенту преобразования

$$\frac{\mathcal{P}^{2\omega}}{\mathcal{P}^{\omega}} = 2 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega^2 (d'_{jik})^2 l^2}{n^3} \left(\frac{\mathcal{P}^{\omega}}{S}\right) \frac{\sin^2(\Delta kl/2)}{(\Delta kl/2)^2}. \qquad (16.5.5)$$

Фазовый синхронизм при генерации второй гармоники. Из (16.5.5) следует, что предпосылкой для эффективной генерации второй гармоники является выполнение условия $\Delta k = 0$, или, поскольку $\omega_3 = 2\omega$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$,

$$k^{2\omega} = 2k^{\omega}. \qquad (16.5.6)$$

Если $\Delta k \neq 0$, то волна удвоенной частоты, генерируемая в некоторой плоскости (z_1), дойдя до другой плоскости (z_2), окажется не в фазе с волной удвоенной частоты, генерируемой в этой плоскости. Результат интерференции таких волн представлен в (16.5.5) множителем $\sin^2(\Delta kl/2)(\Delta kl/2)^{-2}$. Два соседних максимума этой интерференционной картины удалены друг от друга на расстояние, называемое «когерентной длиной»

$$l_c = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{k^{2\omega} - 2k^{\omega}} . \qquad (16.5.7)$$

Когерентная длина — это по существу максимальная длина кристалла, которую можно использовать при генерации второй гармоники. Обычно она не превышает 10^{-2} см. Показатель преломления, как правило, увеличивается с ростом частоты, так что

$$\Delta k = k^{2\omega} - 2k^{\omega} = (2\omega/c)(n^{2\omega} - n^{\omega}). \qquad (16.5.8)$$

Здесь использовано соотношение $k^{\omega} = \omega n^{\omega}/c$. Когерентная длина выражается формулой

$$l_c = \frac{\pi c}{\omega (n^{2\omega} - n^{\omega})} = \frac{\lambda}{2 (n^{2\omega} - n^{\omega})} , \qquad (16.5.9)$$

в которой λ — длина волны падающего света в свободном пространстве. Если задаться $\lambda = 1$ мкм и $n(2\omega) - n(\omega) \approx 10^{-2}$, то $l_c \approx$ $\approx$ 100 мкм. Увеличение l_c от 100 мкм до 2 см согласно (16.5.5) влечет за собой возрастание мощности второй гармоники в $4 \cdot 10^4$ раз.

Способ, который широко применяется [7, 8] для обеспечения выполнения условий фазового синхронизма при удвоении частоты, заключается в использовании анизотропных кристаллов, обладающих естественным двулучепреломлением (их свойства обсуждались в гл. 5). Используя связь $k^{\omega} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}n^{\omega}$, получим вместо (16.5.6) условие

$$n^{2\omega} = n^{\omega}. \qquad (16.5.10)$$

Оно означает, что коэффициенты преломления на основной частоте и на удвоенной частоте должны совпадать. В материалах с нормальной дисперсией показатель преломления обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся в данном направлении, растет с частотой. Это видно из табл. 16.2. Вполне понятно, что удовлетворить условию (16.5.10) невозможно, если волны частот ω и 2ω принадлежат одному типу (обыкновенные или необыкновенные). Однако в некоторых случаях фазовый синхронизм может достигаться благодаря использованию волн разных типов. В качестве примера рассмотрим зависимость показателя преломления необыкновенной волны в одноосном кристалле от угла θ между направлением рас-

Таблица 16.2

Дисперсия показателя преломления в кристалле KH_2PO_4 [9]

Длина волны, мкм	Показатель преломления		Длина волны, мкм	Показатель преломления	
	n_o (обыкновенный луч)	n_e (необыкновенный луч)		n_o (обыкновенный луч)	n_e (необыкновенный луч)
0,2	1,622630	1,563913	1,2	1,490169	1,458845
0,3	1,545570	1,498153	1,3	1,487064	1,457838
0,4	1,524481	1,480244	1,4	1,483803	1,456838
0,5	1,514928	1,472486	1,5	1,480363	1,455829
0,6	1,509274	1,468267	1,6	1,476729	1,454797
0,7	1,505235	1,465601	1,7	1,472890	1,453735
0,8	1,501924	1,463708	1,8	1,468834	1,452636
0,9	1,498930	1,462234	1,9	1,464555	1,451495
1,0	1,496044	1,460993	2,0	1,460044	1,450308
1,1	1,493147	1,459884			

пространения и оптической осью (осью z) кристалла. Эта зависимость согласно (5.4.2) имеет вид

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}. \qquad (16.5.11)$$

Если $n_e^{2\omega} < n_o^{\omega}$, то существует угол $\theta_{\text{синх}}$, при котором $n_e^{2\omega}(\theta_{\text{синх}}) = n_o^{\omega}$. Таким образом, если волна частоты ω распространяется под углом $\theta_{\text{синх}}$ к оси и имеет поляризацию, отвечающую обыкновенному лучу, то волна удвоенной частоты, возбуждаясь в том же направлении, будет обладать поляризацией необыкновенного луча. Эта ситуация проиллюстрирована рис. 16.5. Угол θ определяется пересечением сферы (показана на рисунке как круг), представляющей собой поверхность показателей преломления для обыкновенного луча частоты ω с эллипсоидом показателей преломления (16.5.11) не-

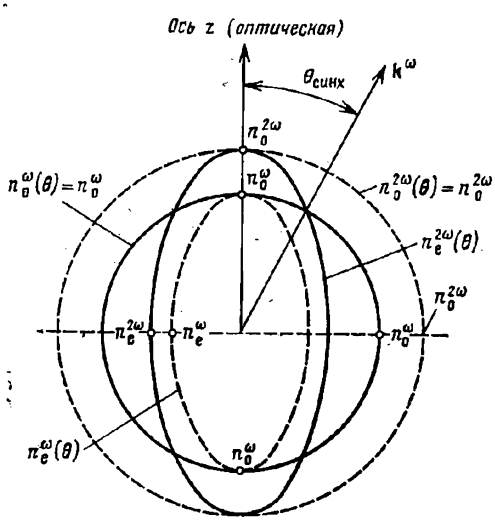


Рис. 16.5. Сечение поверхностей показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в отрицательном одноосном кристалле.

Если $n_e^{2\omega} < n_o^{\omega}$, то условие $n_e^{2\omega}(\theta) = n_o^{\omega}$ выполняется при $\theta = \theta_{\text{синх}}$.

Эксцентриситеты эллипсов на рисунке сильно преувеличены

обыкновенного луча частоты 2ω. В случае отрицательного одноосного кристалла, т. е. кристалла с $n_e^\omega < n_o^\omega$, угол, удовлетворяющий условию $n_e^{2\omega}(\theta_{\text{синх}}) = n_o^\omega$, определяется следующим образом. Из (16.5.11) следует

$$\frac{\cos^2\theta_{\text{синх}}}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2\theta_{\text{синх}}}{(n_e^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n_e^\omega)^2}, \qquad (16.5.12)$$

откуда

$$\sin^2\theta_{\text{синх}} = \frac{(n_o^\omega)^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}. \qquad (16.5.13)$$

Пример.

Генерация второй гармоники в KDP. Если в качестве исходного взято излучение рубинового лазера ($\lambda = 694{,}3$ нм), то для кристалла KDP экстраполяцией данных табл. 16.2 получим следующие значения показателей преломления: $n_e^\omega = 1{,}466$, $n_e^{2\omega} = 1{,}487$, $n_o^\omega = 1{,}506$, $n_o^{2\omega} = 1{,}534$. Угол синхронизма, вычисленный по формуле (16.5.13), равен $\theta_{\text{синх}} = 50{,}4°$.

Другой способ согласования показателей преломления в KDP соответствует ситуации, когда из двух компонент падающего света частоты ω лишь одна i-компонента принадлежит обыкновенному лучу, а k-компонента — необыкновенному. Луч с удвоенной частотой остается необыкновенным. В этом случае условие фазового синхронизма $\Delta k = 0$ записывается в виде

$$n_{je}^{2\omega}(\theta) = \frac{1}{2}[n_{io}^\omega + n_{ke}^\omega(\theta)], \qquad (16.5.14)$$

где j, i, k — направления осей эллипсоида показателей преломления, выбранных в качестве системы отсчета. Угол синхронизма определяется из уравнения

$$\left[\frac{\cos^2\theta_{\text{синх}}}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2\theta_{\text{синх}}}{(n_e^{2\omega})^2}\right]^{-1/2} = \frac{1}{2}\left\{n_o^\omega + \left[\frac{\cos^2\theta_{\text{синх}}}{(n_o^\omega)^2} + \frac{\sin^2\theta_{\text{синх}}}{(n_e^\omega)^2}\right]^{-1/2}\right\}, \qquad (16.5.15)$$

которое получается из (16.5.14) при подстановке выражений $n_{je}^{2\omega}$ и $n_{ke}^\omega(\theta)$ из (16.5.11).

В экспериментах по генерации второй гармоники необходимость выполнения условий фазового синхронизма (16.5.15) и ограничения, накладываемые видом тензора оптической нелинейной восприимчивости, уменьшают свободу в выборе направлений поляризации све-

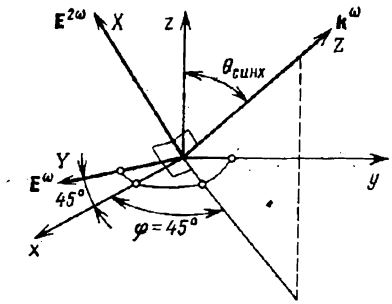


Рис. 16.6. Генерация второй гармоники света в KDP.

Вектор E^{ω} образует угол 45° с осями x и y. Угол между оптической осью кристалла и k^{ω} равен $\theta_{синх}$. (Все векторы, пересекающие штриховую линию, лежат в плоскости x—y)

товых пучков. В KDP, например, нелинейная поляризация согласно (16.1.9) имеет вид

$$P_x^{2\omega} = 2d_{14} E_z^{\omega} E_y^{\omega},$$

$$P_y^{2\omega} = 2d_{14} E_z^{\omega} E_x^{\omega} \to d'_{XYY} = d_{36} \sin\theta_{синх}, \qquad (16.5.16)$$

$$P_z^{2\omega} = 2d_{36} E_x^{\omega} E_y^{\omega}.$$

Если использовать первый метод выполнения условий фазового синхронизма, приводящий к соотношению (16.5.13), то основной луч должен быть обыкновенным и, следовательно, $E_z^{\omega} = 0$[1], откуда следует, что поляризация на удвоенной частоте, как это хорошо видно из (16.5.16), будет иметь лишь z-компоненту. Компонента $P_z^{2\omega}$, нормальная к направлению распространения, равна в этом случае $2d_{36}E_x^{\omega}E_y^{\omega} \sin\theta_{синх}$. Она принимает максимальное значение при $E_x^{\omega} = E_y^{\omega} = E^{\omega}/\sqrt{2}$, т. е. когда азимутальный угол для E^{ω} равен $\pi/4$, как показано на рис. 16.6.

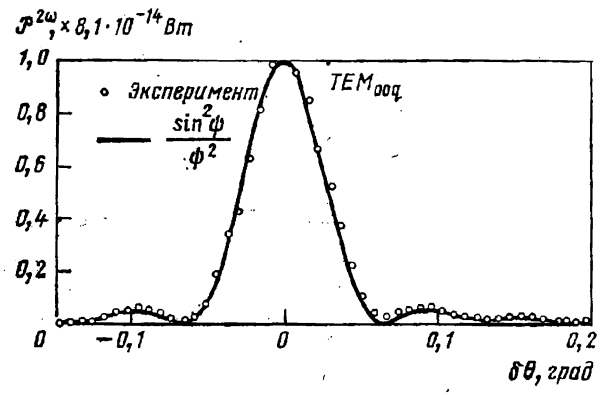


Рис. 16.7. Зависимость мощности второй гармоники света от угла $\delta\theta$ между направлением распространения основного луча и направлением, вдоль которого выполняется условие пространственного фазового синхронизма [10].

$\mathcal{P}^{\omega} = 1{,}48 \cdot 10^{-3}$ Вт, толщина кристалла KDP $l = 12{,}3$ мм

[1] Здесь мы игнорируем тот факт, что, строго говоря, нулю равно D_z, а не E_z. Для $n_e \approx n_o$ векторы E и D почти параллельны.

Как следует из (16.5.4), вследствие отклонений от условий фазового синхронизма мощность второй гармоники на выходе кристалла длиной l уменьшается на величину

$$\frac{\mathscr{P}^{2\omega}}{\mathscr{P}^{2\omega}_{\max}} = \frac{\sin^2(\Delta kl/2)}{(\Delta kl/2)^2}. \qquad (16.5.17)$$

Наиболее простой способ проверки соотношения (16.5.17) состоит в рассмотрении зависимости выхода второй гармоники от величины $\delta\theta = \theta - \theta_{\text{синх}}$ — угла между направлением синхронизма и направлением распространения света. При малых $\delta\theta$ для $\Delta k(\theta) = k_e^{2\omega}(\theta) - 2k_o^{\omega}$ справедлива приближенная формула $\Delta k(\theta) \approx \approx 2\beta\delta\theta$, где β — константа, зависящая от n_o^{ω}, $n_o^{2\omega}$ и $n_e^{2\omega}$. Фактор $(\Delta kl/2)$ в (16.5.17), таким образом, равен $\beta\delta\theta l \equiv \psi$. Экспериментально зависимость мощности второй гармоники от угла $\delta\theta$ показана точками на рис. 16.7. Там же приведена и теоретическая кривая $\sin^2\psi/\psi^2$ (непрерывная линия).

16.6. Генерация второй гармоники в условиях истощения накачки

Процесс генерации второй гармоники в § 16.5 рассмотрен в предположении, что интенсивность основного пучка света частотой ω не меняется при нелинейном взаимодействии. Это ограничивает справедливость результатов малой степенью преобразования во вторую гармонику. Отбросим это ограничение.

Вернемся к уравнениям (16.4.11) и введем новые переменные для поля

$$A_l = \sqrt{n_l/\omega_l}\,E_l \quad (l = 1, 2, 3). \qquad (16.6.1)$$

Интенсивность поля на частоте ω_l составляет

$$I_l = \frac{\mathscr{P}_l}{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,n_l |E_l|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\omega_l |A_l|^2. \qquad (16.6.2)$$

Поскольку энергия фотона равна $\hbar\omega_l$, из (16.6.2) следует, что $|A_l|^2$ пропорциональна потоку фотонов частотой ω_l с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от частоты.

Уравнения (16.4.11) в этих переменных принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_1 A_1 - \frac{i}{2}\varkappa A_2^* A_3\, e^{-i(\Delta k)z}, \\
\frac{dA_2^*}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 A_2^* + \frac{i}{2}\varkappa A_1 A_3^*\, e^{i(\Delta k)z}, \qquad (16.6.3)\\
\frac{dA_3}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_3 A_3 - \frac{i}{2}\varkappa A_1 A_2\, e^{i(\Delta k)z}.
\end{aligned}$$

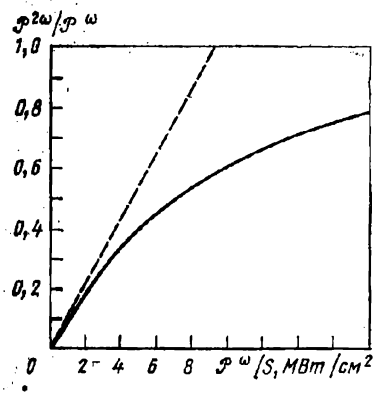


Рис. 16.8. Расчетная эффективность преобразования с $\lambda = 1$ мкм к $\lambda = 0{,}5$ мкм в кристалле $LiNbO_3$ толщиной 1 см.

Штриховая линия — расчет по приближенной формуле (16.5.5), не учитывающей истощения накачки; непрерывная линия — расчет по строгой формуле (16.6.8)

Индексы 1, 2, 3 обозначают как номер волны, так и направление ее поляризации. Другие величины, входящие в (16.6.3), имеют следующий смысл:

$$\Delta k \equiv k_3 - (k_1 + k_2),$$

$$\varkappa \equiv d'_{123}\sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1 n_2 n_3}}, \quad \alpha_l \equiv \sigma_l\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_l}} \quad (l = 1, 2, 3). \qquad (16.6.4)$$

Преимущество переменных A_l перед E_l заключается в том, что в отличие от (16.4.11) уравнения (16.6.3) содержат один параметр связи $\varkappa$.

При генерации второй гармоники $A_1 = A_2$ и (16.6.3) сводится к

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\frac{1}{2}\varkappa A_3 A_1^* e^{-i\Delta kz},$$
$$\frac{dA_3}{dz} = -i\frac{1}{2}\varkappa A_1^2 e^{i\Delta kz}. \qquad (16.6.5)$$

Из этих уравнений следует, что в условиях фазового синхронизма ($\Delta k = 0$) действительность амплитуды $A_1(0)$ на входе означает действительность $A_1(z)$ внутри кристалла. Уравнения (16.6.5) сводятся в этом случае к

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{1}{2}\varkappa A_3' A_1, \quad \frac{dA_3'}{dz} = \frac{1}{2}\varkappa A_1^2, \qquad (16.6.6)$$

где $A_3 = -iA_3'$. Из уравнений (16.6.6) следует, что

$$\frac{d}{dz}(A_1^2 + A_3'^2) = 0.$$

Поскольку мы полагали, что на входе $A_3 = 0$, то $A_1^2 + A_3'^2 = A_1^2(0)$, или из (16.6.6) $dA_3'/dz = {}^1/_2\,\varkappa(A_1^2(0) - A_3'^2)$ и (см. [12])

$$A_3'(z) = A_1(0)\,\mathrm{th}\,[{}^1/_2\,\varkappa A_1(0) z]. \qquad (16.6.7)$$

Коэффициент преобразования равен

$$\frac{\mathcal{P}^{2\omega}}{\mathcal{P}^{\omega}} = \frac{|A_3(z)|^2}{|A_1(0)|^2} = \mathrm{th}^2\left[\frac{1}{2}\varkappa A_1(0) z\right]. \qquad (16.6.8)$$

Из (16.6.7) следует, что $A_3'(z) \to A_1(0)$ при $\varkappa A_1(0) z \to \infty$. Это означает, что число генерирующихся фотонов с удвоенной частотой не может превысить *половины* числа фотонов падающего излучения

основной частоты даже при полном преобразовании (поскольку $A_1 = A_2$). На рис. 16.8 приведены для сравнения графики зависимости эффективности преобразования от плотности мощности для обоих рассмотренных выше случаев удвоения частоты (с учетом и без учета истощения накачки).

16.7. Генерация второй гармоники в гауссовом пучке

Анализ процесса удвоения частоты в предыдущих параграфах приведен для плоской волны. На практике же в большинстве случаев применяются гауссовы пучки и возникает вопрос о влиянии дифракции на нелинейные процессы, подобные удвоению частоты.

Поскольку коэффициент преобразования во вторую гармонику обратно пропорционален площади поперечного сечения пучка [см. (16.5.5)], эффективность удвоения возрастает при фокусировке пучка внутрь нелинейного кристалла. Схема удвоения частоты света в сфокусированном гауссовом пучке приведена на рис. 16.9. Здесь $z_0 = \pi n \rho_0^2/\lambda$ согласно (6.6.11) — расстояние, на котором площадь поперечного сечения луча удваивается по отношению к шейке. При длине кристалла l, много меньшей, чем z_0, поперечное сечение луча внутри кристалла практически постоянно и можно воспользоваться результатами для плоской волны (16.5.3)

$$|E^{2\omega}|^2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon}\omega^2 d'^2_{ijk} |E^{\omega}|^4 l^2 \frac{\sin^2(\Delta k l/2)}{(\Delta k l/2)^2}, \qquad (16.7.1)$$

где

$$E^{\omega}(r) = E_0 \exp(-r^2/\rho_0^2). \qquad (16.7.2)$$

Используя выражение

$$\mathcal{P}^{\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\int_S |E^{\omega}|^2 dxdy = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_0^2 \left(\frac{\pi\rho_0^2}{4}\right),$$

а также (16.7.2) и интегрируя (16.7.1), получаем[1]

$$\frac{\mathcal{P}^{2\omega}}{\mathcal{P}^{\omega}} = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}\frac{\omega^2 d^2 l^2}{n^3}\left(\frac{\mathcal{P}^{\omega}}{\pi\rho_0^2}\right)\frac{\sin^2(\Delta k l/2)}{(\Delta k l/2)^2}, \qquad (16.7.3)$$

где $n^{\omega} \approx n^{2\omega}$ и $d'_{ijk} \equiv d$. Уравнение (16.7.3) идентично уравнению (16.5.5), за исключением того, что сейчас оно применимо для гауссова пучка.

Квадратичная зависимость эффективности преобразования от длины l соблазняет нас ис-

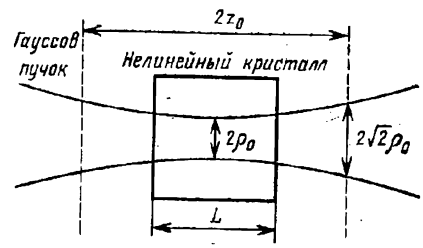


Рис. 16.9. Гауссов пучок, фокусируемый внутрь нелинейного кристалла

[1] Интеграл в (16.7.3) взят по поперечному сечению пучка S.

пользовать длинные кристаллы. Но согласно рис. 16.9 как только l становится больше $2z_0$, возрастает сечение пучка, что ведет к падению эффективности удвоения. Можно ожидать, что максимальная эффективность преобразования отвечает длине $l \approx 2z_0$. Назовем такой вариант конфокальной фокусировкой. Эффективность преобразования для этого случая получим из (16.7.3), подставив $l = 2z_0 = 2(\pi\rho_0^2 n/\lambda)$, т. е.

$$\frac{\mathcal{P}^{2\omega}}{\mathcal{P}^{\omega}} = \frac{2}{\pi c}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega^3 d^2 l}{n^2} \mathcal{P}^{\omega} \frac{\sin^2(\Delta k l/2)}{(\Delta k l/2)^2}. \qquad (16.7.4)$$

Точный анализ [11] показывает, что оптимальное преобразование получается при $l = 5{,}68z_0$; в этом случае мощность второй гармоники возрастает приблизительно в 1,2 раза по сравнению с тем, что дает формула (16.7.4)[1].

Сравнивая выражения для эффективности удвоения в гауссовом пучке и в плоской волне, видим, что при оптимальной фокусировке коэффициент преобразования растет пропорционально l, а не l^2.

Пример.

Оптимальная фокусировка. Рассмотрим генерацию второй гармоники в условиях конфокальной фокусировки в KDP для $\lambda = 1$ мкм. Полагая $l = 1$ см, $d = d_{36} \sin\theta_{\text{синх}} = 3{,}6 \cdot 10^{-24}$, $n = 1{,}5$, получаем из (16.7.4) $\mathcal{P}^{2\omega}/\mathcal{P}^{\omega} = 3{,}7 \cdot 10^{-5}\,\mathcal{P}^{\omega}$.

16.8. Внутрирезонаторная генерация второй гармоники

На основании (16.7.3) можно заключить, что при прохождении пучка света через нелинейный кристалл во вторую гармонику преобразуется мощность

$$\mathcal{P}^{2\omega} = q[\mathcal{P}^{\omega}]^2. \qquad (16.8.1)$$

Для короткого кристалла ($l \ll z_0$), помещенного в шейке гауссова пучка,

$$q = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega^2 d^2 l^2}{n^3(\pi\rho_0^2)} \frac{\sin^2(\Delta k l/2)}{(\Delta k l/2)^2}. \qquad (16.8.2)$$

Если нелинейный кристалл помещен внутрь резонатора лазера, генерирующего свет частотой ω, то это приводит к появлению потерь, величина которых за один проход равна $q\mathcal{P}^{\omega}$.

Рассмотрим лазер с близким к 100%-ному отражению от зеркал на частоте ω и с ненасыщенным усилением g_0 за один проход. Поместим внутрь резонатора нелинейный кристалл и постепенно будем увеличивать коэффициент взаимодействия q. Как следствие этого, будет уменьшаться $\mathcal{P}^{\omega}$ — мощность излучения основной частоты,

[1] Это выполняется точно, когда групповые скорости основного пучка и второй гармоники параллельны, т. е. при $\theta_{\text{синх}} = 90°$.

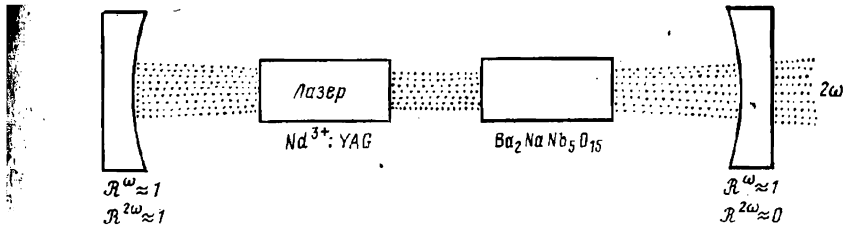


Рис. 16.10. Схема внутрирезонаторного преобразования излучения лазера во вторую гармонику [13]

сосредоточенная в одной из двух встречных волн внутри резонатора. Величина q, определяемая соотношением

$$[q\mathcal{P}^{\omega}]_{\text{opt}} = \sqrt{g_0\Pi} - \Pi, \tag{16.8.3}$$

(где Π — полные потери за проход), соответствует оптимальному коэффициенту связи, смысл которого обсуждался в § 9.3. Полная лазерная мощность, преобразуемая при этом во вторую гармонику, дается формулой (9.3.18):

$$[\mathcal{P}^{2\omega}]_{\text{opt}} = 2I_{\text{нас}} S (\sqrt{g_0} - \sqrt{\Pi})^2, \tag{16.8.4}$$

где $I_{\text{нас}}$ — интенсивность насыщения, определяемая формулой (8.7.5).

Для того чтобы получить величину q, отвечающую оптимальному взаимодействию, воспользуемся соотношениями (16.8.1), (16.8.3) и (16.8.4). Они приводят к выражениям

$$]\mathcal{P}^{\omega}]_{\text{opt}} = \frac{[\mathcal{P}^{2\omega}]_{\text{opt}}}{[q\mathcal{P}^{\omega}]_{\text{opt}}} = 2I_{\text{нас}} S \left[\sqrt{\frac{g_0}{\Pi}} - 1\right]$$

и

$$q_{\text{opt}} = \frac{[q\mathcal{P}^{\omega}]_{\text{opt}}}{[\mathcal{P}^{\omega}]_{\text{opt}}} = \frac{\sqrt{g_0\Pi} - \Pi}{2I_{\text{нас}} S[\sqrt{g_0/\Pi} - 1]} = \frac{\Pi}{2I_{\text{нас}} S}. \tag{16.8.5}$$

Схема эксперимента по внутрирезонаторной генерации второй гармоники приведена на рис. 16.10.

Проведем численные оценки, касающиеся этого эксперимента. Зададимся следующими характеристиками Nd^{3+}: YAG-лазера: $\lambda = 1{,}06$ мкм, $\Delta\nu = 1{,}35 \cdot 10^{11}$ Гц (ширина полосы усиления), $\Pi = 2 \cdot 10^{-2}$, $n = 1{,}5$. Диаметр пучка (усредненный по длине резонатора) равен 2 мм. Для генерации второй гармоники использован кристалл $Ba_2NaNb_5O_{15}$; его нелинейный коэффициент (см. табл. 16.1) $d = 10{,}4 \cdot 10^{-13}$ м/В.

Наша задача — определить длину l нелинейного кристалла, обеспечивающую полное преобразование оптимально достижимой мощности лазера во вторую гармонику с $\lambda = 0{,}53$ мкм. Кристалл

ориентирован так, что выполняются условия фазового синхронизма, т.е. $\Delta k = k^{2\omega} - 2k^{\omega} = 0$.

Оптимальный коэффициент взаимодействия согласно (16.8.5) равен $q_{opt} = \Pi/2I_{нас}S$. Используя приведенные выше данные, получим $I_{нас}S = 2$ Вт, откуда $q_{opt} = 5 \cdot 10^{-3}$ [Вт$^{-1}$]. Теперь из (16.8.2) найдем q, полагая $\Delta k = 0$:

$$q = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega^2 d^2 l^2}{n^3 \pi \rho_0^2}.$$

Возьмем $\rho_0 = 7 \cdot 10^{-5}$ м, разрешив последнее уравнение относительно l, и, подставив значение входящих в него величин, получим искомую оптимальную длину кристалла $l_{opt} = 0{,}37$ см.

Задачи

16.1. Найдите угол синхронизма для процесса генерации второй гармоники в положительном одноосном кристалле, т. е. в кристалле с $n_e > n_o$.

Ответ:

$$\sin^2\theta_{синх} = \frac{(n_o^{\omega})^2 - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}.$$

16.2. Продумайте эксперимент по генерации второй гармоники света в теллуре при длине волны основного луча $\lambda = 10{,}6$ мкм. Теллур принадлежит к точечной группе симметрии 32. Найдите угол синхронизма, определите направление поляризации луча и ориентацию кристалла, обеспечивающие максимальную выходную мощность излучения с $\lambda = 5{,}3$ мкм. Сравните ваши результаты с данными работы [14]. Дисперсию Te можно взять из следующей таблицы [15]

λ, мкм	n_o	n_e	λ, мкм	n_o	n_e
4	4,929	6,372	8	4,809	6,253
5	4,864	6,316	10	4,796	6,246
6	4,838	6,286	12	4,789	6,237
7	4,821	6,257	14	4,785	6,230

16.3. Выведите соотношение (16.3.14)

$$V(X) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(5{,}83 + 24{,}1\frac{X^2}{r_0^2} - 13{,}3\frac{X^3}{r_0^3} + \ldots\right).$$

Напомним, что X есть отклонение от минимума потенциала.

16.4. Покажите, что вследствие клейнмановских соотношений, если они применимы, кристаллы с точечной симметрией D_4 и D_6 не могут иметь нелинейной оптической поляризации. Может ли иметь

место в этих кристаллах линейный электрооптический эффект? Покажите, что в кварце из соотношений Клейнмана следует $d_{123} = 0$.

16.5. Покажите, что клейнмановские соотношения могут быть получены непосредственно из соотношений симметрии $d_{ijk} = d_{ikj}$ и выражения $\mathbf{P} = -\nabla_E U$.

16.6. Покажите, что нелинейная восприимчивость $d_{\text{нел}}^{\omega_1+\omega_2}$, определяемая соотношением

$$P^{\omega_1+\omega_2} = \frac{1}{2}\{d_{\text{нел}}^{\omega_1+\omega_2} E_1^{\omega_1} E_2^{\omega_2} \exp[i(\omega_1+\omega_2)t] + \text{к. с.}\},$$

равна

$$d_{\text{нел}}^{\omega_1+\omega_2} = \frac{-D_N e^3}{2m^2[(\omega_0^2-\omega_1^2)+i\omega_1\Gamma][(\omega_0^2-\omega_2^2)+i\omega_2\Gamma][\omega_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2+i(\omega_1+\omega_2)\Gamma]}.$$

16.7. Покажите, что когда $\theta_{\text{синх}}$ — угол синхронизма для обыкновенной волны частотой ω и необыкновенной волны частотой 2ω, выполняется соотношение

$$\Delta k(\theta) L\,|_{\theta=\theta_{\text{синх}}} = -\frac{2\omega L}{c}\sin(2\theta_{\text{синх}})\frac{(n_e^{2\omega})^{-2}-(n_o^{2\omega})^{-2}}{2(n_o^{\omega})^{-3}}(\theta-\theta_{\text{синх}}).$$

16.8. Выведите формулу для угла синхронизма параметрического усилителя на KDP, у которого две волны являются необыкновенными, тогда как третья — обыкновенная. Какую из трех волн (сигнальную, холостую или накачку) вы выберете обыкновенной? Может ли этот тип фазового синхронизма достигаться для частот: $\omega_3 = 10000$ см$^{-1}$, $\omega_1 = \omega_2 = 5000$ см$^{-1}$? Если да, то таков будет угол $\theta_{\text{синх}}$?

16.9. Покажите, что коэффициенты d'_{ikj} в (16.4.11) связаны с $d_{\alpha\beta\gamma}$ [последние определены равенством (16.1.5)] соотношением

$$d'_{ikj} = l_{i\alpha}\, l_{k\beta}\, l_{j\gamma}\, d_{\alpha\beta\gamma},$$

где i, k, j — система координат, используемая для описания распространения волн [см. (16.4.6)]; α, β, γ — обозначения осей кристалла; $l_{i\alpha}$ — направляющие косинусы. Покажите, что в случае KDP (см. пример на с. 333) соотношение $d'_{ikj} = l_{i\alpha} l_{k\beta} l_{j\gamma} d_{\alpha\beta\gamma}$ приводит к $d'_{XYY} = d_{36}\sin\theta_{\text{синх}}$.

Глава 17

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ: УСИЛЕНИЕ, ГЕНЕРАЦИЯ И ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ

Нелинейность среды, ответственная за генерацию второй гармоники, может быть использована для усиления слабых оптических сигналов. Основным элементом такого усилителя является нелинейный кристалл, на который падает входной сигнал с частотой ω_1 и интенсивная волна накачки с частотой $\omega_3 > \omega_1$ [1—3]. Усиление волны с частотой ω_1 сопровождается возбуждением «холостой» волны с частотой $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$.

Сверхвысокочастотные устройства, основанные на этом же принципе, играют важную роль как малошумящие усилители [4,5].

17.1. Уравнения, описывающие процесс параметрического усиления

В приближении заданной накачки полагаем $A_3(z) = A_3(0)$. Тогда первые два уравнения (16.6.3) запишутся в виде

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{1}{2}\alpha_1 A_1 - i\frac{g}{2}A_2^* e^{-i\Delta kz},$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -\frac{1}{2}\alpha_2 A_2^* + i\frac{g}{2}A_1 e^{i\Delta kz}. \tag{17.1.1}$$

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2, \quad g = \varkappa A_3(0) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\frac{\omega_1\omega_2}{n_1 n_2}}\, d' E_3(0). \tag{17.1.2}$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда на входе присутствуют как «сигнальная» волна, так и «холостая» волна с комплексными амплитудами $A_1(0)$ и $A_2(0)$ соответственно. Уравнения (17.1.1) при отсутствии потерь ($\alpha_i = 0$) обладают решениями

$$A_1(z)\exp[i(\Delta kz/2)] = A_1(0)[\mathrm{ch}(bz) - (i\Delta k/2b)\mathrm{sh}(bz)] - i(g/2b)A_2^*(0)\mathrm{sh}(bz), \tag{17.1.3}$$

$$A_2^*(z)\exp[-i(\Delta kz/2)] = A_2^*(0)[\mathrm{ch}(bz) - (i\Delta k/2b)\mathrm{sh}(bz)] + i(g/2b)A_1(0)\mathrm{sh}(bz), \tag{17.1.4}$$

где

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{g^2 - (\Delta k)^2}, \tag{17.1.5}$$

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2. \tag{17.1.6}$$

В простейшем случае параметрического усиления на вход подается лишь один сигнал, например, $A_1(0)$. Считая, что имеет место фазовый синхронизм ($\Delta k = 0$) и $A_2(0) = 0$, из (17.1.3) получаем

$$A_1(z) = A_1(0)\operatorname{ch} gz/2, \quad A_2^*(z) = iA_1(0)\operatorname{sh} gz/2. \qquad (17.1.7)$$

Нарастание мощности «сигнальной» (ω_1) и «холостой» (ω_2) волн происходит за счет волны накачки (ω_3). В самом деле, основываясь на (16.6.3), можно показать, что

$$-\frac{d}{dz}(A_3 A_3^*) = \frac{d}{dz}(A_1 A_1^*) = \frac{d}{dz}(A_2 A_2^*). \qquad (17.1.8)$$

Поскольку величина $A_i A_i^*$ пропорциональна потоку фотонов с частотой ω_i, уравнение (17.1.8) утверждает, что при добавлении фотона в сигнальную волну одновременно добавляется фотон в холостую волну, а число фотонов накачки уменьшается на единицу. Поскольку $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, энергия в таком процессе сохраняется. Уравнения (17.1.8) можно проинтегрировать по всему объему взаимодействия и получить, что полные изменения мощностей взаимодействующих волн удовлетворяют соотношениям

$$-\Delta\left(\frac{\mathscr{P}_3}{\omega_3}\right) = \Delta\left(\frac{\mathscr{P}_1}{\omega_1}\right) = \Delta\left(\frac{\mathscr{P}_2}{\omega_2}\right), \qquad (17.1.9)$$

где $\mathscr{P}$ обозначает мощность в пучке. Равенства (17.1.9) известны как соотношения Менли — Роу [6].

Пример.

Параметрическое усиление. Для того чтобы получить оценку величины усиления, достигаемого в параметрическом процессе, рассмотрим кристалл $LiNbO_3$, через который распространяется бегущая волна накачки. Зададимся следующими данными: $\nu_1 = \nu_2 = 3 \cdot 10^{14}$ Гц ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1000$ нм), $\nu_3 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц, $d_{15} = 4{,}4 \cdot 10^{-13}$ м/В (см. табл. 16.1), $n_1 \approx n_2 \approx 2{,}2$, $\mathscr{P}_3/S = 5 \cdot 10^6$ Вт/см^2, $E_3 = 4{,}13 \times \times 10^5$ В/м. Подставив их в формулу (17.1.2), получим

$$g = 0{,}99 \text{ см}^{-1}.$$

Этот пример показывает, что даже при высокой плотности накачки параметрическое усиление невелико. Отсюда естествен вывод о том, что параметрический принцип выгоднее использовать при создании генераторов, нежели для усиления.

17.2. Параметрическая генерация

В предыдущем параграфе показано, что волна накачки с частотой ω_3 может вследствие нелинейного взаимодействия в кристалле одновременно усиливать две волны с частотами ω_1 и ω_2, причем $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Если нелинейный кристалл поместить внутрь оптического резонатора, настроенного на сигнальную или на холостую волну (или на обе сразу), параметрическое усиление может при до-

стижении некоторой пороговой интенсивности накачки перейти в генерацию на сигнальной и холостой частотах одновременно. Таковы физические принципы работы параметрического генератора света [1—3]. Параметрические генераторы являются важными для практики устройствами, способными преобразовать мощность лазера накачки в когерентное излучение сигнальной и холостой частот, которые, как будет показано ниже, можно плавно менять в очень широких пределах.

На рис. 17.1 представлена схема двухрезонаторного параметрического генератора, резонаторы которого имеют высокую добротность как на сигнальной, так и на холостой частотах. Прежде чем приступить к строгому анализу работы параметрического генератора, проведем приближенное рассмотрение для выяснения основных особенностей. Начнем с уравнений (17.1.1) и будем считать, что $A_1(z)$ и $A_2(z)$ — амплитуды сигнальной и холостой волн генератора, изображенного на рис. 17.1. Потери на зеркалах резонаторов заменим в расчетах эквивалентными распределенными потерями α_1 и α_2, так что

$$\alpha_i L_i = 1 - \mathcal{R}_i \quad (i = 1, 2), \tag{17.2.1}$$

где L — длина резонатора. В стационарном режиме $dA_1/dz = dA_2/dz = 0$ и уравнения (17.1.1) сводятся к

$$-\frac{\alpha_1}{2} A_1 - i\frac{g}{2} A_2^* = 0, \quad i\frac{g}{2} A_1 - \frac{\alpha_2}{2} A_2^* = 0. \tag{17.2.2}$$

Эта система обладает нетривиальными решениями, если ее детерминант равен нулю. Отсюда вытекает, что пороговое усиление

$$g_{\text{пор}}^2 = \alpha_1 \alpha_2. \tag{17.2.3}$$

Рассмотрим теперь ту же задачу в более строгой постановке.

Самосогласованный анализ параметрической генерации. Здесь мы получим уравнения, описывающие стационарный режим параметрического генератора, используя самосогласованный подход, который в § 9.1 был применен для описания генерации в лазере, а в § 11.3 — при рассмотрении синхронизации мод.

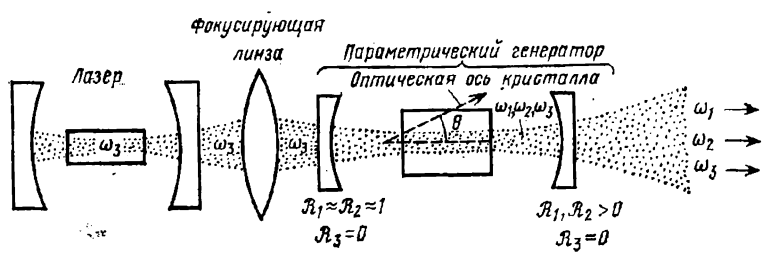


Рис. 17.1. Схема параметрического генератора света с накачкой от лазера на частоте ω_3.

Генерация происходит на частотах ω_1 и ω_2 (причем $\omega_1+\omega_2=\omega_3$), являющихся собственными частотами резонатора, в который помещен нелинейный кристалл

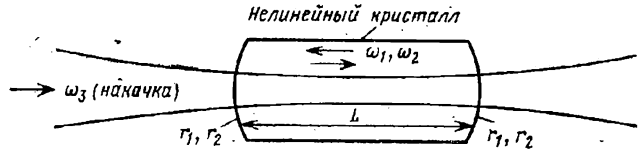


Рис. 17.2. Параметрический генератор на нелинейном кристалле, торцы которого служат зеркалами резонатора

Анализируемая модель параметрического генератора приведена на рис. 17.2. Будем для простоты считать, что нелинейный кристалл имеет форму оптического резонатора. Искривленные торцы кристалла, играющие роль зеркал, имеют коэффициенты отражения r_1 и r_2[1] соответственно для сигнальной и холостой волн. Для волны накачки эти зеркала совершенно прозрачны. Комбинированное поле сигнальной и холостой волн определяется в произвольной плоскости z одностолбцовой матрицей

$$A(z) = \begin{vmatrix} A_1(z)\, e^{-ik_1 z} \\ A_2^*(z)\, e^{ik_2 z} \end{vmatrix}, \qquad (17.2.4)$$

где $k_i = (\omega_i/c)n_i$. Распространение сигнала $\tilde{A}(z)$ через нелинейный кристалл длиной L согласно (17.1.3) описывается уравнением

$$\tilde{A}(L) = \begin{vmatrix} \left[\operatorname{ch}(bL) - \frac{i\Delta k}{2b} \operatorname{sh}(bL)\right] \times & -i\frac{g}{2b}\operatorname{sh}(bL) \times \\ \times \exp\{-i[k_1 + (\Delta k/2)]L\} & \times \exp\{-i[k_1 + (\Delta k/2)]L\} \\ i\frac{g}{2b}\operatorname{sh}(bL) \times & \left[\operatorname{ch}(bL) + \frac{i\Delta k}{2b}\operatorname{sh}(bL)\right] \times \\ \times \exp\{i[k_2 + (\Delta k/2)]L\} & \times \exp\{i[k_2 + (\Delta k/2)]L\} \end{vmatrix} \tilde{A}(0). \qquad (17.2.5)$$

Потребуем теперь, чтобы вектор $\tilde{A}(z)$ воспроизводился после каждого прохода по резонатору туда и обратно. В обозначениях рис. 17.3 это условие имеет вид

$$\tilde{A}_e = \tilde{A}_a. \qquad (17.2.6)$$

Величина $\tilde{A}_e$ получается из $\tilde{A}_a$ умножением последней на четыре матрицы, первая из которых соответствует отражению от левого зеркала, вторая — распространению справа налево (при этом параметрического усиления нет), третья — отражению от правого зеркала и, наконец, четвертая, определяемая (17.2.5), — соответствует про-

[1] r_i — комплексные коэффициенты отражения по амплитуде: $|r_i|^2 = \mathcal{R}_i$.

хождению волны слева направо. В случае фазового синхронизма ($\Delta k = 0$) находим

$$\tilde{A}_e = \begin{vmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2^* \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e^{-ik_1 L} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 L} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2^* \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{-ik_1 L} & -i \operatorname{sh}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{-ik_1 L} \\ i \operatorname{sh}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{ik_2 L} & \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{ik_2 L} \end{vmatrix} \tilde{A}_a \qquad (17.2.7)$$

или в сокращенной записи

$$\tilde{A}_e = \tilde{\tilde{M}} \tilde{A}_a, \qquad (17.2.8)$$

где

$$\tilde{\tilde{M}} = \begin{vmatrix} r_1^2 \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{-i2k_1 L} & -ir_1^2 \operatorname{sh}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{-i2k_1 L} \\ i(r_2^*)^2 \operatorname{sh}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{i2k_2 L} & (r_2^*)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{i2k_2 L} \end{vmatrix}. \qquad (17.2.9)$$

Условие самосогласования (17.2.6) можно теперь записать как

$$\tilde{A}_a = \tilde{\tilde{M}} \tilde{A}_a. \qquad (17.2.10)$$

Нетривиальным решение для $\tilde{A}_a$ будет при

$$\det | \tilde{\tilde{M}} - \tilde{\tilde{I}} | = 0 \qquad (17.2.11)$$

или, с учетом (17.2.9),

$$\left[r_1^2 \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{-i2k_1 L} - 1 \right] \left[(r_2^*)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{i2k_2 L} - 1 \right] =$$

$$= r_1^2 (r_2^*)^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{gL}{2}\right) e^{i2(k_2 - k_1)L}. \qquad (17.2.12)$$

Мы нашли *условие параметрической генерации.*

Анализ (17.2.12) показывает, что минимальным пороговое усиление $g_{\text{пор}}$ оказывается в том случае, когда каждый из двух сомно-

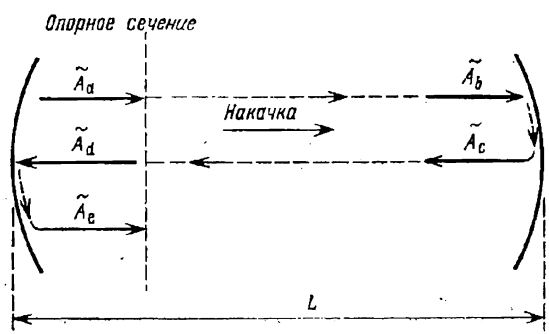


Рис. 17.3. Прохождение холостой волны в резонаторе параметрического генератора света (к выводу условия генерации 17.2.12)

жителей в левой части (17.2.12) — *действительное положительное* число. Это требует выполнения следующих соотношений:

$$-\varphi_1 + 2k_1L = 2m\pi, \quad -\varphi_2 + 2k_2L = 2s\pi, \qquad (17.2.13)$$

где m и s — целые числа и

$$(r_{1,2})^2 = \mathcal{R}_{1,2}\exp(i\varphi_{1,2}). \qquad (17.2.14)$$

Условия (17.2.13) означают, что частоты сигнальной волны (ω_1) и холостой волны (ω_2) должны соответствовать двум продольным модам резонатора.

На основании (17.2.12) ниже будут получены пороговые условия для двух важных классов параметрических генераторов.

Двухрезонаторный параметрический генератор. В этом случае резонатор обладает высокой добротностью на обеих частотах ω_1 и ω_2. Подставляя (17.2.13) в (17.2.12), получаем

$$(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)\operatorname{ch}(gL/2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = 1. \qquad (17.2.15)$$

Для зеркал с большим коэффициентом отражения $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \approx 1$, $\operatorname{ch}(gL/2) \approx 1 + g^2L^2/8$ и (17.2.15) переходит в

$$(g_{\text{пор}}L) = 2\sqrt{(1-\mathcal{R}_1)(1-\mathcal{R}_2)}. \qquad (17.2.16)$$

Используя (17.1.2) и выражая амплитуду поля накачки E_3 через интенсивность

$$I_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 n_3^2}{\mu_0}}E_3^2,$$

вместо (17.2.16) получаем

$$(I_3)_{\text{пор}} = 2\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{3/2}\frac{n_1 n_2 n_3 (1-\mathcal{R}_1)(1-\mathcal{R}_2)}{\omega_1\omega_2 l^2 d^2}. \qquad (17.2.17)$$

Пример.

Порог параметрической генерации. Найдем пороговую мощность накачки параметрического генератора на кристалле $LiNbO_3$, схема которого приведена на рис. 17.2. Зададимся при расчете следующими параметрами: $(1 - \mathcal{R}_1)(1 - \mathcal{R}_2) = 2\cdot10^{-2}$ (потери за один проход составляют 2%), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ мкм, L (длина кристалла) $= 1$ см, $n_1 = n_2 = n_3 = 1{,}5$, d_{311} ($LiNbO_3$) $= 5\cdot10^{-23}$.

Подстановка в (17.2.17) приводит к $(I_3)_{\text{пор}} = 5{,}67\cdot10^3$ Вт/см^2. Такая интенсивность легко достигается даже в непрерывном режиме. Приведенный пример помогает оценить привлекательность параметрических методов генерации с точки зрения получения когерентного оптического излучения на новых частотах.

Необходимость одновременно удовлетворить условиям $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и (17.2.13)

$$\omega_1 n_1 L/c = m\pi + \varphi_1/2, \quad \omega_2 n_2 L/c = s\pi + \varphi_2/2 \qquad (17.2.18)$$

накладывает строгие требования на стабильность параметров двухрезонаторного параметрического генератора. Проиллюстрируем это, предположив, что приведенные выше условия удовлетворяются для

некоторой пары частот ω_1 и ω_2 (ω_3 — фиксирована). Если L меняется на небольшую величину dL вследствие вибраций или ухода температуры, изменения ω_1 и ω_2, диктуемые условиями (17.2.18), есть

$$d\omega_1/\omega_1 = d\omega_2/\omega_2 = -dL/L.$$

Но если такое изменение частот ω_1 и ω_2 произойдет, нарушится соотношение $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Эта ситуация отображена на рис. 17.4. Из рисунка видно, что приблизительно на расстоянии

$$\Delta\omega = \pi c/L(n_2 - n_1) \qquad (17.2.19)$$

от первого имеется другой набор частот (ω_1', ω_2'), удовлетворяющих приведенным выше условиям. Таким образом, генератор должен реагировать на малые изменения длины большими вариациями частоты генерации порядка $\Delta\omega$. Поскольку величина $n_2 - n_1$ обычно составляет $10^{-2}...10^{-4}$, флуктуации частоты могут в десятки и сотни раз превышать межмодовый интервал $\pi c/nL$ [1].

Однорезонаторный параметрический генератор. В однорезонаторном генераторе [7, 8] только сигнальная волна (ω_1) претерпевает многократные отражения между зеркалами, в то время как холостая волна (ω_2) совершает лишь один проход через нелинейный кристалл. Типичная схема генератора представлена на рис. 17.5. Фазовый синхронизм в этом случае достигается при неколлинеарном взаимодействии, так как необходимо обеспечить пространственное разделение пучков. Поскольку направления распространения пучков не совпадают, условия фазового синхронизма имеют векторную форму

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \qquad (17.2.20)$$

так же как и в случае брэгговского рассеяния света на акустической волне (см. § 14.9). В направлении $\mathbf{k}_3$ распространяется пучок накачки. Направление $\mathbf{k}_1$ фиксировано осью резонатора. Величина вектора $\mathbf{k}_1$, величина и направление вектора $\mathbf{k}_2$ автоматически получаются такими, чтобы удовлетворялись как условие (17.2.20), так и закон сохранения энергии $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$.

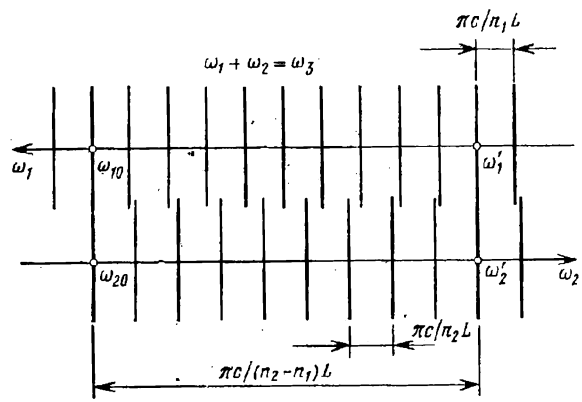


Рис. 17.4. Схема, поясняющая возможность выполнения условий фазового синхронизма (17.2.18) одновременно на двух парах частот: ω_{10}, ω_{20} и ω_1', ω_2'.

Отметим, что оси ω_1 и ω_2 направлены навстречу друг другу, так что в любом сечении на этой диаграмме удовлетворяется условие $\omega_1+\omega_2=\omega_3$. Вертикальные линии соответствуют продольным модам резонатора

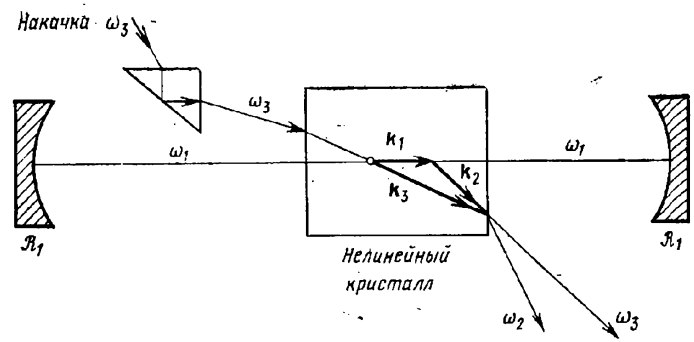


Рис. 17.5. Однорезонаторный параметрический генератор с неколлинеарным взаимодействием [7]

Пороговое условие для однорезонаторного параметрического генератора определим из (17.2.12), положив $r_2 = 0$. В результате получим

$$r_1^2 \operatorname{ch}\left(\frac{gL}{2}\right) e^{-i2k_1 L} = 1. \qquad (17.2.21)$$

Представив r_1^2 в виде

$$r_1^2 = \mathcal{R}_1 e^{i\varphi_1}, \qquad (17.2.22)$$

выделим из (17.2.21) фазовое и амплитудное условия по отдельности

$$\varphi_1 - 2k_1 L = 2m\pi, \qquad (17.2.23)$$

$$\mathcal{R}_1 \operatorname{ch}(g_{\text{пор}} L/2) = 1. \qquad (17.2.24)$$

Фазовое условие (17.2.23) аналогично условию (17.2.13), за исключением того, что не накладывается никаких ограничений на фазу φ_2 холостой волны, так что проблема перескока частоты, обсуждавшаяся выше для двухрезонаторного генератора, снимается.

При $\mathcal{R}_1 \approx 1$ пороговое условие (17.2.24) переписывается в виде

$$g_{\text{пор}} L = \sqrt{8}\sqrt{1-\mathcal{R}_1}. \qquad (17.2.25)$$

Отличие в пороговых интенсивностях накачки одно- и двухрезонаторных параметрических генераторов при одинаковой величине $\mathcal{R}_1$ составляет

$$\left[\frac{(g_{\text{пор}} L)_{\text{однорез}}}{(g_{\text{пор}} L)_{\text{двухрез}}}\right]^2 = \frac{2}{1-\mathcal{R}_2}. \qquad (17.2.26)$$

При $\mathcal{R}_2 \approx 1$ порог однорезонаторного генератора много выше, чем двухрезонаторного. Однако это обстоятельство может оказаться не столь уже и неприятным, если запас по мощности накачки достаточен для того, чтобы превысить порог. Поскольку, подобно лазеру, в параметрическом генераторе излишек мощности накачки переходит в когерентное излучение на частотах ω_1 и ω_2, высокий порог генерации не означает потери эффективности.

17.3. Насыщение и выходная мощность параметрического генератора

В гл. 9 при рассмотрении процесса генерации лазера мы установили, что усиление в стационарном режиме фиксируется на пороговом уровне независимо от величины накачки. Рост накачки в области выше порога привел бы к увеличению инверсии (и усиления), если бы не было возрастания интенсивности лазерного излучения, которое насыщает инверсную разность населенностей, не давая ей подняться над пороговым уровнем. Нечто подобное имеет место в параметрическом генераторе. Поле накачки обеспечивает усиление, величина которого дается формулой (17.1.2). На пороге генерации $g^2_{\text{пор}}L = 4\,(1 - \mathscr{R}_1)(1 - \mathscr{R}_2)$. В режиме стационарной генерации при любом превышении порога амплитуда волны накачки E_3 должна оставаться равной своему пороговому значению, так как g не может превышать $g_{\text{пор}}$ (если $g > g_{\text{пор}}$, мощность, излучаемая на частотах ω_1 и ω_2, будет нарастать во времени). Из постоянства мощности следует, что дополнительная мощность накачки (сверх пороговой) должна отводиться в сигнальную и холостую волны. Поскольку $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, каждый избыточный фотон накачки распадается на

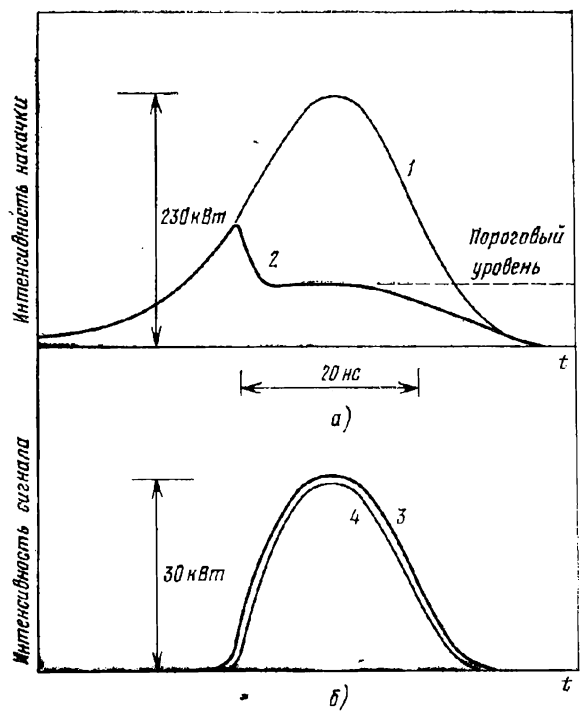


Рис. 17.6. Формы импульсов накачки и сигнала в параметрическом генераторе:

а — импульс накачки в отсутствие генерации (кривая *1*) и при наличии генерации (кривая *2*); *б* — генерируемый импульс (кривая *3*) и нормированная разность между импульсами накачки, представленными на рис. *а* (кривая *4*)

фотон сигнальной и фотон холостой волны, так что справедливы соотношения

$$\frac{\mathscr{P}_1}{\omega_1} = \frac{\mathscr{P}_2}{\omega_2} = \frac{(\mathscr{P}_3)_{\text{пор}}}{\omega_3}\left[\frac{\mathscr{P}_3}{(\mathscr{P}_3)_{\text{пор}}} - 1\right]. \qquad (17.3.1)$$

Приведенные соображения позволяют заключить, что параметрический генератор, в принципе, может иметь большой к.п.д. Для его достижения необходимо работать значительно выше порога, где $\mathscr{P}_3/(\mathscr{P}_3)_{\text{пор}} \gg 1$. Этот вывод подтверждается известными экспериментами [9]. На рис. 17.6 показано насыщение накачки, полученное экспериментально.

17.4. Перестройка частоты параметрического генератора

В отличие от лазера, работа параметрического генератора не связана с резонансными переходами в веществе, поэтому он может перестраиваться по частоте в широкой области. В параметрическом генераторе возбуждается пара частот ω_2 (холостая) и ω_1 (сигнальная), для которых одновременно выполняется условие синхронизма

$$\omega_3 n_3 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 \qquad (17.4.1)$$

и закон сохранения энергии

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \qquad (17.4.2)$$

Соотношение (17.4.1) — это просто другая форма записи уже известного равенства $k_3 = k_1 + k_2$.

Показатели преломления n_1, n_2 и n_3 зависят, вообще говоря, от ориентации кристалла (для необыкновенных лучей), его температуры, от электрического поля и давления. Вариация любого из этих параметров может быть использована согласно (17.4.1) для перестройки частот ω_1 и ω_2 параметрического генератора.

Рассмотрим способ перестройки частоты за счет изменения ориентации кристалла. Возьмем параметрический генератор, накачиваемый необыкновенной волной частоты ω_3; частоты ω_1 и ω_2 соответствуют обыкновенным волнам. При некоторой ориентации кристалла θ_0 (угол между осью кристалла и осью резонатора) генерация имеет место на частотах ω_{10} и ω_{20}, показатели преломления на которых равны n_{10} и n_{20} соответственно. При $\theta = \theta_0$ из формулы (17.4.1) имеем: $\omega_3 n_{30}(\theta_0) = \omega_{10} n_{10} + \omega_{20} n_{20}$.

Повернем теперь кристалл на угол $\Delta\theta$. При этом изменится показатель преломления n_3. Тогда для удовлетворения условия (17.4.1) должны слегка измениться и частоты ω_1 и ω_2. Генерация в новых условиях будет иметь следующие отличия от генерации при угле θ_0:

$$\omega \to \omega_3 \quad \text{(частота накачки не меняется)},$$

$$n_{30} \to n_{30} + \Delta n_3,$$

$$n_{10} \to n_{10} + \Delta n_1,$$

$$n_{20} \to n_{20} + \Delta n_2, \quad \omega_{10} \to \omega_{10} + \Delta\omega_1, \ \omega_{20} \to \omega_{20} + \Delta\omega_2, \ \Delta\omega_1 = -\Delta\omega_2.$$

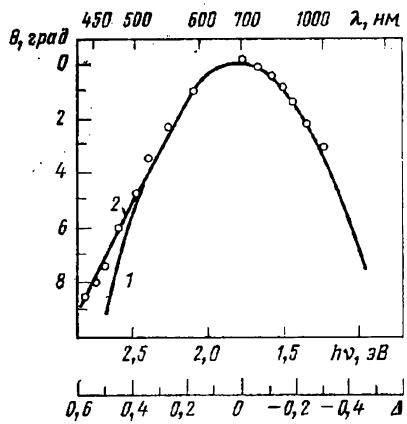


Рис. 17.7. Зависимость сигнальной частоты ω_1 от угла между направлением распространения накачки и оптической осью кристалла

1 — теоретическая кривая; *2* — экспериментальная. За нулевое принято значение угла, для которого $\omega_1=\omega_3/2$; $\Delta=(\omega_1-\omega_3/2):(\omega_3/2)$ [11]

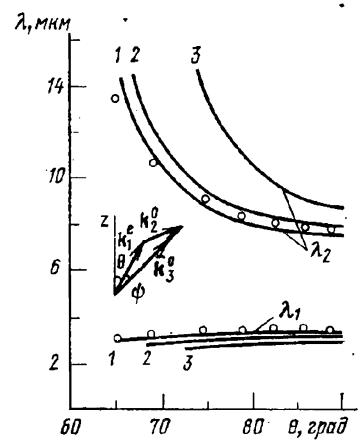


Рис. 17.8. Перестроечные кривые для кристалла CdSe при накачке на $\lambda=2{,}36$ мкм

1 — коллинеарное взаимодействие ($\psi=0$); *2*, *3* — неколлинеарное взаимодействие ($\psi=0{,}5$ и $1°$); $\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — волновые векторы накачки, сигнальной и холостой волн; θ — угол между $\mathbf{k}_1$ и осью кристалла; ψ — угол между $\mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_1$ [12]

Условие (17.4.1) должно удовлетворяться для новых частот и поэтому можно записать

$$\omega_3(n_{30}+\Delta n_3)=(\omega_{10}+\Delta\omega_1)(n_{10}+\Delta n_1)+(\omega_{20}-\Delta\omega_1)(n_{20}+\Delta n_2).$$

Пренебрегая членами второго порядка по $\Delta\omega$ и Δn, находим $\Delta\omega$

$$\Delta\omega_1\Big|_{\theta=\theta_0}=\frac{\omega_3\Delta n_3-\omega_{10}\Delta n_1-\omega_{20}\Delta n_2}{n_{10}-n_{20}}. \qquad (17.4.3)$$

Поскольку накачка осуществляется необыкновенной волной, n_3 является функцией угла θ. Показатели преломления n_1 и n_2, соответствующие обыкновенным волнам, зависят от частоты, но не от угла θ. Поэтому можно записать

$$\Delta n_1=\frac{\partial n_1}{\partial\omega}\Big|_{\omega_{10}}\Delta\omega_1,\quad \Delta n_2=\frac{\partial n_2}{\partial\omega}\Big|_{\omega_{20}}\Delta\omega_2, \qquad (17.4.4)$$

$$\Delta n_3=\frac{\partial n_3}{\partial\theta}\Big|_{\theta_0}\Delta\theta. \qquad (17.4.5)$$

Используя (17.4.3) и учитывая равенство $\Delta\omega_2=-\Delta\omega_1$, получаем выражение для скорости изменения частоты в зависимости от ориентации кристалла:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\theta}=\frac{\omega_3(\partial n_3/\partial\theta)}{(n_{10}-n_{20})+[\omega_{10}(\partial n_1/\partial\omega)-\omega_{20}(\partial n_2/\partial\omega)]}. \qquad (17.4.6)$$

Используя (5.4.2) и соотношение $d\,(1/x^2) = -(2/x^3)dx$, получаем

$$\frac{\partial n_3}{\partial \theta} = -\frac{n_3^3}{2}\sin(2\theta)\left[\left(\frac{1}{n_e^{\omega_3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{n_0^{\omega_3}}\right)^2\right],$$

что при подстановке в (17.4.6) даст [10]

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = \frac{-{}^1/_2\omega_3 n_{30}^3\left[(1/n_e^{\omega_3})^2 - (1/n_0^{\omega_3})^2\right]\sin(2\theta)}{(n_{10}-n_{20}) + [\omega_{10}(\partial n_1/\partial\omega) - \omega_{20}(\partial n_2/\partial\omega)]}. \qquad (17.4.7)$$

Экспериментальная кривая (*1*), показывающая зависимость частот сигнальной и холостой волн от θ для $NH_4H_2PO_4$ (ADP), приведена на рис. 17.7. Здесь же приведена теоретическая зависимость (кривая *2*), вычисленная на основе квадратичной аппроксимации (17.4.1) с использованием данных о дисперсии (т. е. зависимости n от ω) для кристалла ADP. Перестроечные кривые (зависимость длины волны генерации от ориентации кристалла) для генератора на CdSe [12] представлены на рис. 17.8.

Рассуждения того же рода, что привели нас к выражению (17.4.7), могут быть использованы и для того, чтобы выявить зависимость частоты генерации от вариаций любых других физических параметров.

17.5. Квантовый подход к параметрическим взаимодействиям

Для большинства обычных приложений вполне достаточно классического рассмотрения параметрических взаимодействий. Оно обладает рядом преимуществ перед квантовым благодаря тому, что более просто описываются когерентные свойства взаимодействующих полей. Некоторые аспекты взаимодействия, однако, требуют квантового подхода. В качестве примера можно взять задачу о флуктуациях в параметрических процессах [13] и близкую задачу спонтанной параметрической флуоресценции.

Рассмотрим случай трех взаимодействующих полей $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t)$ с частотами ω_1, ω_2 и ω_3, удовлетворяющими условию $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Гамильтониан взаимодействия подобен (16.2.4) и записывается как

$$U = -{}^2/_3 dE_1E_2E_3, \qquad (17.5.1)$$

где d — эффективный нелинейный коэффициент, являющейся линейной комбинацией коэффициентов d_{ijk}, которая зависит от класса симметрии выбранного кристалла, ориентации и поляризации векторов полей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$.

Поскольку во всех экспериментах с параметрическими усилителями и генераторами используется мощная накачка, поле E_3 считается классическим. В то же время поля сигнальной и холостой волн описываются на квантовом языке и поэтому вместо напряженности полей E_1 и E_2 в теории фигурируют соответствующие опера-

торы, которые введены соотношениями (5.5.11), (5.6.9). В результате имеем

$$\mathcal{H}' = \int_V U dv = \frac{dB_3 \hbar \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{3\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \times$$

$$\times \int_V \mathbf{E}_1(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_2(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_3(\mathbf{r})\,dv \cos\omega_3 t\,(\hat{a}_1^+ - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^+ - \hat{a}_2) =$$

$$= s\hbar \cos\omega_3 t\,(\hat{a}_1^+ - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^+ - \hat{a}_2), \qquad (17.5.2)$$

где

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) = B_3 E_3(\mathbf{r}) \cos\omega_3 t; \qquad (17.5.3)$$

$$s = \frac{dB_3\sqrt{\omega_1\omega_2}}{3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \int_V E_1(\mathbf{r})\,E_2(\mathbf{r})\,E_3(\mathbf{r})\,dv. \qquad (17.5.4)$$

Параметр s пропорционален «амплитуде» накачки B_3. Функции $E_1(\mathbf{r})$, $E_2(\mathbf{r})$ и $E_3(\mathbf{r})$ удовлетворяют нормировочным соотношениям (5.5.10):

$$\int_V E_l^2\,dv = 1. \qquad (17.5.5)$$

Полный гамильтониан является суммой невозмущенного ($d = 0$) гамильтониана (5.6.10) и гамильтониана взаимодействия (17.5.2):

$$\mathcal{H} = \sum_l \hbar\omega_l\,(\hat{a}_l^+ \hat{a}_l + 1/2) + s\hbar \cos\omega_3 t\,(\hat{a}_1^+ - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^+ - \hat{a}_2). \qquad (17.5.6)$$

Воспользуемся уравнением движения (1.3.6) в гайзенберговском представлении

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}, \mathcal{H}], \qquad (17.5.7)$$

где $\hat{A}$ — произвольный оператор. Отождествляя с $\hat{A}$ оператор $\hat{a}_1^+$, получаем

$$\frac{d\hat{a}_1^+}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{a}_1^+, \sum_l \hbar\omega_l\left(\hat{a}_l^+\hat{a}_l + \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{i}{\hbar}[\hat{a}_1^+, \mathcal{H}'] =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}_1^+, \hbar\omega_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1] - \frac{i}{\hbar}[\hat{a}_1^+, s\hbar\cos\omega_3 t\,(\hat{a}_1^+ - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^+ - \hat{a}_2)]. \qquad (17.5.8)$$

С помощью коммутационных соотношений (5.6.8)

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_m] = [\hat{a}_l^+, \hat{a}_m^+] = 0, \quad [\hat{a}_l, \hat{a}_m^+] = \delta_{lm} \qquad (17.5.9)$$

перейдем от (17.5.8) к

$$\frac{d\hat{a}_1^+}{dt} = i\omega_1 \hat{a}_1^+ - \frac{is}{2}(e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_3 t})(\hat{a}_2^+ - \hat{a}_2). \qquad (17.5.10)$$

В предельном случае $s = 0$, тогда

$$\hat{a}_1^+ = \hat{a}_1^+(0)\, e^{i\omega_1 t}, \quad \hat{a}_2 = \hat{a}_2(0)\, e^{-i\omega_2 t}$$

и, следовательно, роль синхронной (имеющей частоту ω_1) вынуждающей силы играет член $e^{i\omega_3 t}\hat{a}_2(t)$ в правой части (17.5.10). Здесь нужно помнить, что $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$. Пренебрегая несинхронными членами, получаем

$$\frac{d\hat{a}_1^+}{dt} = i\omega_1 \hat{a}_1^+ + i\frac{s}{2}\hat{a}_2 e^{i\omega_3 t} \qquad (17.5.11)$$

и аналогично

$$\frac{d\hat{a}_2}{dt} = -i\omega_2 \hat{a}_2 - i\frac{s}{2}\hat{a}_1^+ e^{-i\omega_3 t}. \qquad (17.5.12)$$

Несинхронные члены, колеблющиеся с частотой $(\omega_3 + \omega_2)$, обращаются в нуль при усреднении их за время, соответствующее нескольким периодам. Уравнения (17.5.11) и (17.5.12) имеют решения:

$$\hat{a}_1^+(t) = \left[\hat{a}_1^+(0)\,\mathrm{ch}\frac{st}{2} + i\hat{a}_2(0)\,\mathrm{sh}\frac{st}{2}\right]e^{i\omega_1 t},$$
$$\hat{a}_2(t) = \left[\hat{a}_2(0)\,\mathrm{ch}\frac{st}{2} - i\,\hat{a}_1^+(0)\,\mathrm{sh}\frac{st}{2}\right]e^{-i\omega_2 t}. \qquad (17.5.13)$$

Для нахождения чисел квантов поля с частотами ω_1 и ω_2 нам потребуются операторы $\hat{a}_1^+(t)\hat{a}_1(t)$ и $\hat{a}_2^+(t)\hat{a}_2(t)$. Их можно получить непосредственно из (17.5.13) путем умножения каждого из этих выражений на эрмитово-сопряженное. Используя коммутационные соотношения $[a_l(t)a_m^+(t)] = \delta_{lm}$, находим

$$\hat{a}_1^+(t)\,\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1^+(0)\,\hat{a}_1(0)\,\mathrm{ch}^2(st/2) + \left[1 + \hat{a}_2^+(0)\,\hat{a}_2(0)\right]\times \mathrm{sh}^2(st/2) + \\ + (i/2)\,\mathrm{sh}(st)\left[\hat{a}_1^+(0)\,\hat{a}_2^+(0) - \hat{a}_1(0)\,\hat{a}_2(0)\right], \qquad (17.5.14)$$

$$\hat{a}_2^+(t)\,\hat{a}_2(t) = \hat{a}_2^+(0)\,\hat{a}_2(0)\,\mathrm{ch}^2(st/2) + \left[1 + \hat{a}_1^+(0)\,\hat{a}_1(0)\right]\mathrm{sh}^2(st/2) + \\ + (i/2)\,\mathrm{sh}(st)\left[\hat{a}_1^+(0)\,\hat{a}_2^+(0) - \hat{a}_1(0)\,\hat{a}_2(0)\right].$$

Согласно (3.7.3) среднее значение физической величины, сопоставляемой оператору $\hat{A}$, равна

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi(0)\,|\,\hat{A}_H(t)\,|\,\psi(0)\rangle, \qquad (17.5.15)$$

где $\hat{A}_H(t)$ — оператор в гайзенберговском представлении; $\psi(0)$ — решение уравнения Шредингера, взятое при $t = 0$. В соответствии с этим общим правилом числа фотонов с частотами ω_1 и ω_2 суть

$$\langle n_1(t)\rangle = \langle\psi(0)\,|\,\hat{a}_1^+(t)\,\hat{a}_1(t)\,|\,\psi(0)\rangle, \\ \langle n_2(t)\rangle = \langle\psi(0)\,|\,\hat{a}_2^+(t)\,\hat{a}_2(t)\,|\,\psi(0)\rangle. \qquad (17.5.16)$$

Предположим, что при $t = 0$ интересующие нас числа фотонов равны n_{10} и n_{20}. Соответствующая волновая функция $\psi(0)$ имеет вид

$$\psi(0) = |n_{10}, n_{20}\rangle = |n_{10}\rangle |n_{20}\rangle, \tag{17.5.17}$$

где $|n_{10}\rangle$ — волновая функция гармонического осциллятора с энергией $\hbar\omega_1 (n_{10} + 1/2)$, которая подчиняется соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^+ |n_{10}\rangle &= (n_{10}+1)^{1/2} |n_{10}+1\rangle, \\ \hat{a}_1 |n_{10}\rangle &= (n_{10})^{1/2} |n_{10}-1\rangle, \\ \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 |n_{10}\rangle &= n_{10} |n_{10}\rangle. \end{aligned} \tag{17.5.18}$$

Подобные соотношения справедливы для $\hat{a}_2$.

Используя (17.5.17), (17.5.18) и условия ортогональности $\langle n_1 + l | n_1 + k\rangle = \delta_{lk}$, получаем из (17.5.16)

$$\begin{aligned} \langle n_1(t)\rangle &= n_{10}\mathrm{ch}^2(st/2) + (1 + n_{20})\mathrm{sh}^2(st/2), \\ \langle n_2(t)\rangle &= n_{20}\mathrm{ch}^2(st/2) + (1 + n_{10})\mathrm{sh}^2(st/2). \end{aligned} \tag{17.5.19}$$

Если проанализировать тот путь, которым мы пришли к соотношениям (17.5.19), можно обнаружить, что слагаемые, равные единице в коэффициентах $(1 + n_{20})$ и $(1 + n_{10})$, появляются вследствие некоммутативности операторов $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ и имеют, таким образом, чисто квантовое происхождение. Благодаря этим членам конечная выходная мощность имеется даже в том случае, когда $n_{10} = n_{20} = 0$, т. е. эти члены определяют шум.

Для определения шумовой мощности на выходе параметрического усилителя рассмотрим случай, когда на вход подается сигнал лишь одной частоты ω_1, так что $n_{20} = 0$. При $st \gg 1$ можно заменить $\mathrm{sh}(st/2)$ на $K = (1/4)\,e^{st}$, где K — коэффициент усиления[1]. Первое из соотношений (17.5.19) в этих обозначениях запишется так:

$$\langle n_1(t)\rangle = K(n_{10} + 1). \tag{17.5.20}$$

Более строгий вывод формулы (17.5.20) см. в задаче 17.1 и работе [13]. Согласно (17.5.20) число шумовых фотонов на выходе равно K. Принимая время усреднения $T \sim 1/d\nu$, получаем выходную шумовую мощность $Kh\nu_1 d\nu$. Эффективная мощность шума на входе получается делением выходной мощности на K

$$\mathcal{P}_{\text{ш вх}} = h\nu_1\, d\nu. \tag{17.5.21}$$

Получен тот же самый результат, что и для идеального лазерного усилителя в § 13.1.

[1] Тот факт, что коэффициент усиления зависит от времени, не должен нас смущать. Поскольку имеется однозначное соответствие между z и t, полученные результаты применимы и к случаю бегущих волн при замене $t \to z/c$. Однако квантовомеханический анализ удобнее проводить во временном представлении.

17.6. Преобразование частоты вверх

Параметрические взаимодействия в кристалле могут быть использованы для преобразования низкой частоты сигнала (ω_1) в высокую (ω_3) путем смещения его с мощным лазерным излучением частоты ω_2, такой что

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \tag{17.6.1}$$

Используя квантовый подход, развитый в § 17.5, мы можем рассматривать элементарный процесс преобразования частоты вверх как уничтожение сигнального фотона с частотой ω_1 и фотона накачки с частотой ω_2 с одновременным рождением фотона с частотой ω_3 [13, 15—17]. Поскольку энергия фотона равна $\hbar\omega$, закон сохранения энергии требует, чтобы выполнялось условие $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, а закон сохранения импульса приводит к соотношению

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \tag{17.6.2}$$

между тремя волновыми векторами. С этой же точки зрения число выходных фотонов с частотой ω_3 не может превышать числа фотонов с частотой ω_1 на входе.

Сигнальный пучок и накачка направляются с помощью полупрозрачного зеркала (или призмы) таким образом, чтобы через нелинейный кристалл они распространялись почти параллельно и пространственно в нем не разделялись (рис. 17.9).

Анализ преобразования частоты вверх мы начнем с уравнений (16.6.3). Пренебрегая истощением накачки A_2 и полагая равными нулю потери на частотах ω_1 и ω_2, первое и третье уравнения запишем в виде

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\frac{g}{2}A_3, \quad \frac{dA_3}{dz} = -i\frac{g}{2}A_1. \tag{17.6.3}$$

Используя (16.6.4) и (16.6.1) и полагая фазу поля накачки равной нулю, так что $A_2(0) = A_2^*(0)$, имеем

$$g = \sqrt{\frac{\omega_1\omega_3}{n_1 n_3}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)}\, dE_2, \tag{17.6.4}$$

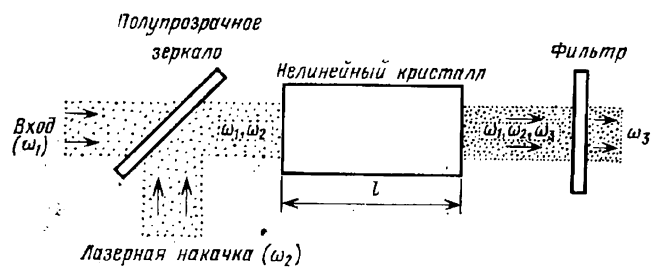


Рис. 17.9. Схематическое изображение параметрического преобразования частоты вверх, при котором в результате взаимодействия сигнальной волны (ω_1) и волны накачки (ω_2) в нелинейном кристалле генерируется волна суммарной частоты $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

в котором E_2 — амплитуда электрического поля накачки. Задав комплексные амплитуды волн на входе системы $A_1(0)$ и $A_3(0)$, запишем общее решение системы (17.6.3)

$$A_1(z) = A_1(0)\cos(gz/2) - iA_3(0)\sin(gz/2),$$
$$A_3(z) = A_3(0)\cos(gz/2) - iA_1(0)\sin(gz/2). \qquad (17.6.5)$$

При наличии на входе только низкочастотной волны $A_3(0) = 0$

$$|A_1(z)|^2 = |A_1(0)|^2\cos^2(gz/2),\ |A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2\sin^2(gz/2), \qquad (17.6.6)$$

откуда

$$|A_1(z)|^2 + |A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2.$$

При обсуждении формулы (16.6.2) было отмечено, что величина $|A_l(z)|^2$ пропорциональна потоку фотонов частоты ω_l (число фотонов через квадратный метр в секунду). Имея это в виду, мы можем следующим образом интерпретировать равенство (17.6.6): суммарный поток фотонов с частотами ω_1 и ω_3 через любую плоскость z одинаков и равен потоку фотонов с частотой ω_1 через входную плоскость $z = 0$. При переходе к мощностям световых потоков формулы 17.6.6) приобретают вид

$$\mathscr{P}_1(z) = \mathscr{P}_1(0)\cos^2\left(\frac{g}{2}z\right),\ \mathscr{P}_3(z) = \frac{\omega_3}{\omega_1}\mathscr{P}_1(0)\sin^2\left(\frac{g}{2}z\right). \qquad (17.6.7)$$

Коэффициент преобразования для кристалла длиной l равен

$$\frac{\mathscr{P}_3(l)}{\mathscr{P}_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1}\sin^2\left(\frac{g}{2}l\right). \qquad (17.6.8)$$

Отсюда можно определить максимальную величину отношения ω_3/ω_1, соответствующую полному преобразованию фотонов с частотой ω_3.

Реальной ситуации больше соответствует малый коэффициент преобразования (см. пример), так что, используя приближение $\sin x \approx x$ для $x \ll 1$, получаем

$$\frac{\mathscr{P}_3(l)}{\mathscr{P}_1(l)} \approx \frac{\omega_3}{\omega_1}\left(\frac{g^2 l^2}{4}\right),$$

откуда с помощью (17.6.4) и (16.6.2) можем перейти к

$$\frac{\mathscr{P}_3(l)}{\mathscr{P}_1(0)} \approx \frac{\omega_3^2 l^2 d^2}{2n_1 n_2 n_3}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}\left(\frac{\mathscr{P}_2}{S}\right). \qquad (17.6.9)$$

Здесь S — площадь поперечного сечения области взаимодействия.

Пример.

Преобразование частоты вверх. Практическое значение метода параметрического преобразования частоты вверх состоит в том, что с его помощью можно детектировать инфракрасное излучение (в диапазоне, в котором детекторы малоэффективны, инерционны или требуют глубокого охлаждения), преобразуя частоты в видимый или близкие к нему диапазоны. Преобразованное излучение может затем

приниматься эффективными и быстродействующими приемниками, такими как фотоумножители или фотодиоды (см. [15, 16]).

В качестве примера рассмотрим преобразование длины волны излучения CO_2-лазера с 10,6 мкм в 0,96 мкм путем смешения с излучением лазера на Nd^{3+}:YAG с длиной волны 1,06 мкм. Нелинейный кристалл, выбранный для этих целей, должен иметь пренебрежимо малые потери на частотах всех трех взаимодействующих полей. Кроме того, двулучепреломление в этом кристалле должно обеспечить возможность выполнения условия фазового синхронизма. Указанным требованиям удовлетворяет кристалл прустита Ag_3AsS_3 [18], приведенный в табл. 16.1.

Используем следующие данные: $\mathscr{P}_{1,06}/S = 10^8$ Вт/м^2, $l = 1$ см, $n_1 \approx n_2 \approx n_3 = 2{,}6$, $d_{эфф} = 1{,}1 \times 10^{-22}$ (берем умеренное значение, несколько меньшее половины величины d_{22} из табл. 16.1). Подставляя эти данные в (17.6.9), получаем коэффициент преобразования

$$\frac{\mathscr{P}_{\lambda=0,96\text{ мкм}}}{\mathscr{P}_{\lambda=10,6\text{ мкм}}} = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Это разумная величина коэффициента преобразования. В настоящее время на кристалле $LiIO_3$ [19] с рубиновым лазером ($\lambda = 0{,}6943$ мкм) в качестве источника накачки было осуществлено преобразование излучения 3,39 мкм с коэффициентом преобразования по числу квантов, близким к 100%.

Некоторые общие замечания по поводу параметрических взаимодействий. В данной главе были рассмотрены два типа взаимодействий: параметрическое усиление и преобразование частоты. Покажем, как с помощью простых, но строгих методов можно выяснить, какой вид параметрического взаимодействия имеет место в той или иной ситуации.

Из предыдущей и этой глав нам известно, что в нелинейной среде возможен обмен энергией между тремя электромагнитными полями с частотами ω_1, ω_2 и ω_3. Известно также, что в элементарном акте обмена участвует по *одному фотону* каждого поля. Эти соображения дают возможность определить тип взаимодействия, удовлетворяющий закону сохранения энергии, но в некоторых случаях недостаточны для определения направления перекачки энергии. Последний вопрос может быть решен с помощью добавочного условия — сохранения полного импульса фотонов, которое по существу совпадает с условием фазового синхронизма.

Для пояснения сказанного рассмотрим случай (в одномерном приближении) падения *интенсивного* лазерного излучения с частотой ω_2 и слабого сигнального излучения ω_1 на границу ($z = 0$) нелинейной среды. Попробуем определить типы возможных взаимодействий и условия их осуществления.

Если $\omega_1 > \omega_2$, то в рамках однофотонного (в указанном выше смысле) взаимодействия сначала возможны два типа процессов. Первый — когда фотон частоты ω_1 уничтожается при одновременном

рождении фотонов частот ω_2 и ω_3. С квантовой точки зрения речь идет о переходе $|n_1, n_2, n_3\rangle \to |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 + 1\rangle$. Поскольку полная энергия фотонов сохраняется, $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$. Направление потока энергии между полями с частотами ω_1, ω_2 и ω_3 показано стрелками на рис. 17.10, *а*. Сохранение импульса фотонов приводит к условию $k_1 = k_2 + k_3$. В этом процессе расходуется энергия волны с частотой ω_1 и увеличивается энергия волн с частотами ω_2 и ω_3, что отражает начальный участок $0 \leqslant gz \leqslant \pi$ графика на рис. 17.10, *в*.

Когда энергия волны с частотой ω_1 полностью расходуется, описанный выше процесс прекращается, поскольку он может идти лишь при наличии фотонов с частотой ω_1. В этих условиях, однако, может происходить обратный процесс, показанный на рис. 17.10, *б*, в котором кванты с частотами ω_2 и ω_3 рекомбинируют и порождают квант с частотой ω_1. Это соответствует области $\pi \leqslant gz \leqslant 2\pi$ на рис. 17.10, *в*. Такие процессы описываются выражениями (17.6.6).

Второй возможный процесс заключается в том, что сначала генерируется суммарная ($\omega_3' = \omega_1 + \omega_2$), а не разностная ($\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$) частота. Это показано на рис. 17.11. Поскольку вблизи $z = 0$ расходуются как фотоны накачки (их частота ω_2), так и фотоны с частотой ω_1, поле накачки вначале ослабляется, как это показано на рис. 17.11, *в*. В этом основное различие между данным случаем и генерацией разностной частоты, рассмотренный выше, когда энергия накачки сначала увеличивается.

Начальные условия для обоих процессов идентичны (на вход подаются колебания с частотами ω_2 и $\omega_1 > \omega_2$). Поэтому представляют интерес факторы, влияющие на то, какой именно из двух возможных процессов пойдет. Выбор определяется условием фазового

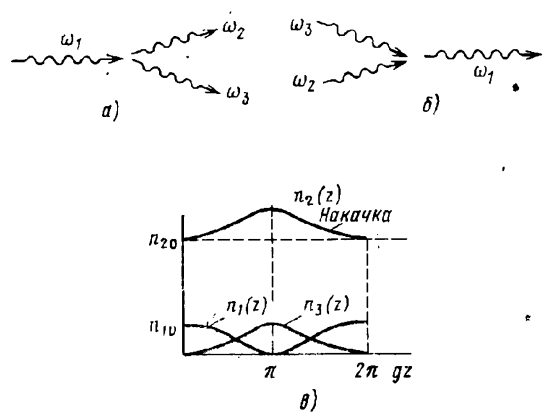
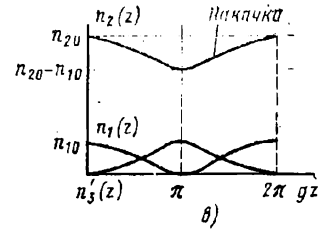


Рис. 17.10. В процессе генерации разностной частоты при подаче на вход накачки с частотой ω_2 и сигнала с частотой $\omega_1 > \omega_2$ первоначально рождаются фотоны с частотой $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, далее вдоль пути взаимодействия направление процесса меняется на обратное. Направления потока мощности показаны на рис. *а* и *б*. Плотности фотонов приведены на рис. *в*.



в)

Рис. 17.11. В процессе генерации суммарной частоты фотон накачки с частотой ω_2 и фотон сигнала с частотой ω_1 сначала порождают фотон с частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, далее вдоль пути взаимодействия направление процесса меняется на обратное. Направление потока мощности показано на рис. *а* и *б*. Плотности фотонов изображены на рис. *в*

синхронизма. Если условие $k_1 = k_2 + k_3$ удовлетворяется при $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ то идет процесс генерации разностной частоты, изображенной на рис. 17.10. Если же, напротив $k_1 + k_2 = k_3'$, то генерируется суммарная частота $\omega_3' = \omega_1 + \omega_2$; этот процесс изображен на рис. 17.11. Выполнение того или иного условия достигается, как было сказано в § 17.4, соответствующей ориентацией кристалла.

Чтобы объяснить, почему фазовый синхронизм определяет тип взаимодействия, напомним, что поданные на вход сигналы с частотами ω_1 и ω_2 создают в каждой точке нелинейной среды колебания как с частотой $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, так и с частотой $\omega_3' = \omega_1 + \omega_2$. Условие фазового синхронизма обеспечивает синфазное сложение излучения из всех точек протяженного участка взаимодействия, тогда как взаимодействие с несохранением импульса фотонов не может развиться.

Случай $\omega_1 < \omega_2$. В этом случае частота сигнальной волны на входе (ω_1) меньше, чем частота мощной волны накачки (ω_2). Один из возможных процессов состоит в «расщеплении» фотона с частотой ω_2, на фотоны с частотами ω_1 и ω_3, где $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$. Соответствующий квантовый переход $|n_1, n_2, n_3\rangle \rightarrow |n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1\rangle$ изображен на рис. 17.12. Этот случай параметрического усиления, описанный в § 17.1. Рост n_1 и n_3 продолжается до тех пор, пока $n_2 > 0$. Как только мощность волны накачки оказывается исчерпанной, направление потока энергии сменяется на обратное. Подобная смена направления, отмеченная точкой Q на рис. 17.12, редко наблюдается на практике. В большинстве экспериментов выполняется условие $n_2(z) = \text{const}$, т. е. процесс не выходит за пределы начального участка графика.

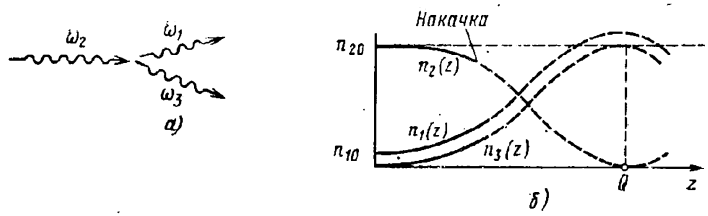


Рис. 17.12. Преобразование энергии колебаний с частотой ω_2 в колебания с частотами ω_1 и ω_3, где $\omega_2=\omega_1+\omega_3$. Плотности фотонов показаны на рис. *б*.

Непрерывные кривые соответствуют приближению заданной интенсивности накачки, использованному при анализе параметрического усиления в § 17.2 (если считать накачкой колебания с частотой ω_2, а не ω_3, как в § 17.2); штриховые кривые соответствуют нелинейности области

В заключение заметим, что вместо описанного выше параметрического усиления можно получить и генерацию суммарной частоты $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Это произойдет, если $k_3 = k_1 + k_2$. Такой процесс описан выше и изображен на рис. 17.11. Единственное отличие от предыдущего заключается в том, что теперь $\omega_1 < \omega_2$.

17.7. Спонтанная параметрическая флуоресценция

В § 17.5 было установлено, что даже в отсутствие входного сигнала нелинейный кристалл, возбуждаемый волной накачки, спонтанно излучает на частотах ω_1 и ω_2, где

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \tag{17.7.1}$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \tag{17.7.2}$$

Это явление предсказано на основе квантовых соображений, но его можно трактовать и классически, если привлечь нулевые колебания поля в качестве входного сигнала с энергией, равной одному *фотону на моду*. Последнее утверждение основывается на соотношении (17.5.19), которое мы перепишем снова:

$$\langle n_2(t)\rangle = n_{20}\mathrm{ch}^2(st/2) + (1 + n_{10})\mathrm{sh}^2(st/2). \tag{17.7.3}$$

Параметрическая люминесценция на частоте ω_2 представляет собой мощность, излучаемую кристаллом в отсутствие входного сигнала (т. е. $n_{10} = n_{20} = 0$), и, таким образом, она является следствием наличия единицы в скобках в правой части (17.7.3). Нарастание холостой волны $\langle n_2(t)\rangle$ инициируется фотоном сигнальной волны ω_1 на входе.

В реальных экспериментах имеется большое число пар частот ω_1, ω_2, которые удовлетворяют условиям (17.7.1) и (17.7.2). Мощность, измеряемая вблизи частоты ω_2 (или ω_1), включает в себя сумму по всем этим парам.

Выведем далее выражение для полной мощности в некоторой полосе вблизи частоты ω_2, измеряемой детектором в эксперименте, схема которого приведена на рис. 17.13, *а*. Действовать будем следую-



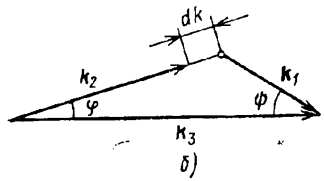


Рис. 17.13. К расчету мощности параметрической флуоресценции.

Телесный угол, с которого излучение собирается детектором равен $d\Omega = \pi\theta^2 (\theta \ll 1)$

щим образом. Найдем вначале полное число мод вблизи ω_1, которые эффективно возбуждают моды, расположенные около ω_2. Затем, считая, что в каждой моде ω_1 имеется один фотон, вычислим с помощью соотношений классической теории из § 17.1 выходную мощность в каждой из возбуждаемых ω_2 мод. Взяв сумму по всем связанным парам мод, получим полную выходную мощность на частоте ω_2.

Рассмотрим совокупность мод с волновыми векторами, распределенными по углу между ψ и $\psi + d\psi$, а по величине между k_1 и $k_1 + dk_1$, как показано на рис. 17.13, *б*. Число таких мод определяется по формуле

$$dN_1 = \frac{2\pi k_1^2\, dk_1 \sin\psi d\psi}{(2\pi)^3/V}. \qquad (17.7.4)$$

Числитель в (17.7.4) равен объему в **k**-пространстве, занимаемому указанной совокупностью мод. Знаменатель $(2\pi)^3/V$ — объем одной моды в **k**-пространстве; V — объем взаимодействия. Эффективную входную интенсивность, которая интересует нас в связи с задачей нахождения выходной мощности на частоте ω_2, можно найти, помещая по одному кванту $\hbar\omega_1$ в каждую из dN_1 мод и умножая суммарную энергию на c/Vn_1:

$$dI_1 = dN_1 \hbar\omega_1 \frac{c}{Vn_1} = \frac{k_1^2\, dk_1 \psi d\psi \hbar\omega_1 c}{(2\pi)^2 n_1}. \qquad (17.7.5)$$

Из (17.1.3) следует, что при $A_2(0) = 0$ холостая волна нарастает по закону

$$A_2(l) = -igA_1^*(0)\, e^{-i(\Delta k l/2)} \left(\frac{l}{2}\right) \frac{\sin\left\{\sqrt{(\Delta k)^2 g^2}\,(l/2)\right\}}{\sqrt{(\Delta k)^2 - g^2}\,(l/2)}. \qquad (17.7.6)$$

При найденной выше входной интенсивности $dI_1 S$ (S — площадь поперечного сечения) получаем на выходе мощность

$$d\mathcal{P}_2 = dI_2 S = dI_1 \left(\frac{gl}{2}\right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) S \frac{\sin^2\left\{\sqrt{(\Delta k)^2 - g^2}\,(l/2)\right\}}{\left\{\sqrt{(\Delta k)^2 - g^2}\,(l/2)\right\}^2}. \qquad (17.7.7)$$

Множитель (ω_2/ω_1) в полученном выражении отражает тот факт, что интенсивность I_i связана с потоком фотонов $|A_i|^2$ соотношением $I_i \sim \omega_i |A_i|^2$. Подставив в уравнение (17.7.7)

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} n_1, \quad \psi d\psi = (k_2^2/k_1^2)\, \varphi d\varphi, \quad d\omega_2 = -d\omega_1,$$

$$(\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 = \text{const}),$$

$$g^2 = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right) \frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2} d^2 E_3^2 \quad \text{[из формулы (17.1.2)]},$$

$$E_3^2 = 2\left(\frac{\mathcal{P}_3}{S}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 n_3^2}},$$

получим

$$d\mathcal{P}_2 = -\frac{\hbar\omega_1 \omega_2^4 n_2 d^2}{(2\pi)^2 c^5 n_1 n_3 \varepsilon_0^3} l^2 \mathcal{P}_3 d\omega_2 \varphi d\varphi \operatorname{sinc}^2 (\sqrt{(\Delta k)^2 - g^2}\, l/2), \tag{17.7.8}$$

где $\operatorname{sinc} x \equiv (\sin x/x)$. Полная мощность $\mathcal{P}_2$ находится интегрированием (17.7.8) по всем частотам и по всем углам $0 < \varphi < \theta$ приема детектора (рис. 17.13):

$$\mathcal{P}_2 = -\beta \mathcal{P}_3 l^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\theta} d\omega_2\, d\varphi \varphi \operatorname{sinc}^2 (\sqrt{(\Delta k)^2 - g^2} l/2), \tag{17.7.9}$$

где

$$\beta = \frac{\hbar\omega_1 \omega_2^4 n_2 d^2}{(2\pi)^2 c^5 n_1 n_3 \varepsilon_0^3}. \tag{17.7.10}$$

В (17.7.9) множитель $\omega_1 \omega_2^4$ мы вынесли за знак интеграла, поскольку функция sinc действует аналогично δ-функции и ограничивает эффективную область частот вблизи ω_2, вносящих вклад в интеграл.

Чтобы выполнить интегрирование в (17.7.9), необходимо выразить Δk через ω_2 и φ. Из рис. 17.13, *б* в предположении $\varphi \ll 1$, $\psi \ll 1$, $k_3 \approx k_1 + k_2$ получим

$$\Delta k \approx \frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\varphi^2}{2} + (k_3 - k_2 - k_1). \tag{17.7.11}$$

Обозначим частоты ω_1 и ω_2, соответствующие фазовому синхронизму при $\varphi = 0$, так ω_{10}, ω_{20} и разложим k_2 и k_1 в ряд

$$k_2 = k_{20} + \left.\frac{\partial k_2}{\partial \omega_2}\right|_{\omega_{20}} (\omega_2 - \omega_{20}),$$

$$k_1 = k_{10} - \left.\frac{\partial k_1}{\partial \omega_1}\right|_{\omega_{10}} (\omega_2 - \omega_{20}).$$

Здесь использовано равенство $\omega_2 - \omega_{20} = -(\omega_1 - \omega_{10})$. Сейчас можно переписать (17.7.11) в виде

$$\Delta k = -b(\omega_2 - \omega_{20}) + a\varphi^2, \tag{17.7.12}$$

$$a = \frac{k_2 k_3}{2k_1}, \quad b = \left.\frac{\partial k_2}{\partial \omega_2}\right|_{\omega_{20}} - \left.\frac{\partial k_1}{\partial \omega_1}\right|_{\omega_{10}}. \tag{17.7.13}$$

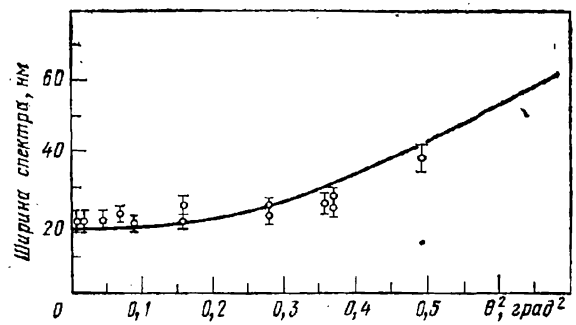


Рис. 17.14. Ширина линии флуоресценции в зависимости от телесного угла приема детектора. Непрерывная линия соответствует теоретической зависимости (17.7.16) [23]

С учетом (17.7.12) выражение для полной мощности холостой волны имеет вид

$$\mathcal{P}_2 = -\beta l \mathcal{P}_3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\theta} d\varphi d\omega_2 \operatorname{sinc}^2 \left\{ \frac{\sqrt{[a\varphi^2 - b(\omega_2 - \omega_{20})] - g^2}\, l}{2} \right\}. \tag{17.7.14}$$

За исключением узкой области, где $a\varphi^2 \approx b(\omega_2 - \omega_{20})$, справедливо неравенство $[a\varphi^2 - b(\omega_2 - \omega_{20})]^2 \gg g^2$. Пренебрегая членом g^2, получим в результате интегрирования

$$\mathcal{P}_2 = \pi \frac{\beta l \mathcal{P}_3}{|b|} \theta^2. \tag{17.7.15}$$

Это и есть искомый результат [20—22].

Экспериментальные результаты. Из формулы (17.7.14) ясно, что в измеряемую мощность параметрической люминесценции вблизи частоты ω_2 вносит вклад континуум частот. Чтобы оценить ширину спектра люминесценции, вернемся к соотношению (17.7.12)

$$\Delta k = a\varphi^2 - b\Delta\omega_2.$$

Вклад в $\mathcal{P}_2$ вносят моды с разными Δk и вклад этот обращается в нуль, когда $\Delta k l \approx 2\pi$. Это первый нуль функции sinc в (17.7.9), в предельном случае $\Delta k \gg g$. Из этого следует, что для заданного направления φ

$$(\Delta\omega_2)_{\max} \approx (a\varphi^2 l - 2\pi)/bl. \tag{17.7.16}$$

Таким образом, для малых углов θ ($\theta = \varphi_{\max}$) имеем $\Delta\omega_2 = \pi/|b|$, в то время как для $0 > (2\pi/al)^{1/2}$

$$\Delta\omega_2 \approx a\theta^2/|b|. \tag{17.7.16а}$$

Экспериментально наблюдаемая зависимость $\Delta\omega_2$ от θ^2 представлена на рис. 17.14. Зависимость полной мощности $\mathcal{P}_2$ от $\mathcal{P}_3$ и θ^2 дана на рис. 17.15. Перестроечная кривая для спонтанной параметрической флуоресценции, т.е. зависимость λ_2 от ориентации кристалла, температуры и других возможных факторов та же самая, что и для параметрического генератора, поскольку в обоих случаях требуется удовлетворить условию синхронизма.

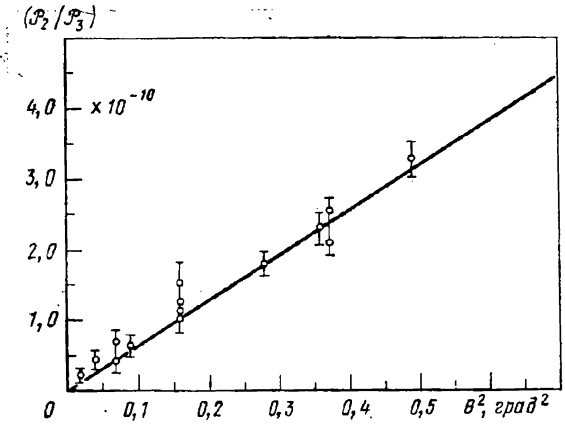


Рис. 17.15. Зависимость полной мощности сигнала от телесного угла приема детектора.

Непрерывная линия — рассчитанная по формуле (17.7.15) мощность флуоресценции кристалла, отнесенная к мощности накачки. Экспериментальные данные привязаны к теоретической кривой в точке $\theta^2=0{,}16$ град^2 [23]

Так как параметрическая флуоресценция является беспороговым процессом, она может быть использована для определения перестроечной кривой параметрического генератора, когда не известна дисперсия показателя преломления.

17.8. Параметрическое усиление и генерация встречных волн [27]

Рассмотрим возможность параметрического взаимодействия в том случае, когда сигнальная и холостая волны распространяются навстречу друг другу. Для определенности считаем, что сигнальная волна бежит в $-z$-направлении, так что

$$\begin{aligned} A_1(z,t) &= A_1(z)\exp[i(\omega_1 t + k_1 z)], \\ A_2(z,t) &= A_2(z)\exp[i(\omega_2 t - k_2 z)]. \end{aligned} \tag{17.8.1}$$

Если мы проследим за выводом уравнений (17.1.1) вернувшись к (16.4.10), то обнаружим, что для рассматриваемого случая в уравнениях изменяется лишь знак k_1. По этой причине уравнения (17.1.1) для амплитуд мод примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{\alpha_1}{2}A_1 + i\frac{g}{2}A_2^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= -\frac{\alpha_2}{2}A_2 + i\frac{g}{2}A_1 e^{i\Delta k z}, \end{aligned} \tag{17.8.2}$$

где

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \Delta k = k_3 - k_2 + k_1. \tag{17.8.3}$$

Отметим, что уравнения (17.8.2) и (17.1.1) отличаются лишь знаками перед g и α_1 в первом уравнении и определением Δk.

Другое принципиальное различие между параметрическим взаимодействием попутных и встречных волн имеется в граничных усло-

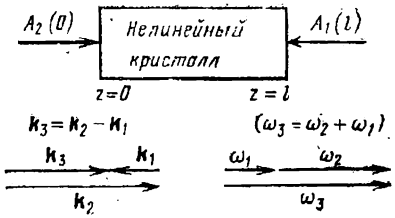


Рис. 17.16. Граничные условия и условия синхронизма при параметрическом взаимодействии встречных волн

виях. В соответствии с направлениями распространения нужно задать $A_2(0)$ и $A_1(l)$, как это показано на рис. 17.16.

Предоставим самому читателю показать, что решениями уравнений (17.8.2) при отсутствии потерь ($\alpha = 0$) и при выполнении условия фазового синхронизма ($\Delta k = 0$) являются:

$$A_1(z) = \frac{A_1(l)}{\cos(gl/2)} \cos\left(\frac{gz}{2}\right) + i\frac{A_2^*(0)}{\cos(gl/2)} \sin\frac{g(z-l)}{2}, \quad (17.8.4)$$

$$A_2^*(z) = i\frac{A_1(l)}{\cos(gl/2)} \sin\left(\frac{gz}{2}\right) + \frac{A_2^*(0)}{\cos(gl/2)} \cos\frac{g(z-l)}{2}. \quad (17.8.5)$$

Поля на выходе из кристалла равны:

$$A_1(0) = \frac{A_1(l)}{\cos(gl/2)} - iA_2^* \operatorname{tg}(gl/2), \quad (17.8.6)$$

$$A_2^*(l) = iA_1(l) \operatorname{tg}(gl/2) + \frac{A_2^*(0)}{\cos(gl/2)}.$$

Особый интерес представляет случай

$$gl = \pi. \quad (17.8.7)$$

Амплитуды $A_1(0)$ и $A_2^*(l)$ обращаются в бесконечность при конечной величине обоих входных сигналов. Иначе говоря, мы получаем конечный выход $A_1(0)$ и $A_2^*(l)$ при нулевом входе [$A_1(l) = 0$, $A_2^*(0) = 0$].

В предельном случае ($gl \to \pi$) распределения полей (17.8.4) и (17.8.5) сводятся к соотношениям

$$A_1(z) = iA \sin\frac{g(z-l)}{2}, \quad A_2^*(z) = A\cos\frac{g(z-l)}{2},$$

вид которых показан на рис. 17.17.

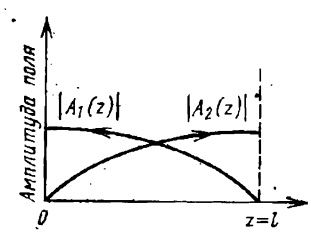


Рис. 17.17. Поля сигнальной (A_1) и холостой (A_2) волн при параметрической генерации встречных волн

Заметим, что генерация здесь может существовать и без обратной связи, обеспечиваемой зеркалами. Обратная связь возникает из-за противоположного направления распространения взаимодействующих волн. На аналогичном принципе работают лампы обратной волны [24, 25] и лазеры с распределенной обратной связью [26], обсуждаемые в гл. 19. Однако параметрический генератор, основанный на этом принципе, до сих пор не реализован. Трудность заключается в отсутствии нелинейных оптических материалов с достаточным двулучепреломлением, способным обеспечить выполнение условия фазового синхронизма $\Delta k = 0$. Сказанное поясняет рис. 17.16. Из векторной диаграммы вытекает требование $\omega_3 n_3 < \omega_2 n_2$, в то время как $\omega_3 > \omega_2$. Ясно, что рабочий диапазон таких устройств ограничен условием $\omega_1 \ll \omega_2, \omega_3$.

Задачи.

17.1. В § 17.5 мы определили $\langle n_1(t) \rangle$, используя $\psi(0) = |n_{10}, n_{20}\rangle$. Точно определив число квантов, мы потеряли, согласно (1.2.19), всю информацию о фазе. Положение можно исправить, взяв в качестве $\psi(0)$ пуассоновский пакет с минимальной неопределенностью [13]:

$$\psi(0) = \sum_{n_{10}, n_{20}} [p(n_{10})\, p(n_{20})]^{1/2} \exp[-i(n_{10}\varphi_1 + n_{20}\varphi_2)]\, |n_{10}, n_{20}\rangle,$$

где $p(n_{i0}) = [\exp(\bar{n}_{i0})\, n_{i0}^{-n_{i0}}]/(n_{i0})!$ — функция распределения Пуассона; $\bar{n}_{i0}$ — среднее число квантов с частотой ω_i при $t = 0$. Покажите, что при таком выборе $\psi(0)$ в пределе $st \gg 1$,

$$\langle \bar{n}_1(t) \rangle = \langle \psi(0) | a_1^\dagger(t)\, a_1(t) | \psi(0) \rangle =$$
$$= [1 + \bar{n}_{10} + \bar{n}_{20} - 2(\overline{n_{10} n_{20}})^{1/2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\, K,$$

где K — коэффициент усиления, пропорциональный $(1/4)e^{st}$. Заметим, что при $\bar{n}_{20} = 0$ результат должен совпасть с (17.5.20).

17.2. Основываясь на материале § 17.5, дайте квантовое описание процесса преобразования частоты «вверх». Опишите шумовые свойства преобразователя, имея в виду выходное излучение при $n_{10} = 0$.

17.3. Вычислите квантовую дисперсию $\langle (\Delta n_1^2) \rangle = \langle (n_1 - \bar{n}_1)^2 \rangle$ для случая параметрического усилителя, начальное состояние которого $\psi(0) = |n_{10}, n_{20}\rangle$.

17.4. Вычислите дисперсию $\langle (\Delta n_3)^2 \rangle = \langle (n_3 - \bar{n}_3)^2 \rangle$ для случая преобразователя частоты вверх, начальное состояние которого $|n_1 = 0, n_2 = 0\rangle$. Здесь $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, причем индекс «2» относится к накачке, а «3» — к преобразованному сигналу.

17.5. Выведите уравнения преобразователя частоты вверх, работающего на обратной волне. Предполагается, что накачка имеет частоту ω_2, а единственный входной сигнал на частоте ω_1 равен $A_1(0)$.

17.6. Выведите формулу (17.7.15).

Глава 18

ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ (ВКР) И ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ МАНДЕЛЬШТАМА — БРИЛЛЮЭНА (ВРМБ)

Комбинационное или рамановское рассеяние света давно используется для изучения колебательных спектров молекул и оптической ветви колебаний кристаллических решеток [1]. Ячейка, содержащая исследуемое вещество (жидкость, газ или кристалл), облучается светом с узкой спектральной линией. Спектральный анализ рассеянного излучения обнаруживает присутствие линий, смещенных вниз по частоте на величину, равную колебательным частотам облучаемого образца. Этот тип рассеяния называется стоксовым рассеянием.

В спектре рассеянного излучения присутствуют также частоты, равные сумме частоты падающего излучения и колебательных частот вещества. Это так называемое антистоксово рассеяние, интенсивность которого на несколько порядков меньше интенсивности стоксовой компоненты.

Указанные два типа рассеяния поясняются на рис. 18.1. При стоксовом рассеянии (рис. 18.1, *а*) молекула первоначально находится в основном состоянии ($v = 0$). Падающий фотон частоты $\omega_л$ поглощается и одновременно испускается фотон стоксовой частоты $\omega_с = \omega_л - \omega_v$. В силу закона сохранения энергии молекула переходит в возбужденное состояние ($v = 1$) с энергией $\hbar\omega_v$. Если же первоначально молекула находилась в возбужденном состоянии ($v = 1$), как показано на рис. 18.1, *б*, то излучается фотон антистоксовой частоты $\omega_{ас} = \omega_л + \omega_v$. Так как антистоксово излучение определяется молекулами, находящимися в возбужденном состоянии, то его интенсивность ниже интенсивности стоксова излучения

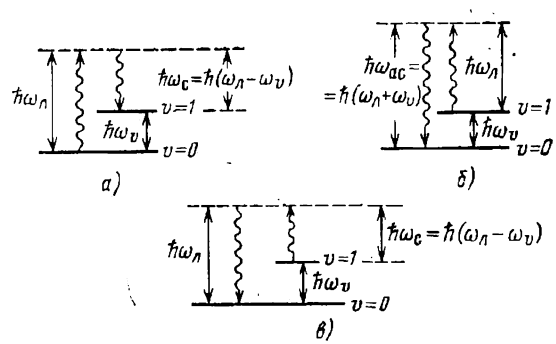
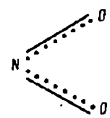
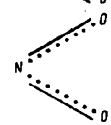


Рис. 18.1. Стоксово рассеяние, при котором поглощается лазерный фотон и вместе со стоксовым фотоном на частоте $\omega_л - \omega_v$ возникает квант колебаний молекулы ($v = 1$) (*а*), антистоксово рассеяние, при котором поглощаются лазерный фотон и колебательный квант, а испускается фотон на частоте $\omega_л + \omega_v$ (*б*) и процесс поглощения фотонов частоты $\omega_л - \omega_v$, стимулированный наличием лазерного излучения частоты $\omega_л$ (*в*)

Таблица 18.1

Характерные частоты колебаний атомных групп в молекулах [6]

Частота, $см^{-1}$	Колеблющаяся атомная группа	Тип соединения
445—550	S—S	Алифатические дисульфиды
490—522	C—I	Алифатические соединения
510—594	C—Br	То же
570—650	C—Cl	»
600—700	C—SH	Меркаптаны
630—705	C—S	Алифатические соединения
700—1100	C—C	То же
750—850		Парапроизводные бензола
884—899		Циклопентан и монопроизводные
939—1005		Циклобутан и производные
990—1050		Бензол и одно- и трехзамещенные бензолы
1020—1075	C—O—C	Алифатические соединения
1085—1125	C—OH	То же
1120—1130	C=C=O	«
1188—1207		Циклопропан и производные
≈1190	SO_2	Алифатические соединения
1216—1230	—S=O	То же
≈1340		Ароматические соединения
≈1380		Алифатические соединения
≈1380		Нафталин и производные
1590—1610		Производные бензола
1610—1640	N=O	Алифатические соединения
1620—1680	C=C	То же
≈1630	C=N	Ароматические соединения
1654—1670	C=N	Алифатические соединения
1650—1820	C=O	То же
1695—1715	C=O	Ароматические соединения
1974—2260	C≡C	Алифатические соединения
2150—2245	C≡N	Нитрилы
≈2570	S—H	Алифатические соединения
2800—3000	C—H	То же
3000—3200	C—H	Ароматические соединения
3150—3650	O—H	Алифатические соединения
3300—3400	N—H	То же
4160	H—H	H_2

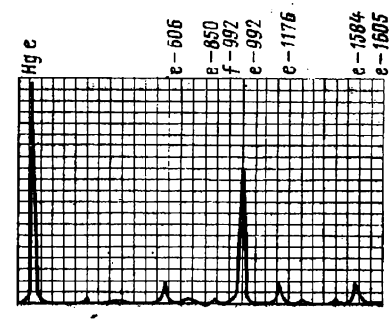


Рис. 18.2. Спектр стоксова рассеяния в бензоле.

Крайняя левая линия представляет собой *e*-линию ртути, сильно уменьшенную в масштабе, с частотой 22 938 $см^{-1}$ (4358 Å), являющуюся наиболее сильной линией в видимой части спектра ртути. Числа сверху дают частотный сдвиг (в $см^{-1}$) вниз, соответствующий колебательным частотам. Им предшествует буква, обозначающая исходную линию ртути. Линия $f=992$ порождена *f*-линией ртути с частотой 22 995 $см^{-1}$ [2]

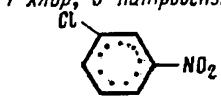
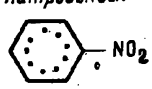
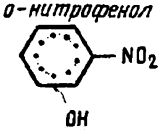
на величину множителя $e^{-\hbar\omega_v/kT}$. Обратный процесс, при котором фотон стоксовой частоты поглощается, представлен на рис. 18.1, *в*.

До недавнего времени в спектроскопии комбинационного рассеяния применялись интенсивные источники некогерентного излучения, причем наиболее часто в качестве таковых использовались интенсивные линии излучения ртутных ламп. Типичный спектр комбинационного рассеяния на колебаниях молекул бензола приведен на рис. 18.2. В последнее время когерентные лазерные источники вытеснили ртутную лампу [5].

Колебательные частоты некоторых групп атомов приведены в табл. 18.1 и 18.2. Характерно, что частоты мало меняются от соединения к соединению.

Таблица 18.2

Влияние различных радикалов на частоту симметричных колебаний группы NO_2 [6]

Вещество	Частота колебаний, $см^{-1}$	Вещество	Частота колебаний, $см^{-1}$
1-хлор, 3-нитробензол 	1353	*p-нитротолуол* 	1340
Нитробензол 	1345	*o-нитрофенол* 	1322[1]

[1] Этот большой сдвиг по частоте обусловлен внутримолекулярной водородной связью.

18.1. Квантовое описание комбинационного рассеяния

Последовательное квантовое описание комбинационного рассеяния имеет ограниченную ценность, поскольку матричные элементы неизвестны и в большинстве практических случаев вычисление их слишком сложно. Однако эту теорию можно применять для грубой оценки сечения рассеяния и выяснения зависимости его от разности между энергией падающего фотона и уровнями энергии рассеивающей среды [3].

Основная цель данной главы — рассмотрение когерентного вынужденного комбинационного рассеяния. Для этого, как нам кажется, лучше всего подходит полуфеноменологическая теория Плачека [4].

Для определенной электронной конфигурации потенциальная энергия молекулы как функция нормальных колебательных координат может быть представлена в виде

$$V(X) = aX^2 + bX^3 + \ldots, \qquad (18.1.1)$$

где $X = 0$ соответствует положению равновесия. Мы уже рассмотрели в гл. 2 решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, которому отвечает $V(X) = {}^1/_2 kX^2$. Этому простейшему виду функции $V(X)$ соответствует энергетический спектр, состоящий из эквидистантных колебательных уровней с энергиями $E_v = \hbar\omega\,(v + 1/2)$. Вообще говоря, членами высших порядков в (18.1.1) пренебречь нельзя, что существенно осложняет ситуацию.

Наведенный дипольный момент молекулы $\mu_i = \varepsilon_0 \alpha E$, где α — поляризуемость молекулы; E — электрическое поле. Для жесткой молекулы мы должны считать α константой. Ясно, что в колеблющейся молекуле α является функцией нормальной координаты X. Первые два члена в разложении $\alpha(X)$ запишем в виде[1] $\alpha(X) = \alpha_0 + (\partial\alpha/\partial X)_0 X$, где $(\partial\alpha/\partial X)_0$ — так называемая дифференциальная поляризуемость. Кроме того, несимметричная молекула может обладать постоянным дипольным моментом μ_p, который тоже является функцией X. Возьмем первые два члена разложения этого момента $\mu_p(X) = \mu_p^0 + (\partial\mu_p/\partial X)_0 X$. Для изучения переходов между колебательными уровнями, стимулированных полем излучения, рассмотрим гамильтониан возмущения

$$\mathcal{H}' = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{E} = -\left[\mu_p^0 + \left(\frac{\partial\mu_p}{dX}\right)_0 X + \varepsilon_0\alpha_0 E + \varepsilon_0\left(\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)_0 XE\right]E. \qquad (18.1.2)$$

Первый и третий члены в квадратных скобках не зависят от X и не могут быть ответственны за переходы между соседними колебательными уровнями, так как собственные функции $\psi_v(X)$ ортогональны. Со вторым членом непосредственно связано инфракрасное погло-

[1] В реальных молекулах мы имеем дело с тензорной величиной $\partial\alpha_{ij}/\partial X_k$, но в данном рассмотрении этим обстоятельством пренебрегаем.

щение на частоте ω_v. Комбинационное рассеяние описывает последний член

$$\mathscr{H}'_{\text{комб}} = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)_0 \varepsilon_0 X E^2. \tag{18.1.3}$$

Для того чтобы показать это, рассмотрим электрическое поле, спектр которого состоит из двух компонент:

$$E = E_{\text{л}} \cos \omega_{\text{л}} t + E_{\text{с}} \cos \omega_{\text{с}} t. \tag{18.1.4}$$

Используя (5.6.15) и опуская постоянные множители, можно записать электрическое поле в форме

$$E \sim (\omega_{\text{л}})^{1/2} (\hat{a}_{\text{л}}^{+} - \hat{a}_{\text{л}}) + (\omega_{\text{с}})^{1/2} (\hat{a}_{\text{с}}^{+} - \hat{a}_{\text{с}}), \tag{18.1.5}$$

где $\hat{a}^{+}$ и $\hat{a}$ — операторы рождения и уничтожения фотонов. Аналогичным образом, используя (2.2.24) и (2.2.25), получаем

$$X \sim (\hat{a}_v^{+} + \hat{a}_v), \tag{18.1.6}$$

где $\hat{a}_v^{+}$ и $\hat{a}_v$ — операторы рождения и уничтожения возбуждений гармонического осциллятора. Ясно, что процесс излучения стоксова фотона, показанный на рис. 18.1, *а*, обусловлен членом $\hat{a}_{\text{л}} \hat{a}_{\text{с}}^{+} \hat{a}_v^{+}$, поэтому вероятность излучения пропорциональна величине

$$W_{\text{изл}} \sim |\underset{\text{кон}}{\langle n_{\text{л}} - 1,\ n_{\text{с}} + 1,} \\ 1 | \hat{a}_{\text{л}}\, \hat{a}_{\text{с}}^{+}\, \hat{a}_v^{+} | \underset{\text{нач}}{n_{\text{л}},\ n_{\text{с}}, 0\rangle}|^2 = n_{\text{л}} (n_{\text{с}} + 1), \tag{18.1.7}$$

где $n_{\text{с}}$ и $n_{\text{л}}$ — числа квантов фотонов в стоксовой и лазерной модах соответственно. Обратный процесс, показанный на рис. 18.1, *в*, при котором излучается лазерный фотон $\omega_{\text{л}}$ и поглощается фотон стоксовой частоты $\omega_{\text{с}}$, имеет вероятность, пропорциональную величине

$$W_{\text{погл}} \sim |\underset{\text{кон}}{\langle n_{\text{л}} + 1,\ n_{\text{с}} - 1, 0}| \hat{a}_{\text{л}}^{+}\, \hat{a}_{\text{с}}\, \hat{a}_v | \underset{\text{нач}}{n_{\text{л}}, n_{\text{с}}, 1\rangle}|^2 = (n_{\text{л}} + 1)\, n_{\text{с}}. \tag{18.1.8}$$

В результате этого процесса молекула переходит из возбужденного состояния ($v = 1$) в невозбужденное ($v = 0$).

Рассмотрим далее процесс комбинационного рассеяния одномодового лазерного излучения частоты $\omega_{\text{л}}$ в *одну* стоксову моду частоты $\omega_{\text{с}}$. Из выражений (18.1.7) и (18.1.8) получим уравнение

$$dn_{\text{с}}/dt = DP_a\, n_{\text{л}} (n_{\text{с}} + 1) - DP_b\, n_{\text{с}} (n_{\text{л}} + 1), \tag{18.1.9}$$

где D — константа, которую требуется определить; P_a и P_b — вероятности нахождения молекул в основном ($v = 0$) и возбужденном ($v = 1$) состояниях соответственно. Поскольку число фотонов сохраняется, выполняется равенство $dn_{\text{л}}/dt = -dn_{\text{с}}/dt$.

При обычном комбинационном рассеянии $\langle n_{\text{с}} \rangle \ll 1$, поэтому скорость нарастания стоксова излучения дается формулой

$$dn_{\text{с}}/dt = -dn_{\text{л}}/dt = DP_a n_{\text{л}}. \tag{18.1.10}$$

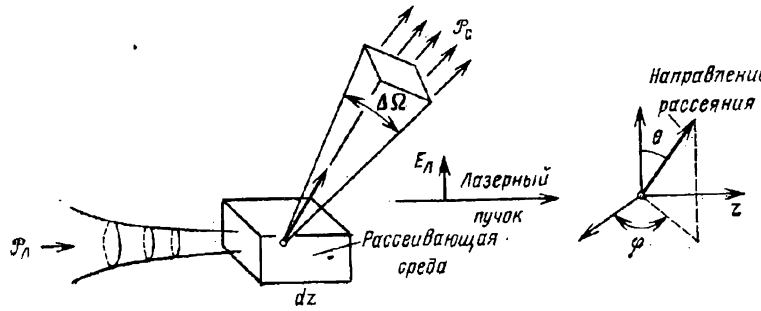


Рис. 18.3. К измерению сечения рассеяния $[d\sigma/d\Omega(\theta, \varphi)]_V$.

Полная мощность рассеяния $\mathcal{P}_c$ в пространственный угол $\Delta\Omega$ от элемента длины dz связана с полной падающей мощностью $\mathcal{P}_л$ соотношением $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_л[d\sigma/d\Omega(\theta, \varphi)]_V\, d\Omega dz$

«Наблюдатель», движущийся со скоростью света $c/n(\nu_л)$, видит, что плотность возбуждающих фотонов убывает вдоль луча в соответствии с уравнением

$$\frac{dn_л}{dz} = \frac{dn_л}{dt}\frac{dt}{dz} = -\frac{Dn(\nu_л)}{c} P_a n_л, \qquad (18.1.11)$$

так что

$$n_л(z) = n_л(0)\, e^{-(Dn(\nu_л) P_a/c) z} = n_л(0)\, e^{-\beta z}, \qquad (18.1.12)$$

где $\beta = [Dn(\nu_л)P_a]/c$, а $n(\nu_л)$ — показатель преломления на частоте $\nu_л$.

Фактически в экспериментах по рассеянию света падающий пучок взаимодействует не с одной стоксовой модой, а с целой совокупностью мод, частоты которых лежат около стоксовой частоты в пределах естественной ширины линии перехода $\Delta\nu$. Отнесенное к единице объема сечение стоксова рассеяния σ (то же, что и показатель поглощения) равняется произведению на число таких мод:

$$\sigma = \beta\left[\frac{8\pi\nu_c^2 n^3(\nu_c)}{c^3}\Delta\nu V\right] = \frac{8\pi\nu_c^2 Dn^3(\nu_c) n(\nu_л) P_a V\Delta\nu}{c^4}. \qquad (18.1.13)$$

Обычно измеряют не σ, а дифференциальное сечение рассеяния на единицу объема $[d\sigma/d\Omega(\theta, \varphi)]_V$. Смысл этой величины поясняет рис. 18.3. Полная мощность $\mathcal{P}_c$, рассеиваемая на пути dz в телесный угол $\Delta\Omega$ в направлении θ, φ, есть

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_л\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)\right]_V \Delta\Omega dz, \qquad (18.1.14)$$

где $\mathcal{P}_л$ — полная падающая мощность. Поскольку появление каждого рассеянного фотона связано с потерей фотона падающего света, можно написать уравнение

$$\frac{d\mathcal{P}_л}{dz} = -\frac{\omega_л}{\omega_c}\mathcal{P}_л\int_0^{4\pi}\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)\right]_V d\Omega = -\sigma\mathcal{P}_л.$$

Таким образом, показателем ослабления падающего пучка является

$$\sigma = \frac{\omega_л}{\omega_c} \int_0^{4\pi} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)\right]_V d\Omega. \qquad (18.1.15)$$

В случае дипольного рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(0 = 90°) \sin^2\theta,$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°) \sin^3\theta =$$

$$= 4\pi\left(\frac{2}{3}\right)\frac{d\sigma}{d\Omega}(0 = 90°), \qquad (18.1.16)$$

откуда

$$\sigma = 4\pi\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\omega_л}{\omega_c}\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°)\right]_V. \qquad (18.1.17)$$

Практически используемой величиной является дифференциальное сечение одной молекулы. При плотности молекул N

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°)\right]_V = N\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°)\right]_{мол}$$

и вместо (18.1.17) можно записать

$$\sigma = 4\pi\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\omega_л}{\omega_c} N\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(90°, \varphi)\right]_{мол}. \qquad (18.1.18)$$

Но сечение σ, определяемое формулой (18.1.18), это то же самое, что (18.1.13), поэтому

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(90°, \varphi)\right]_{мол} = \frac{3\nu_c^3 n^3(\nu_c)\, n(\nu_л)\, DV\Delta\nu P_a}{\nu_л N c^4}. \qquad (18.1.19)$$

Следовательно, мы нашли связь квантовой константы D с экспериментально измеряемой величиной — сечением рассеяния.

18.2. Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) [7]

Рассмотрим уравнение (18.1.9), оставив в нем лишь член, соответствующий вынужденному рассеянию, который пропорционален n_c. В этом случае

$$dn_c/dt = D(P_a - P_b)\, n_л\, n_c \qquad (18.2.1)$$

или

$$\frac{dn_c}{dz} = \frac{dn_c}{dt}\frac{dt}{dz} = \frac{Dn(\nu_c)}{c}(P_a - P_b) n_л\, n_c \qquad (18.2.2)$$

и плотность фотонов частоты ν_c или интенсивность увеличивается с расстоянием по экспоненциальному закону

$$I_c(z) = I_c(0)\, e^{g_c z},$$

где

$$g_c = [Dn(\nu_c)/c](P_a - P_b)\, n_л. \qquad (18.2.3)$$

Воспользовавшись выражением (18.1.19) для D и соотношением

$$n_л/V = I_л n(\nu_л)/h\nu_л c,$$

получим

$$g_c = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°)_{мол} \frac{Nc^2\{1 - \exp[-h(\nu_л - \nu_c)/kT]\}}{3h\nu_c^3 n^2(\nu_c)\,\Delta\nu} I_л. \qquad (18.2.4)$$

Здесь принято, что рассеивающая среда находится в равновесии при температуре T, благодаря чему

$$(P_a - P_b)/P_a = 1 - \exp[-h(\nu_л - \nu_c)/kT].$$

Формула (18.2.4), утверждает, что среда, обладающая отличным от нуля сечением комбинационного рассеяния, в присутствии лазерного излучения с интенсивностью $I_л$ будет усиливать излучение на частоте $\nu_c = \nu_л - \nu_v$. Показатель усиления g пропорционален произведению интенсивности лазера на сечение рассеяния.

Излучение, рассеянное в направлении θ, φ, имеет узкий спектр шириной $\Delta\nu$ с центром на частоте ν_c. Нормированная функция формы линии рассеяния $S(\nu)$ описывает зависимость усиления g_c от ν_c. Заменив в (18.2.4) $(\Delta\nu)^{-1}$ на $S(\nu)$, получим

$$g_c(\nu) = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°)\right]_{мол} \frac{Nc^2\{1 - \exp[-h(\nu_л - \nu_c)/kT]\}}{3h\nu_c^3 n^2(\nu_c)} I_л S(\nu), \qquad (18.2.5)$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\, d\nu = 1$.

Типичная форма линии спонтанного комбинационного рассеяния представлена на рис. 18.4.

В табл. 18.3—18.5 собраны данные о сечениях рассеяния для молекул различных жидкостей и газов.

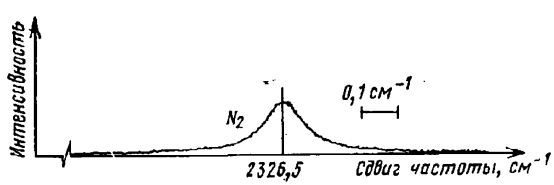


Рис. 18.4. Спектр комбинационного рассеяния жидкого азота [9]

Таблица 18.3

Сечение комбинационного рассеяния молекул некоторых жидкостей [10]

Частота колебаний молекулы	Длина волны возбуждающего света, нм	Сечение комбинационного рассеяния $d\sigma/d\Omega$, 10^{-29} см²/молек·ср
Бензол C_6H_6 992 см$^{-1}$	632,8	0,800±0,029
	514,5	2,57 ±0,08
	488,0	3,25 ±0,10
Хлорбензол C_6H_5Cl 1002 см$^{-1}$	632,8	0,353±0,013
	514,5	1,39 ±0,05
	488,0	1,83 ±0,06
Нитробензол $C_6H_5NO_2$ 1345 см$^{-1}$	632,8	1,57 ±0,06
	514,5	9,00 ±0,29
	488,0	10,3 ±0,40
	694,3	0,755
Сероуглерод CS_2 656 см$^{-1}$	632,8	0,950±0,034
	514,5	3,27 ±0,10
	488,0	4,35 ±0,13
Четыреххлористый углерод CCl_4 459 см$^{-1}$	632,8	0,628±0,023
	514,5	1,78 ±0,06
	488,0	2,25 ±0,07

Таблица 18.4

Отношение сечения комбинационного рассеяния некоторых молекул к сечению молекулы N_2[1)]

Газ	Колебательная частота, см$^{-1}$	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	Газ	Колебательная частота, см$^{-1}$	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$
N_2	2331	1,0	SO_2 (v_1)	1151	5,2
O_2	1556	1,3	SO_2 (v_2)	519	0,12
H_2 [суммарно]	4161	2,4	H_2S (v_1)	2611	6,4
H_2 [Q (1)]	4161	1,6	NH_3 (v_1)	3334	5,0
CO	2145	1,0	ND_3 (v_1)	2420	3,0
NO	1877	0,27	CH_4 (v_1)	2914	6,0
CO_2 (v_1)	1388	1,4	C_2H_6 (v_3)	992	1,6
CO_2 ($2v_2$)	1286	0,89	C_6H_6 (v_1)	3062	7,0
N_2O (v_1)	1285	2,2	C_6H_6 (v_2)	992	9,1
N_2O (v_3)	2224	0,51			

[1)] $(d\sigma/d\Omega)_{N_2} = 4{,}3\cdot10^{-31}$ см²/молек·ср. Длина волны возбуждающего света 488 нм [11].

Таблица 18.5

Сдвиг частоты ν_v, ширина линии $\Delta\nu$ и сечение спонтанного комбинационного рассеяния $Nd\sigma/d\Omega$ (N — число молекул в 1 см³), параметр усилия $g_c/I_л$[1] при вынужденном комбинационном рассеянии в различных средах ($\lambda_л$ = = 694,3 нм)

Вещество	ν_v, см$^{-1}$	$\Delta\nu$, см$^{-1}$	$Nd\sigma/d\Omega \parallel \cdot 10^8$, см$^{-1}$/ср	$g_c/I_л \cdot 10^3$, см/МВт	Температура, К
Жидкий O_2	1552	0,117	0,48±0,14	14,5±4	300
				16 ±5	
Жидкий N_2	2326,5	0,067	0,29±0,09	17 ±5	
				16 ±5	
Бензол	992	2,15	3,06	2,8	300
		2,3	3,3	3,0	
			4,1	3,8	
CS_2	655,6	0,50	7,55	24	300
Нитробензол	1345	6,6	6,4	2,1	300
			7,9	2,6	
Хлорбензол	1002	1,6	1,5	1,9	300
Бромбензол	1000	1,9	1,5	1,5	300
Толуол	1003	1,94	1,1	1,2	300
$LiNbO_3$	256	23	381	9	300
	258	7	262	28,7	80
	637	20	231	9,4	300
	643	16	231	12,6	80
Li^6NbO_3	256			17,8	300
	266			35,6	80
	637			9,4	300
	643			12,6	80
$Ba_2NaNb_5O_{15}$	650			6,7	300
	655			18,9	80
$LiTaO_3$	201	22	238	4,4	300
	215	12	167	10	80
Li^6TaO_3	600			4,3	300
	608			7,9	80
SiO_2	467			0,8	300
				0,6	300
H_2 — газ при давлении более 10 атм.	4155			1,5	300

[1] Для нахождения показателя усиления g_c (см$^{-1}$) на частоте ν_c этот параметр следует умножить на $\nu_c/\nu_л$ и на интенсивность в МВт/см² [12].

Пример.

Комбинационное усиление в CS_2. Задав следующие исходные данные: усиление в CS_2, создаваемое излучением рубинового лазера с интенсивностью $I_л$: $T = 300$ К, $\nu_л = 4{,}32 \cdot 10^{14}$ Гц (14400 см$^{-1}$), $\nu_v^{**} = 656$ см$^{-1}$, $\nu_c = 4{,}123 \cdot 10^{14}$ Гц (13744 см$^{-1}$), $\Delta\nu = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ Гц (0,5 см$^{-1}$), $n = 1{,}63$, $N = 1{,}64 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$, вычислим усиление в CS_2, создаваемое излучением рубинового лазера с интенсивностью $I_л$, $(d\sigma/d\Omega)_{мол} = 6{,}8 \cdot 10^{-30}$ см²/стерад. Подставив эти цифры в (18.2.4), получим g_{max} [см$^{-1}$] $\approx 0{,}02 I_л$ [МВт/см²].

Предположим, что среда, способная к комбинационному рассеянию, помещена в оптический резонатор длиной L с коэффициентом отражения зеркал на стоксовой частоте, равным $\mathscr{R}$. При наличии поля лазерной накачки усиление стоксовой компоненты в центре линии дается формулой (18.2.4). Если усиление способно компенсировать потери, на частоте ν_c возникает генерация. Из необходимого условия генерации $\mathscr{R}\exp(g_0 L) = 1$, используя (18.2.5) и учитывая, что ширина линии спонтанного комбинационного рассеяния $\Delta\nu = 1/S(\nu_0)$, получаем выражение для пороговой интенсивности лазерной накачки

$$(I_л)_{пор} = \frac{3\hbar\nu_c^3\,\Delta\nu n^2(\nu_c)\,(-L^{-1}\ln\mathscr{R})}{(d\sigma/d\Omega)_{мол}\,Nc^2\{1-\exp[-h(\nu_л-\nu_c)/kT]\}}. \qquad (18.3.1)$$

Воспользовавшись данными для CS_2 из предыдущего параграфа и приняв $\mathscr{R} \approx 10^{-3}$, $L = 5$ см, получаем $(I_л)_{пор} = 67$ МВт/см^2.

Генерация при ВКР представляет собой практический способ преобразования излучения импульсных лазеров (например, лазера на неодимовом стекле) в когерентное излучение, сдвинутое по частоте на колебательную частоту вещества. Величины частотных сдвигов для ряда веществ приведены в табл. 18.5.

Параметрическая неустойчивость. В проведенном выше анализе мы пренебрегали возможностью значительного заселения возбужденных уровней молекул за счет комбинационного рассеяния. Вероятности обнаружения рассеивающей молекулы в основном или первом возбужденном состоянии брались равными P_a и P_b, т. е. соответствующими тепловому равновесию и не зависящими от накачки.

Посмотрим теперь, к чему ведет отказ от этого допущения. Для того чтобы учесть изменение степени возбуждения колебаний, усовершенствуем формулу (18.1.7), включив в нее матричный элемент по колебательным состояниям. Это даст нам выражения

$$W_{изл} = C|\langle n_л - 1,\ n_c + 1,\ n_v + 1|\,\hat{a}_л\hat{a}_c^+\hat{a}_v^+\,|n_л, n_c, n_v\rangle|^2 = \\ = Cn_л(n_c+1)(n_v+1), \qquad (18.3.2)$$

$$W_{погл} = C|\langle n_л + 1,\ n_c - 1,\ n_v - 1|\,\hat{a}_л^+\hat{a}_c\hat{a}_v\,|n_л, n_c, n_v\rangle|^2 = \\ = C(n_л+1)n_c n_v. \qquad (18.3.3)$$

Чистая вероятность излучения фотонов стоксовой частоты дается формулой

$$W_{изл} - W_{погл} = C[n_л(n_c + n_v + 1) - n_c n_v].$$

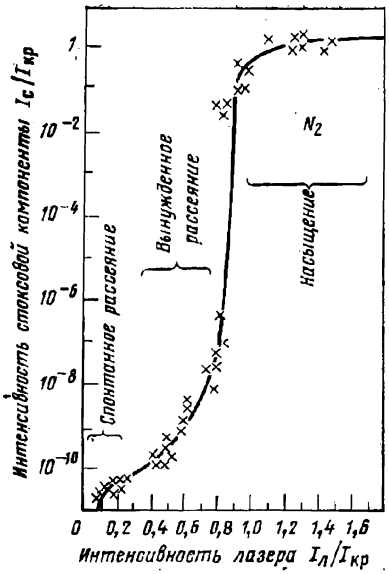


Рис. 18.5. Сопоставление экспериментальных данных по ВКР с выводами теории параметрической неустойчивости [12а]

Уравнения баланса для плотностей фотонов и фононов имеют вид

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} = C\left[(n_c + n_v + 1)\, n_л - n_c\, n_v\right] - \frac{n_c}{\tau_c}, \qquad (18.3.4)$$

$$\frac{\partial n_v}{\partial t} = C\left[(n_c + n_v + 1)\, n_л - n_c\, n_v\right] - \frac{n_v - \bar{n}_v}{\tau_v}. \qquad (18.3.5)$$

Первые члены правых частей (18.3.4) и (18.3.5) одинаковы, поскольку вероятности генерации стоксова фотона и фонона частоты ω_v[1)] совпадают. Это следует из того, что матричные элементы (18.3.2) и (18.3.3) инвариантны по отношению к перестановке индексов v и с. Другими словами, на каждый генерируемый (поглощаемый) фотон частоты ω_c приходится один излученный (поглощенный) фонон частоты ω_v.

Предположим, что плотность стоксовых фотонов релаксирует к нулю с характерным временем τ_c, которое связано с показателем поглощения α_c соотношением $\tau_c^{-1} = \alpha_c c_c$, где c_c — скорость света, имеющего частоту ω_c, в среде. Плотность фононов на одну моду n_v релаксирует с постоянной времени τ_v к равновесному значению

$$\bar{n}_v = [\exp(h\nu_v/kT) - 1]^{-1}.$$

Рассмотрим теперь возможности роста n_v под влиянием лазерного поля. В предположении $n_v \gg n_c$, 1 из (18.3.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_v - \bar{n}_v) = \frac{1}{\tau_v}\left[n_v \frac{n_л}{n_{л\,кр}} - (n_v - \bar{n}_v)\right], \qquad (18.3.6)$$

где $n_{л\,кр} = (C\tau_v)^{-1}$. Из уравнения (18.3.6) следует, что при некоторой плотности лазерной накачки ($n_л > n_{л\,кр}$) фононная плотность оказывается неустойчивой при всех значениях n_v, так как $\partial(n_v - \bar{n}_v)/\partial t > 0$.

В эксперименте указанная неустойчивость должна проявиться следующим образом. По достижении некоторой критической интенсивности лазерной накачки ($I_{кр} = \hbar\omega_л n_{л\,кр} c_л / V$) число фононов

[1)] Фононом мы называем квант возбуждения молекулярных колебаний с частотой ω_v.

нарастает взрывным образом (рис. 18.5). Детальное обсуждение этих вопросов можно найти в работе [12а][1].

18.4. Макроскопическая теория ВКР

Поскольку в интересующей нас области числа заполнения велики ($n_л$, $n_c \gg 1$), то вместо квантового подхода предыдущего параграфа при построении теории ВКР можно использовать классический подход.

В экспериментах по ВКР было обнаружено, что выходное излучение содержит несколько стоксовых ($\omega_л - \omega_v$), ($\omega_л - 2\omega_v$) ... и антистоксовых ($\omega_л + \omega_v$), ($\omega_л + 2\omega_v$) ... компонент. Чтобы понять природу этих компонент, обратимся к рис. 18.1. Процесс излучения стоксовой компоненты, как это видно из рис. 18.1, *а*, приводит к увеличению населенности колебательного уровня ($v = 1$), и поэтому становится возможным излучение на частоте $\omega_{ас} = \omega_л + \omega_v$, как это показано на рис. 18.1, *б*. Стоксова ($\omega_с$) и антистоксова ($\omega_{ас}$) компоненты могут, в свою очередь, служить исходным излучением, генерирующим частоты $\omega_с - \omega_v = \omega_л - 2\omega_v$ и $\omega_{ас} + \omega_v = \omega_л + 2\omega_v$. Аналогично можно объяснить и появление комбинационных частот более высоких порядков.

Строгий анализ этой задачи практически неосуществим, так как требует решения системы большого числа уравнений для колебаний среды совместно с уравнениями Максвелла [3]. Чтобы пояснить основные особенности комбинационного рассеяния, воспользуемся тем обстоятельством, что первоначально может усиливаться лишь стоксово излучение на частоте $\omega_л - \omega_v$. Для возникновения других спектральных компонент требуется либо наличие молекул в возбужденном состоянии (для антистоксова излучения), либо присутствие стоксовой компоненты первого порядка (для генерации стоксовой компоненты второго порядка). Следовательно, мы можем получить условие усиления или генерации на первой стоксовой частоте $\omega_с = \omega_л - \omega_v$, пренебрегая всеми другими компонентами, кроме, разумеется, лазерного поля с частотой $\omega_л$.

---

[1] Уравнения баланса типа (18.3.4), (18.3.5) адекватны предположению о некогерентности лазерной накачки и стоксова излучения. Способ получения таких уравнений из классической системы состоит в усреднении последней по случайным фазам, как это сделано, например, в [35]. Если фазы взаимодействующих полей детерминированы, то балансный подход невозможен. Применительно к рассматриваемой задаче это показано в [36].

Вопрос о влиянии степени когерентности накачки на характер процессов параметрического усиления исследовался как теоретически [37, 38,] так и экспериментально [39]. Установлено, что в случае немонохроматической накачки производная от коэффициента усиления стоксовой волны по интенсивности накачки имеет излом. По-видимому эффект, не очень удачно названный выше параметрической неустойчивостью, имеет ту же природу. Нужно подчеркнуть, однако, что при любой интенсивности накачки интенсивность рассеяния повышается по мере увеличения степени когерентности. Поэтому обсуждающаяся особенность не означает наличия «сверхрассеяния». — *Прим. ред.*

В последующем анализе используется такая модель: рассеивающая среда состоит из N гармонических осцилляторов (на единицу объема), каждый из которых соответствует одной молекуле. Осцилляторы независимы друг от друга, так что ансамбль этих осцилляторов не может поддерживать волновое движение с отличной от нуля групповой скоростью. Каждый осциллятор характеризуется своим положением z (рассматривается одномерный случай, т. е. $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$) и нормальной колебательной координатой $X(z, t)$. Уравнение движения для осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2X(z,t)}{dt^2} + \Gamma\cdot\frac{dX}{dt} + \omega_v^2 X = \frac{F(z,t)}{m}, \qquad (18.4.1)$$

где Γ — постоянная затухания, выбранная так, что наблюдаемая ширина линии спонтанного комбинационного рассеяния равна $\Delta\nu = \Gamma/2\pi$; ω_v — резонансная частота колебаний молекулы в отсутствие затухания; m — масса; $F(z, t)$ — возбуждающая сила.

Возбуждающую силу можно получить, рассматривая электромагнитную энергию в молекулярной среде. Плотность энергии, запасенной в электрическом поле $\mathscr{E} = {}^1/_2\varepsilon E^2$ при использовании равенства

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + N\alpha) = \varepsilon_0\{1 + N[\alpha_0 + (\partial\alpha/\partial X)_0 X]\}, \qquad (18.4.2)$$

может быть записана в виде

$$\mathscr{E} = {}^1/_2\,\varepsilon_0\{1 + N[\alpha_0 + (\partial\alpha/\partial X)_0 X]\}E^2. \qquad (18.4.3)$$

Сила, действующая на единицу объема поляризуемой среды, равна $\partial\varepsilon/\partial X$, откуда делением на N получаем силу, действующую на один осциллятор:

$$F(z, t) = {}^1/_2\,\varepsilon_0(\partial\alpha/\partial X)_0\overline{E^2}(z, t). \qquad (18.4.4)$$

Черта означает усреднение за несколько периодов оптических колебаний, предпринимаемое потому, что молекула неспособна реагировать на эти колебания. Из последнего соотношения видно, что при отличной от нуля дифференциальной поляризуемости $(\partial\alpha/\partial X)_0$ колебания молекул могут возбуждаться электрическим полем.

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы показать, как возбужденные полем колебания молекул в свою очередь воздействуют на электромагнитное поле. В соответствии с (18.4.2) колебания молекул с частотой ω_v вызывают модуляцию диэлектрической проницаемости с той же частотой. Это приводит к фазовой модуляции поля излучения, при которой появляются боковые составляющие, смещенные на ω_v друг от друга. Иначе говоря, модуляция ε на частоте ω_v, вызванная колебаниями молекул, может привести к обмену энергией между электромагнитными полями различных частот,

разделенных интервалами, кратными ω_v, например между полем лазера ($\omega_л$) и стоксовой компонентой излучения ($\omega_с = \omega_л - \omega_v$).

Полное поле является суммой лазерного (ω_2) и стоксова (ω_1) полей:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} E_1(z) e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} E_2(z) e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.}, \qquad (18.4.5)$$

так что

$$\overline{E^2}(z, t) = \frac{1}{4} E_2(z) E_1^*(z) e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \text{к. с.} \qquad (18.4.6)$$

Подстановка (18.4.6) и (18.4.4) и затем в уравнение движения молекулы (18.4.1) дает

$$\frac{1}{2}(\omega_v^2 - \omega + i\omega\Gamma) X(z) e^{i\omega t} = \frac{\varepsilon_0}{8m}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)_0 E_2 E_1^* e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}, \qquad (18.4.7)$$

где

$$X(z, t) = \frac{1}{2} X(z) e^{i\omega t} + \text{к. с.} \qquad (18.4.8)$$

Из (18.4.7) следует, что возбуждаемые на частоте $\omega = \omega_2 - \omega_1$ молекулярные колебания имеют комплексную амплитуду

$$X(z) = \frac{\varepsilon_0 (\partial\alpha/\partial X)_0 E_2(z) E_1^*(z)}{4m[\omega_v^2 - (\omega_2 - \omega_1)^2 + i(\omega_2 - \omega_1)\Gamma]}. \qquad (18.4.9)$$

Поляризация, наведенная в молекулах полем частоты ω_1, имеет вид

$$P = \varepsilon_0 N\alpha(z, t) E(z, t) = \varepsilon_0 N[\alpha_0 + (\partial\alpha/\partial X)_0 X(z, t)] E(z, t). \qquad (18.4.10)$$

Для нас представляет интерес нелинейная компонента поляризации, пропорциональная XE. Используя соотношения (18.4.5), (18.4.9) и (18.4.10), приходим к следующему выражению для нелинейной поляризации:

$$P_{нел}(z, t) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 N\left(\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)_0 \left\{\frac{\varepsilon_0 (\partial\alpha/\partial X) E_2 E_1^* e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}}{4m[\omega_v^2 - (\omega_2 - \omega_1)^2 + i(\omega_2 - \omega_1)\Gamma]} + \text{к. с.}\right\} \times$$
$$\times [E_1(z) e^{i\omega_1 t} + E_2(z) e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.}]. \qquad (18.4.11)$$

Осуществив умножение в формуле (18.4.11), получим составляющие поляризации, осциллирующие с частотами ω_1, ω_2, $2\omega_1 - \omega_2$ и $2\omega_2 - \omega_1$. Рассмотрим вначале составляющую нелинейной поляризации, имеющую частоту ω_1:

$$P_{нел}^{\omega_1}(z, t) = \frac{1}{2} P_{нел}^{\omega_1}(z) e^{i\omega_1 t} + \text{к. с.}, \qquad (18.4.12)$$

где

$$P_{нел}^{\omega_1}(z) = \frac{\varepsilon_0^2 N (\partial\alpha/\partial X)_0^2 |E_2|^2}{8m[\omega_2 - (\omega_2 - \omega_1)^2 + i(\omega_2 - \omega_1)\Gamma]} E_1(z). \qquad (18.4.13)$$

Коэффициент пропорциональности между поляризацией и полем представляет собой восприимчивость. Определив комплексную нелинейную восприимчивость соотношением

$$P^{\omega_1}_{\text{нел}}(z) = \varepsilon_0 \chi_{\text{комб}}(\omega_1) |E_2(z)|^2 E_1(z), \qquad (18.4.14)$$

находим из (18.4.13)

$$\chi_{\text{комб}}(\omega_1) = \frac{\varepsilon_0 N (\partial\alpha/\partial X)_0^2}{8m[\omega_v^2 - (\omega_2 - \omega_1)^2 - i(\omega_2 - \omega_1)\Gamma]}. \qquad (18.4.15)$$

В более общем виде действие наведенных молекулярных колебаний характеризуется с помощью тензора четвертого ранга

$$P_i^{\omega_i = \omega_j - \omega_k + \omega_l} = \chi_{ijkl}^{\omega_i = \omega_j - \omega_k + \omega_l} E_j^{\omega_j} E_k^{\omega_k *} E_l^{\omega_l}. \qquad (18.4.16)$$

Формула (18.4.14) относится к специальному случаю:

$$\omega_j = \omega_k = \omega_2, \quad \omega_i = \omega_l = \omega_1.$$

Возвращаясь к (18.4.15), запишем

$$\chi_{\text{комб}}(\omega_1) = \chi'_{\text{комб}}(\omega_1) - i\chi''_{\text{комб}}(\omega_1), \qquad (18.4.17)$$

где

$$\chi'_{\text{комб}}(\omega_1) \approx \frac{\varepsilon_0 N (\partial\alpha/\partial X)_0^2 [\omega_v - (\omega_2 - \omega_1)]}{16m\omega_v \{[\omega_v - (\omega_2 - \omega_1)]^2 + \Gamma^2/4\}}, \qquad (18.4.18)$$

$$\chi''_{\text{комб}}(\omega_1) \approx \frac{-\varepsilon_0 N (\partial\alpha/\partial X)_0^2 (\Gamma/2)}{16m\omega_v \{[\omega_v - (\omega_2 - \omega_1)]^2 + \Gamma^2/4\}}. \qquad (18.4.19)$$

Эти выражения справедливы в случае $\Gamma \ll \omega_v$, который обычно и реализуется (обычно $\Gamma \lesssim 10^{-2}\ \omega_v$).

Нелинейная комбинационная восприимчивость подобно линейной восприимчивости, о которой шла речь в § 8.1, имеет лоренцеву форму линии. Она показана на рис. 18.6.

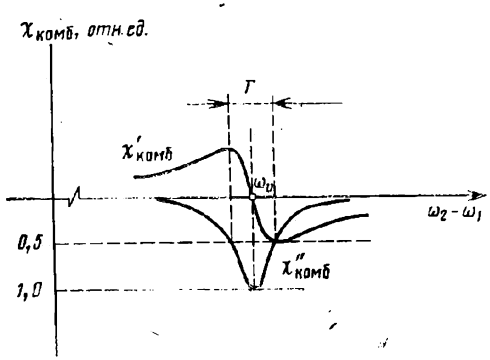


Рис. 18.6. Синфазная ($\chi'_{\text{комб}}$) и квадратурная ($\chi''_{\text{комб}}$) компоненты линейной комбинационной восприимчивости как функции стоксовой частоты ω_1. Частота ω_1 возрастает справа налево

Компонента нелинейной поляризации с частотой ω_1 оказывает влияние на постоянную распространения, которая из k_1 превращается в

$$k_1' = k_1\left[1+\frac{\chi_{\text{комб}}(\omega_1)}{2n_1^2}|E_2|^2\right] = k_1\left\{1+\frac{|E_2|^2}{2n_1^2}[\chi'_{\text{комб}}(\omega_1) - i\chi''_{\text{комб}}(\omega_1)]\right\}, \tag{18.4.20}$$

откуда следует, что

$$E^{\omega_1}(z) = E^{\omega_1}(0)\exp\left[-ik_1 z\left(1+\frac{|E_2|^2\chi'_{\text{комб}}(\omega_1)}{2n_1^2}\right) - k_1 z\frac{|E_2|^2\chi''_{\text{комб}}(\omega_1)}{2n_1^2}\right]. \tag{18.4.21}$$

Показатель усиления

$$g(\omega_1) = -\frac{k_1}{2n_1^2}|E_2|^2\chi''_{\text{комб}}(\omega_1) \tag{18.4.22}$$

положителен, так как $\chi_{\text{комб}}(\omega_1) < 0$. Воспользовавшись выражением (18.4.19) для $g(\omega_1)$, получим

$$g(\omega_1) = \frac{k_1\varepsilon_0(\partial\alpha/\partial X)_0^2 N\Gamma|E_2|^2}{32n_1^2 m\omega_v\{[\omega_v-(\omega_2-\omega_1)]^2+\Gamma^2/4\}}. \tag{18.4.23}$$

Сопоставление формул (18.4.23) и (18.2.5) показывает, что форма линии стоксова рассеяния имеет вид

$$S(\nu_1) = \frac{\Gamma/2\pi}{[\nu_v-(\nu_2-\nu_1)]^2+(\Gamma/4\pi)^2}. \tag{18.4.24}$$

18.5. Антистоксово рассеяние

Анализ, проведенный в § 18.1, показал, что антистоксово излучение на частоте $\omega_3 = \omega_2 + \omega_v$ является результатом комбинационного рассеяния света молекулой, находящейся в возбужденном колебательном состоянии ($v = 1$). При классическом подходе к задаче мы должны найти поляризацию на частоте ω_3, наведенную электрическим полем:

$$E(z,t) = \frac{1}{2}[E_1(z)e^{i\omega_1 t} + E_2(z)e^{i\omega_2 t} + E_3(z)e^{i\omega_3 t} + \text{к. с.}], \tag{18.5.1}$$

где $\omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1$.

Прежде всего найдем член в выражении для поляризации, соответствующий возбуждению молекулярных колебаний силой, пропорциональной произведению $E_3E_2^*$. Этот член аналогичен (18.4.11) и получается подобным образом. Следовательно, выражение для поляризации можно получить, видоизменив формулу (18.4.13) применительно к случаю, когда E_3 соответствует высокой частоте, а

E_2 — более низкой. В результате, заменив E_2 на E_1, E_1 на E_2 и $\omega_2 - \omega_1$ на $\omega_3 - \omega_2$, получим

$$P_{\text{нел}}^{(\omega_3)}(z) = \frac{\varepsilon_0^2 N (\partial\alpha/\partial X)_0^2 |E_2|^2}{8m[\omega_v^2 - (\omega_3 - \omega_2)^2 + i(\omega_3 - \omega_2)\Gamma]} E_3(z). \qquad (18.5.2)$$

Важно обратить внимание на то, что мнимые части выражений (18.5.2) и (18.4.13) имеют *противоположные знаки*. Благодаря этому, противоположными оказываются также знаки $\chi''(\omega_3)$ и $\chi''(\omega_1)$:

$$\chi''_{\text{комб}}(\omega_3) = \frac{\varepsilon_0 N (\partial\alpha/\partial X)_0 (\Gamma/2)}{16m\omega_v \{[\omega_v - (\omega_3 - \omega_2)]^2 + \Gamma^2/4\}}. \qquad (18.5.3)$$

Показатель усиления антистоксовой волны (ω_3) дается формулой

$$g(\omega_3) \doteq -\frac{k_1}{2n_3^2} |E_2|^2 \chi''_{\text{комб}}(\omega_3) < 0, \qquad (18.5.4)$$

из которой видно, что антистоксова волна *затухает*. Мы пришли к выводу, что антистоксова волна, распространяясь в среде, активной в комбинационном отношении, в присутствии излучения частоты ω_2, но в отсутствие стоксова излучения $(\omega_1 = \omega_2 - \omega_v)$ *будет затухать*.

Существует, однако, еще одна компонента поляризации на частоте ω_3, представляемая членом

$$P_{\text{нел}}^{\omega_3}(z) \sim E_2 E_2 E_1^* \exp[i(2\omega_2 - \omega_1)t] \qquad (18.5.5)$$

в выражении (18.4.11). Она не содержит E_3 и может рассматриваться как верхняя боковая частота $[\omega_2 + (\omega_2 - \omega_1)]$ в спектре модулированных колебаний диэлектрической проницаемости с несущей ω_2 и модулирующей $\omega_2 - \omega_1$ частотами. Эта компонента является источником излучения с частотой ω_3.

Если дополнить (18.5.5) пространственной зависимостью поляризации, то окажется, что

$$P_{\text{нел}}^{\omega_3}(z) \sim E_2 E_2 E_1^* \exp[-i(2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}]. \qquad (18.5.6)$$

Этому члену соответствует излучаемое поле частоты ω_3 с пространственной зависимостью $E_3 \exp(-i\mathbf{k}_3\mathbf{r})$, причем[1]

$$\mathbf{k}_3 = 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1. \qquad (18.5.7)$$

Антистоксова волна может излучаться только в направлениях, удовлетворяющих условию (18.5.7), как показано на рис. 18.7. В

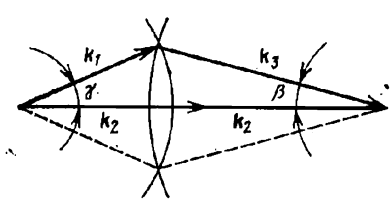


Рис. 18.7. Диаграмма для определения направления распространения антистоксова-излучения

[1] Это можно установить, рассматривая $P_{\text{нел}}^{\omega_3}$ как источник в волновом уравнении (14.9.1).

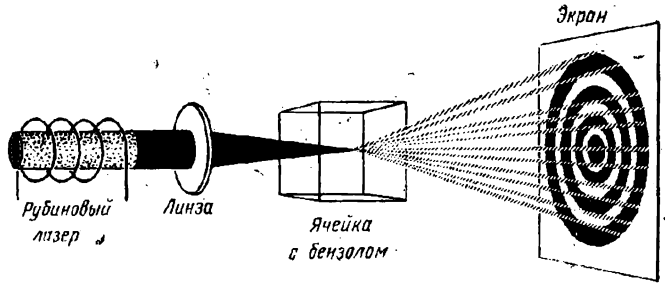


Рис. 18.8. Схема эксперимента по изучению комбинационного рассеяния [19]

изотроной среде величины $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ определяются соответствующими им частотами: $|\mathbf{k}_i| = \omega_i n_i/c$, а их направления — пересечением годографов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_3$. Это и является причиной, по которой антистоксова компонента излучается в направлениях, образующих коническую поверхность с половинным углом β при вершине и осью, совпадающей с направлением распространения лазерного луча [13]. Вычисление угла при вершине конуса составляет предмет задачи 18.5.

Реальная ситуация при ВКР значительно сложнее рассмотренной выше. Например, оказывается, что помимо наличия стоксовых и антистоксовых компонент высоких порядков, о которых упоминалось ранее, имеет место отклонение направления излучения антистоксовой компоненты от предсказанного формулой (18.5.7), обусловленное самофокусировкой. С некоторыми из этих эффектов читатель сможет познакомиться по работам [14—18]. Схему эксперимента по наблюдению стоксова и антистоксова излучения поясняет рис. 18.8.

18.6. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ)

Рассеяние света на тепловых акустических волнах было рассмотрено Бриллюэном еще в 1922 г. [19][1]. Явление вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна, когда акустическая волна, рассеивающая свет, сама возбуждается этим светом, было открыто в 1964 г. [21]. Было обнаружено, что при пропускании через кристалл (сапфира или кварца в первом эксперименте) мощного лазерного излучения частоты ω_2 в кристалле возбуждалась акустическая волна с частотой ω_s и одновременно генерировалось оптическое излучение частоты $\omega_2 - \omega_s$. И акустический и рассеянный оптический лучи испускались в строго определенных направлениях и

[1] Одновременно с Бриллюэном и независимо от него рассеяние света в твердых телах теоретически исследовал Л. И. Мандельштам [39]. — *Прим. ред.*

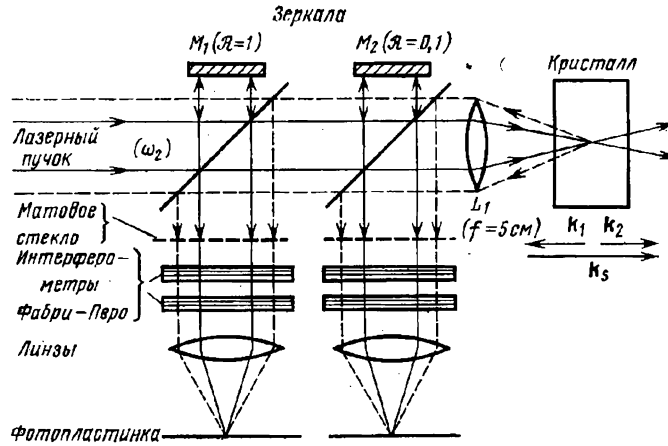


Рис. 18.9. Схема экспериментальной установки для наблюдения вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна.

Присутствие рассеянного луча частоты ω_s—ω_s обнаруживается с помощью интерферометра Фабри—Перо, поскольку оно вызывает появление дополнительных колец в фокальной плоскости [2]

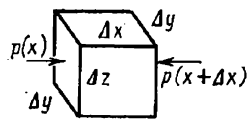


Рис. 18.10. Элементарный объем единичного сечения ($\Delta z \Delta y = 1$) и длины Δx, фигурирующий при выводе уравнения движения звуковой волны, возбуждаемой электрострикцией

возникали только при условии, что мощность лазера превышала определенное пороговое значение.

Схема первого эксперимента по наблюдению ВРМБ приведена на рис. 18.9.

Переменное электрическое поле вызывает в результате электрострикции переменную деформацию в жидкости или кристалле, возбуждая таким образом акустические волны. С другой стороны, акустическая волна модулирует диэлектрическую проницаемость среды, что может привести к обмену энергией между электромагнитными волнами, частоты которых отличаются на величину, равную частоте акустической волны. Это явление аналогично вынужденному комбинационному рассеянию, только роль молекулярных колебаний играет акустическая волна.

Для вывода уравнения распространения звуковой волны рассмотрим элементарный объем $dxdydz$ внутри жидкости, на который действует электрическое поле (рис. 18.10). Пусть смещение точки от равновесного положения равняется $u(x, t)$, так что одномерная деформация равна $\partial u/\partial x$. Введем феноменологическую постоянную γ, характеризующую изменение диэлектрической проницаемости под влиянием деформации:

$$\delta\varepsilon = -\gamma\,(\partial u/\partial x). \qquad (18.6.1)$$

При наличии деформации плотность запасенной электрической энергии изменяется на величину $-{}^1/_2\gamma(\partial u/\partial x)E^2$. Изменение запасенной энергии, связанное с деформацией среды, означает существование давления. Это давление p можно найти, приравняв изменение плотности запасенной энергии $-{}^1/_2\gamma(\partial u/\partial x)E^2$ работе $p\,(\partial u/\partial x)$, совершаемой в результате деформации единичного объема (здесь мы положили $\Delta x\Delta y\Delta z = 1$). В результате получаем

$$p = -{}^1/_2\gamma E^2. \tag{18.6.2}$$

Полная электрострикционная сила, действующая на единичный объем в направлении оси x, равняется

$$F = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x}E^2,$$

а уравнение движения для $u\,(x,\ t)$ записывается в виде

$$-\eta\frac{\partial u}{\partial t} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x}E^2 = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ , \tag{18.6.3}$$

где η — постоянная затухания, феноменологически учитывающая акустические потери; T и ρ — соответственно упругая постоянная (объемный модуль) и плотность среды[1].

Предположим, что акустическое и оба электрических поля представляют собой плоские волны, бегущие в произвольных направлениях, и запишем их в форме

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{r},\ t) &= {}^1/_2E_1(\mathbf{r}_1)\exp[i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})] + \text{к. с.},\\ E_2(\mathbf{r},\ t) &= {}^1/_2E_2(r_2)\exp[i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})] + \text{к. с.},\\ u(\mathbf{r},\ t) &= {}^1/_2u_s(r_s)\exp[i(\omega_s t - \mathbf{k}_s\mathbf{r})] + \text{к. с.}, \end{aligned} \tag{18.6.4}$$

где r_1, r_2, r_s — расстояния с учетом знака вдоль направлений распространения $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_s$, так что $r_i = (\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_i)/k_i$.

Дифференцируя последнее из равенств (18.6.4) в предположении

$$(d^2u_s/dr_s^2) \ll (k_s\,du_s/dr_s),\quad k_s^2\,u_s,$$

получаем соотношение

$$\frac{d^2u_s}{dr_s^2} = -\frac{1}{2}\left(k_s^2\,u_s + 2ik_s\frac{du_s}{dr_s} - \frac{d^2u_s}{dr_s^2}\right)e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s\mathbf{r})} + \text{к.с.}$$

позволяющее записать уравнение (18.6.3), заменив в нем x на r_s, в виде

$$\begin{aligned} &\left[(-i\eta\omega_s + \rho\omega_s^2)u_s - T\left(k_s^2\,u_s + 2ik_s\frac{du_s}{dr_s}\right)\right]\times\\ &\qquad\times\exp[i(\omega_s t - \mathbf{k}_s\mathbf{r}_s)] + \text{к. с.} =\\ &= -\frac{\gamma}{4}\frac{\partial}{\partial r_s}\left\{E_2(r_2)\,E_1^*(r_1)\exp\{i[(\omega_2-\omega_1)t - (\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}]\} + \text{к. с.}\right\}. \end{aligned} \tag{18.6.5}$$

[1] $T = (1/\rho)\,(d\rho/dp)$, где p — давление.

Из (18.6.5) следует, что

$$\omega_s = \omega_2 - \omega_1, \quad \mathbf{k}_s = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 \tag{18.6.6}$$

и правая часть (18.6.5) может быть преобразована к виду

$$-\frac{\gamma}{4}\left[\frac{d}{dr_s}(E_2 E_1^*) - ik_s E_2 E_1^*\right]\exp[i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})] + \text{к. с.},$$

а волновое уравнение (18.6.5) в целом принимает вид

$$2ik_s v_s^2 \frac{\partial u_s(r_s)}{\partial r_s} + \left(k_s^2 v_s^2 - \omega_s^2 + \frac{i\eta\omega_s}{\rho}\right) u_s(r_s) = \\ = -\frac{i\gamma k_s}{4\rho} E_2(r_2) E_1^*(r_1). \tag{18.6.7}$$

Последнее уравнение справедливо при условии, что

$$|(\partial/\partial r_s)(E_2 E_1^*)| \ll |k_s E_2 E_1^*|.$$

При его выводе мы использовали соотношение $T/\rho = v_s^2$, где v_s — скорость распространения акустических волн.

Уравнение для электромагнитных волн. Начнем с волнового уравнения

$$\nabla^2 E_i(\mathbf{r}, t) = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t^2} E_i(\mathbf{r}, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t^2}(P_{\text{нел}})_i, \tag{18.6.8}$$

где $(P_{\text{нел}})_i$ — компонента нелинейной поляризации, возбуждающая поле $E_i(\mathbf{r}, t)$. Используя первое из равенств (18.6.4), получаем

$$\nabla^2 E_1(\mathbf{r}, t) = -1/2 \quad [k_1^2 E_1(r_1) + 2ik_1 \nabla E_1(r_1) - \\ - \nabla^2 E_1(r_1)]\, e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + \text{к. с.} \tag{18.6.9}$$

Положив $i = 1$, подставим в (18.6.8) последнее выражение, пренебрежем членом $\nabla^2 E_1(r_1)$ и, вспомнив, что $\mathbf{k}_1 \nabla E_1(r_1) = k_1 (dE_1/dr_1)$, придем к уравнению

$$\left[k_1 \frac{dE_1(r_1)}{dr_1}\right]\exp[i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})] + \text{к. с.} = i\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{\text{нел}})_i. \tag{18.6.10}$$

Нелинейная поляризация, входящая в (18.6.10), это дополнительная поляризация, вызванная акустической волной, и, следовательно, $(P_{\text{нел}})_i = (\delta\varepsilon)E$, или с учетом (18.6.1)

$$(P_{\text{нел}})_i = -\gamma E(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r_s}. \tag{18.6.11}$$

Согласно (18.6.4) произведение $E\,(\partial u/\partial r_s)$ содержит члены, колеблющиеся с частотами $(\pm\omega_s \pm \omega_1)$ и $(\pm\omega_s \pm \omega_2)$. Однако лишь те из них, для которых $\pm(\omega_2 - \omega_s) = \pm\omega_1$, действуют как синхронные источники, так что уравнение (18.6.10) может быть записано в виде

$$k_1 \frac{dE_1}{dr_1}\exp[i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})] = \frac{i\mu}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[-\gamma E_2 \exp[i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})] \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial r_s}\{u_s^* \exp[-i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})]\}\right],$$

или с учетом (18.6.6)

$$k_1 \frac{dE_1}{dr_1} = \frac{i\omega_1^2 \gamma\mu}{4} E_2 \left(ik_s u_s^* + \frac{du_s^*}{dr_s} \right).$$

При $|du_s/dr_s| \ll |k_s u_s|$ волновое уравнение принимает вид

$$\frac{dE_1}{dr_1} = -\frac{\omega_1^2 \gamma\mu k_s}{4k_1} E_2 u_s^* - \frac{\alpha E_1}{2}, \qquad (18.6.12)$$

причем диссипативный член $-(\alpha E_1/2)$ добавлен для учета потерь в среде на частоте ω_1, которыми мы до настоящего момента пренебрегали[1]).

Совершенно аналогично выводится уравнение

$$\frac{dE_2}{dr_2} = -\frac{\omega_2^2 \gamma\mu k_s}{4k_2} E_1 u_s - \frac{\alpha E_2}{2} \qquad (18.6.13)$$

для волны с частотой $\omega_2 = \omega_1 + \omega_s$.

Соотношения (18.6.7), (18.6.12) и (18.6.13) образуют замкнутую систему уравнений относительно амплитуд акустического $u_s(r_s)$ и электромагнитных $E_1(r_1)$, $E_2(r_2)$ полей. Решению этих уравнений при некоторых определенных условиях посвящен следующий раздел.

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна. Рассмотрим вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна, описанное во введении к данной главе. В этом случае достаточно интенсивное электромагнитное поле с частотой ω_2 вызывает одновременную генерацию электромагнитной волны с частотой ω_1 и акустической волны с частотой $\omega_s = \omega_2 - \omega_1$. Анализ упрощается в предельном случае, когда величина мощности, отбираемой от поля накачки на частоте ω_2 в результате генерации на частотах ω_1 и ω_s, много меньше входной мощности. При этих условиях можно положить $E_2(r_2) = \text{const}$ и ограничиться решением уравнений (18.6.7) и (18.6.12). В первом из них положим $\omega_s = k_s v_s$, т. е. примем для акустической волны тот же закон дисперсии, что и в случае свободного распространения в среде без потерь. При этих предположениях

$$\frac{du_s}{dr_s} = -\frac{\eta}{2\rho v_s} u_s - \frac{\gamma}{8\rho v_s^2} E_2 E_1^*. \qquad (18.6.14)$$

Уравнение (18.6.12) для поля с частотой ω_1 перепишется в виде

$$\frac{dE_1^*}{dr_1} = -\frac{\alpha E_1^*}{2} - \frac{\gamma k_1 k_s}{4\varepsilon_1} E_2^* u_s. \qquad (18.6.15)$$

Следует напомнить, что переменные r_1 и r_s суть расстояния, измеренные вдоль произвольных направлений распространения $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_s$ оптической и акустической волн соответственно. Трудность, обусловленная наличием двух переменных (r_1 и r_s) в связанных уравнениях (18.6.14) и (18.6.15), может быть устранена путем перехода к коор-

[1]) Если бы мы учли при выводе конечную проводимость σ среды, то диссипативный член равнялся бы $\alpha = \sigma\sqrt{\mu_0/\varepsilon}$.

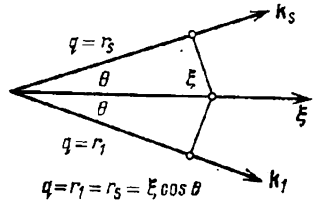


Рис. 18.11. Однозначное соответствие между расстоянием r_s, измеренным по нормали к фронту акустической волны, и r_1, измеренным по нормали к фронту световой волны

динате ξ, измеренной вдоль биссектрисы, угла, как показано на рис. 18.11. Используя соотношение $r_s = r_1 = \xi \cos\theta = q$, можем перейти от (18.6.14) и (18.6.15) к

$$\frac{du_s}{dq} = -\frac{\eta}{2\rho v_s} u_s - \frac{\gamma}{8\rho v_s^2} E_2 E_1^*,$$
$$\frac{dE_1^*}{dq} = -\frac{\alpha E_1^*}{2} - \frac{\gamma k_1 k_s}{4\varepsilon_1} E_2^* u_s. \qquad (18.6.16)$$

Эти уравнения описывают нарастание (или затухание) акустического смещения u_s и электрического поля E_1 вдоль любого из двух направлений распространения, которому сопоставляется координата q.

Предположим нарастание экспоненциальным

$$u_s(q) = u_s^0 e^{gq},\ E_1^*(q) = (E_1^0)^* e^{gq} \qquad (18.6.17)$$

и решим характеристическое уравнение, получающееся при подстановке (18.6.17) в (18.6.16). Решение имеет вид

$$g = -\frac{1}{4}(\alpha_s + \alpha) + \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha_s+\alpha)^2 - 4\left(\alpha_s\alpha - \frac{k_1 k_s \gamma^2 |E_2|^2}{8\rho\varepsilon_1 v_s^2}\right)}, \qquad (18.6.18)$$

где $\alpha_s = -\eta/\rho v_s$ — акустическая постоянная затухания. Показатель усиления g растет при увеличении акустической частоты $\omega_s = k_s v_s$. Волновой вектор $\mathbf{k}_s$ определяется из соотношения (18.6.6). Поскольку $\omega_s \ll \omega_2$, то $\omega_2 \approx \omega_1$ и для изотропной среды $k_2 \approx k_1$. Векторное соотношение (18.6.6) оказывается таким же, как в случае брэгговского рассеяния, показанного на рис. 18.12. Из него следует, что

$$k_s = 2k_2 \sin\theta. \qquad (18.6.19)$$

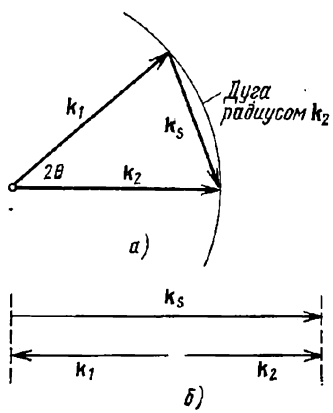


Рис. 18.12. Векторное соотношение $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_s$ при ВРМБ в изотропной среде ($k_2 \approx k_1$):

а — для произвольного угла θ; *б* — в случае обратного рассеяния ($\theta \approx \pi/2$)

Усиление оказывается максимальным в случае обратного рассеяния ($\theta = \pi/2$), когда $k_s = 2k_2$ и обратная акустическая волна имеет частоту

$$(\omega_s)_{\max} = 2\omega_2 v_s n_2/c. \qquad (18.6.20)$$

Когда величина g положительна, тепловые акустические волны, распространяющиеся вдоль $\mathbf{k}_s$, и световые волны, распространяющиеся вдоль $\mathbf{k}_1$ и имеющие частоту ω_1, будут одновременно усиливаться по закону (18.6.17). Это вызовет значительное нарастание соотвествующих мощностей вдоль рассматриваемых двух направлений. В соответствии с (18.6.18) условие $g \geqslant 0$ для ВРМБ выполняется при

$$|E_2|^2 \geqslant \frac{8T\varepsilon_1 \alpha_s \alpha}{\gamma^2 k_1 k_s}, \qquad (18.6.21)$$

где использовано соотношение $v_s^2 = T/\rho$.

Если выразить акустическую и оптическую постоянные затухания через характерные длины затухания $L_s = 2/\alpha_s$ и $L_1 = 2/\alpha$ (т. е. расстояния, на которых амплитуды полей в обычных условиях спадают в e раз), то выражение для пороговой накачки примет вид

$$I_2 > \frac{16cT\varepsilon_0^2 n_1^2 n_2}{\gamma^2 k_1 k_s L_1 L_s}. \qquad (18.6.22)$$

Пример. *ВРМБ.* Для оценки по порядку величины пороговой мощности ВРМБ зададимся следующими численными значениями, характерными для кварца: $T = 5 \cdot 10^{10}$ Н/м^2 — типичное значение модуля упругости твердых тел, $\gamma \approx \varepsilon_0 \sim 10^{-11}$ Ф/м — типичное значение коэффициента электрострикции [напомним, что $\gamma = \rho\,(d\varepsilon/dp)$], $\lambda_2 \approx \lambda_1 = 1$ мкм, $L_1 = 1$ м, $k_1 L_1 = (2\pi L_1/\lambda_1) = 2\pi \cdot 10^6$, $\omega_s \approx 2\omega_2 (v_s n/c) \approx 12\pi \cdot 10^9$ с$^{-1}$ при $v_s = 3 \cdot 10^3$ м/с и $\lambda_2 \approx 1$ мкм, $L_s = 10^{-3}$ м — типичное значение для кварца и сапфира [21—23].

Подставляя указанные значения в (18.6.22), получаем для пороговой плотности мощности значение $I_{\text{пор}} = 10^{11}$ Вт/см^2. Такой уровень мощности обеспечивают лазеры, работающие в режиме генерации гигантских импульсов. В большинстве жидкостей явление самофокусировки, рассматриваемое в § 18.7, обеспечивает плотность мощности, превышающую порог ВРМБ даже при умеренных входных мощностях. Этим объясняется тот факт, что для многих сред экспериментально найденные пороги самофокусировки совпадают с порогами ВРМБ [14].

Особенно интересен случай $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 < 0$. Он имеет место, когда угол 2θ между падающим (ω_2) и рассеянным (ω_1) световыми лучами превышает $\pi/2$. Этот случай с физической точки зрения интересен тем, что скорость нарастания рассеянной волны (ω_1) зависит от значений E_1 в точках, расположенных вдоль направления распространения $\mathbf{k}_1$ перед рассматриваемым волновым фронтом. Такая связь обеспечивается акустической волной в силу

ложного направления распространения. Аналогичным образом рассеянная световая волна частоты ω_1 обеспечивает обратную связь для акустической волны. Для строгого анализа этой ситуации необходимо задать граничные условия подобно тому, как это делалось в § 17.8 [24].

Другой подход к проблеме рассеяния света и звука основан на предположении о том, что взаимодействуют не бегущие волны, а резонансные типы колебаний, т. е. область взаимодействия находится внутри оптического и акустического резонаторов [25].

18.7. Самофокусировка света

Как уже говорилось выше, ВКР в среде наступает в том случае, когда превзойдена некоторая пороговая интенсивность электрического поля. Однако измеренная пороговая интенсивность часто оказывается ниже ожидаемой. Расхождения между теорией и экспериментом могут быть весьма значительными: в некоторых жидкостях соответствующие пороги отличаются в сотни и более раз, что обусловлено явлением самофокусировки [14—17].

Установлено, что при превышении мощностью светового пучка некоторого критического значения диаметр пучка по мере распространения в среде уменьшается и на некотором расстоянии пучок собирается в «фокусе». Вблизи фокальной точки плотность мощности оказывается выше той, которая требуется для вынужденного рассеяния, и в этом случае регистрируется не порог ВКР, а порог самофокусировки.

Явление самофокусировки обусловлено зависимостью диэлектрической проницаемости среды от напряженности электрического поля. Эту зависимость можно представить в виде

$$\varepsilon_{\text{общ}} = \varepsilon + \varepsilon_2 \langle \mathbf{EE} \rangle, \qquad (18.7.1)$$

где $\langle \mathbf{EE} \rangle$ — усредненный по времени квадрат напряженности поля световой волны (равный половине квадрата амплитуды). Такая диэлектрическая проницаемость соответствует выражению

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_2 \langle \mathbf{EE} \rangle \mathbf{E},$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$, $\varepsilon_2 = \chi_2$.

Известно несколько механизмов, приводящих к возникновению нелинейной поляризации $\varepsilon_0 \chi_2 \langle \mathbf{EE} \rangle \mathbf{E}$. Один из них связан с электронной поляризуемостью атомов и молекул. Квантовомеханический расчет в первом порядке теории возмущений дает линейную поляризуемость [26], а в третьем порядке можно найти выражения для χ_2 [27]. Величину ε_2 можно грубо оценить, не прибегая к указанной процедуре и исходя из следующих соображений: возмущение электронного облака атома становится «сильным», когда средняя по времени электростатическая энергия приложенного поля $^1/_2 \varepsilon_0 \varepsilon \langle \mathbf{EE} \rangle V$ (V — объем атома) сравнивается с собственной энергией атома $\hbar\omega_0$ (в качестве $\hbar\omega_0$ можно взять энергию первого

возбужденного состояния; для прозрачных материалов ω_0 обычно лежит в ультрафиолетовой области). При сильном искажении электронного облака нелинейная поляризация может сравняться с линейной:

$$\frac{\chi_2 \langle \mathbf{EE} \rangle \mathbf{E}}{\chi \mathbf{E}} \approx \frac{1/2\, \varepsilon_0 e \langle \mathbf{EE} \rangle V}{\hbar \omega_0},$$

откуда получаем

$$\varepsilon_2 = \chi_2 \approx \frac{\varepsilon_0 n^2 (n^2 - 1)}{2\hbar \omega_0 N}. \qquad (18.7.2)$$

Здесь $n^2 = \varepsilon$ и $N \approx (1/V)$ — плотность атомов. Для стекла $n \approx 1{,}52$, $\lambda \approx 280$ нм, $N \approx 2{,}7 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$, что дает $\varepsilon_2 \approx 7 \cdot 10^{-22}$.

В жидкости, состоящей из анизотропных молекул, доминирующий вклад в ε_2 часто вносит ориентационный эффект Керра. Рассмотрим для простоты молекулу, обладающую вращательной симметрией относительно некоторой оси; положим, что $\alpha_\parallel$ — поляризуемость молекулы вдоль этой оси, а $\alpha_\perp$ — поляризуемость в перпендикулярном направлении. Если ось составляет угол θ с приложенным полем, то изменение потенциальной энергии молекулы за счет наведенного дипольного момента будет

$$U(\theta) = -1/2\, \mathbf{pE} = -1/2\, (\alpha_\parallel |\mathbf{E}| \cos\theta \mathbf{e}_\parallel + \alpha_\perp |\mathbf{E}| \sin\theta \mathbf{e}_\perp)(|\mathbf{E}| \cos\theta \mathbf{e}_\parallel + |\mathbf{E}| \sin\theta \mathbf{e}_\perp) = -1/2\, \mathbf{EE} (\alpha_\parallel \cos^2\theta + \alpha_\perp \sin^2\theta).$$

Здесь $\mathbf{e}_\parallel$ и $\mathbf{e}_\perp$ — единичные векторы, направленные вдоль и поперек оси молекулы соответственно. Для $\alpha_\parallel > \alpha_\perp$ взаимодействие с приложенным полем ведет к выстраиванию молекул вдоль него ($\theta \to 0$), что соответствует минимуму энергии $U(\theta)$. В условиях теплового равновесия распределение молекул по углам описывается функцией

$$f(\theta) = \frac{\exp[-U(\theta)/kT]}{\int_0^\pi \exp[-U(\theta)/kT]\, 2\pi \sin\theta d\theta} \approx \frac{1}{4\pi}\left[1 + \frac{\langle \mathbf{EE} \rangle}{2kT}\left(\frac{\alpha_\parallel - \alpha_\perp}{3}\right) \times (3\cos^2\theta - 1)\right].$$

Будем считать $\alpha \langle \mathbf{EE} \rangle / kT \ll 1$. Среднее по времени $\langle \mathbf{EE} \rangle$ взято здесь потому, что молекула не успевает переориентироваться за период оптических колебаний. С помощью приведенной выше функции распределения находим, что поляризация направлена вдоль приложенного поля и имеет величину

$$|P| = N \int_0^\pi (|\mathbf{E}| \alpha_\parallel \cos^2\theta + |\mathbf{E}| \alpha_\perp \sin^2\theta) f(\theta) 2\pi \sin\theta d\theta = |\mathbf{E}| \left(\frac{2\alpha_\perp + \alpha_\parallel}{3}\right) N + |\mathbf{E}| \langle \mathbf{EE} \rangle \frac{2N(\alpha_\parallel - \alpha_\perp)^2}{45kT},$$

откуда

$$\varepsilon = 1 + \frac{2\alpha_\perp + \alpha_\parallel}{3\varepsilon_0} N,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2N(\alpha_\parallel - \alpha_\perp)^2}{45\varepsilon_0 kT} = \frac{2}{5}\frac{(n^2-1)^2}{kTN}\left(\frac{\alpha_\parallel - \alpha_\perp}{\alpha_\parallel + 2\alpha_\perp}\right)^2.$$

Сравнение с выражением (18.7.2) показывает, что ориентационная нелинейность может быть много больше электронной (при комнатной температуре $\hbar\omega_0/kT \approx 170$ для $\lambda \approx 280$ нм).

Физически нелинейность типа (18.7.1) можно трактовать как зависимость показателя преломления от интенсивности

$$n_{\text{полн}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{полн}}} \approx n + n_2 \langle \mathbf{EE} \rangle$$

где $n_2 = {}^1/_2 (\varepsilon_2/n)$. Такого рода зависимость вызывает самофокусировку пучка вследствие того, что для центральной (интенсивной) части пучка среда имеет больший показатель преломления, чем для остальной части, поэтому оптический путь для центральной части пучка увеличивается, иными словами, в нелинейном материале сам пучок формирует положительную линзу. В дальнейшем анализе явления самофокусировки будем считать, что ε и ε_2 известны ($\varepsilon = n^2$). Запишем уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}[(\varepsilon + \varepsilon_2 \langle \mathbf{EE} \rangle)\mathbf{E}], \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Взяв ротор от обеих частей второго из уравнений и подставив rot **H**, получим волновое уравнение[1]

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{2nn_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\langle \mathbf{EE} \rangle \mathbf{E}) = 0. \qquad (18.7.3)$$

Рассмотрим распространение вдоль оси z светового пучка, поляризованного по оси x,

$$\mathbf{E} = {}^1/_2 \{E(\mathbf{r}) \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.}\}\mathbf{e}_x,$$

как обычно, $k = n\omega/c$. Полагаем изменение поля $E(r)$ вдоль z медленным по сравнению с $\exp(-ikz)$, благодаря чему

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E e^{-ikz}) \approx e^{-ikz}\left(-k^2 E - 2ik\frac{\partial E}{\partial z}\right).$$

После подстановки этого выражения в (18.7.3) с учетом равенства, $\langle \mathbf{EE} \rangle = |\mathbf{E}|^2/2$ получим

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{E} - 2ik\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \frac{n_2 k^2}{n}|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} = 0. \qquad (18.7.4)$$

Здесь использовано обозначение $\nabla_\perp^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

[1] Здесь, как и в (6.5.3), мы пренебрегли членом, содержащим $\Delta \mathbf{E}$.

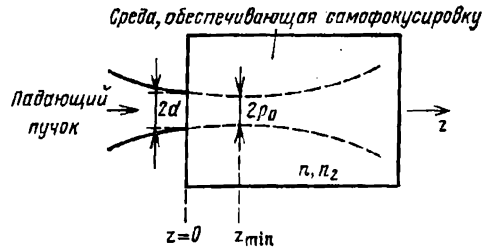


Рис. 18.13. Гауссов пучок, входящий в образец с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = n^2 + nn_2|E|^2$.
Штриховая кривая дает форму пучка в отсутствие самофокусировки ($n_2 = 0$)

В отсутствие нелинейности ($n_2 = 0$) уравнение (18.7.4) точно описывает распространение пучка в линейной прозрачной среде. Решение для пучка, данное в § 6.9, состоит из полного набора мод Эрмита—Гаусса. Профиль гауссовой моды наинизшего порядка дается формулой (6.6.14). Рассмотрим самофокусировку гауссова пучка в условиях, которые соответствуют рис. 18.13.

Обратимся к решению (6.6.7), описывающему гауссов пучок. Приспособим его к ситуации, изображенной на рис. 18.13, заменив z на $z - z_{\min}$:

$$\psi(x, y, z)_{z \leqslant 0} = \exp\left\{-i\left[-i \ln\left(1 + \frac{z - z_{\min}}{q_0}\right) + \frac{kr^2}{2(q_0 + z - z_{\min})}\right]\right\} =$$

$$= \left[\sqrt{1 + \frac{4(z - z_{\min})^2}{k^2 \rho_0^4}}\right]^{-1} \exp\left[i \operatorname{tg}^{-1} \frac{2(z - z_{\min})}{k\rho_0^2} - \frac{r^2}{\rho_0^2}\left(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - i \frac{2(z - z_{\min})}{k\rho_0^2}\right)^{-1}\right], \qquad (18.7.5)$$

где $q_0 = ik\rho_0^2/2$. Пучок на входе ($z = 0$) дается в виде

$$E(x, y, 0) = E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{\rho_0^2}\left(1 + i \frac{2z_{\min}}{k\rho_0^2}\right)^{-1}\right] =$$

$$= E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{\rho_0^2} \frac{1 - i\,(2z_{\min}/k\rho_0^2)}{1 + (2z_{\min}/k\rho_0^2)^2}\right], \qquad (18.7.6)$$

но с учетом (6.6.11)

$$\rho^2(z) = \rho_0^2\left\{1 + \left[\frac{2(z - z_{\min})}{k\rho_0^2}\right]^2\right\}$$

(18.7.6) может быть представлено в виде

$$E(x, y, 0) = E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{d^2}\left(1 - i \frac{2z_{\min}}{k\rho_0^2}\right)\right], \qquad (18.7.7)$$

$$d^2 = \rho^2(0) = \rho_0^2\left[1 + \left(\frac{2z_{\min}}{k\rho_0^2}\right)^2\right]. \qquad (18.7.8)$$

Таким образом, пучок на входе в среду полностью характеризуется радиусом d и расстоянием до шейки $z_{\min}$. Упростим дальнейший анализ, введя параметр фокусировки

$$\theta \equiv 2z_{\min}/k\rho_0^2, \qquad (18.7.9)$$

который позволяет записать (18.7.7) и (18.7.8) в виде

$$E(x, y, 0) = E_0 \exp[-r^2(1 - i\Theta)/d^2], \tag{18.7.10}$$

$$z_{min} = (kd^2/2)[\Theta/(1 + \Theta^2)], \tag{18.7.11}$$

$$\rho_0 = d/\sqrt{1+\Theta^2}. \tag{18.7.12}$$

Заметим, что при $\Theta = 0$ шейка пучка находится в сечении $z = 0$. Если же $\Theta > 0$, то падающий пучок при $z = 0$ сходится, если же $\Theta < 0$, то он расходится.

При наличии нелинейности ($n_2 \neq 0$) общее решение уравнения (18.7.4) может быть найдено лишь численным методом. Мы ограничимся рассмотрением только начальной стадии фокусировки аксиально-симметричного пучка с профилем на входе в нелинейную среду, заданным формулой (18.7.10). Уравнения для интенсивности пучка $|\mathbf{E}|^2$ получим, обратившись (к 18.7.4):

$$\frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial z} = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial z} + \mathbf{E}^*\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{i}{2k}(\mathbf{E}\nabla_\perp^2 \mathbf{E}^* - \mathbf{E}^*\nabla_\perp^2 \mathbf{E}),$$

$$\frac{\partial^3 |\mathbf{E}|^2}{\partial z^2} = \frac{1}{4k^2}\left\{(\nabla_\perp^2 \mathbf{E})(\nabla_\perp^2 \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}\nabla_\perp^2(\nabla_\perp^2 \mathbf{E}^*) + \right. \tag{18.7.13}$$

$$\left. + \frac{n_2 k^2}{n} E[|\mathbf{E}|^2 \nabla_\perp^2 \mathbf{E}^* - \nabla_\perp^2(|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}^*)] + \text{к.с.}\right\}.$$

Представление о поведении пучка в нелинейной среде можно составить, найдя разложение интенсивности пучка на оси, $|E(0, 0, z)|^2$, в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$. Воспользовавшись соотношением (18.7.10) для вычисления производных по поперечным координатам и ограничив ряд первыми тремя членами, получим

$$|E(x = y = 0)|^2 \approx E_0^2\left[1 + 4\Theta\frac{z}{kd^2} + \frac{z^2}{k^2 d^4}\left(-4 + 12\Theta^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2n_2 k^2 d^2}{n} E_0^2\right) + \ldots\right].$$

Величина, обратная этой, грубо аппроксимирует площадь поперечного сечения пучка. Прибегнув к разложению $(1 + x)^{-1} \approx \approx 1 - x + x^2 + \ldots$, в котором также удерживаем лишь три первых члена, находим площадь пучка

$$a(z) \approx \frac{1}{|E(x = y = 0)|^2} \approx a(0)\left[1 - 4\Theta\frac{z}{kd^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{z^2}{k^2 d^4}\left(4 + 4\Theta^2 - \frac{2n_2 k^2 d^2}{n} E_0^2\right) + \ldots\right]. \tag{18.7.14}$$

Считая, что фокусировка пучка означает обращение в нуль площади его поперечного сечения, можем определить величину нелинейности $n_2 (E_0)^2_{кр}$, необходимую для проявления эффекта самофоку-

сировки. Для этого выражение в квадратных скобках приравняем нулю и найдем расстояние от входной плоскости до фокальной точки

$$z_{сф} = \frac{kd^2}{2}\left[\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{кр}} - 1} + \Theta\right]^{-1}. \qquad (18.7.15)$$

Здесь $\mathcal{P} = \pi\varepsilon_0 cnd^2E_0^2/4$ — полная мощность пучка;

$$\mathcal{P}_{кр} = \pi\varepsilon_0 c^3/2n_2\omega^2. \qquad (18.7.16)$$

Как следует из (18.7.15), для сходящегося (на входе в нелинейную среду) пучка ($\Theta > 0$) фокусировка будет иметь место при любом превышении $\mathcal{P}_{кр}$. Критическая мощность не зависит от расходимости пучка и его диаметра.

При падении расходящегося пучка ($\Theta < 0$) критическая мощность самофокусировки равна

$$\mathcal{P}_{кр}(\Theta < 0) = \mathcal{P}_{кр}(1 + \Theta^2). \qquad (18.7.17)$$

Полученные приближенные результаты согласуются (с точностью до коэффициента, равного 4) с результатами численного решения уравнений (18.7.4) и (18.7.10).

Пример.

Самофокусировка в сероуглероде CS_2. Используя следующие значения: $(n_2)_{СИ} = 1{,}1\cdot10^{-9}$ $(n_2)_{CGS}$, $(n_2)_{CGS} \approx 10^{-11}$ [27, 28], $\lambda = 10^{-6}$ м ($\omega \approx 1{,}9\cdot10^{15}$ с$^{-1}$), по формуле (18.7.16) вычисляем $\mathcal{P}_{кр} \approx 10^4$ Вт.

Таким образом, самофокусировка происходит при умеренных уровнях мощности пучка, что соответствует эксперименту. Экспериментальное доказательство существования самофокусировки в дополнение к косвенному доказательству — аномально низкому порогу ВКР — было получено прямым способом. В одном из экспериментов Бломбергена и Лаллеманда [28] пучок от лазера сначала проходил через ячейку с бромбензолом, а затем с нитробензолом. Пороговая длина (для ВКР) ячейки с нитробензолом как функция длины ячейки с бромбензолом определялась при постоянной мощности лазера. Результаты, привиденные на рис. 18.14, показывают, что вследствие частичной фокусировки

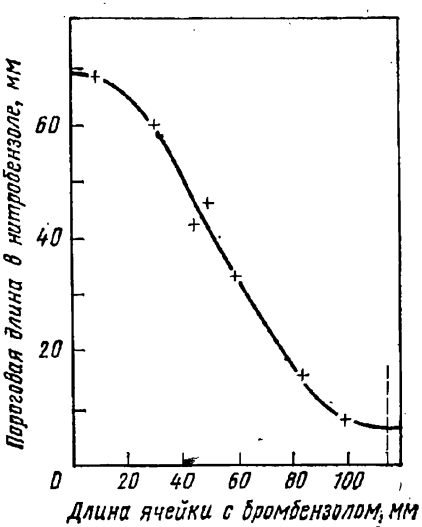


Рис. 18.14. Пороговая длина для вынужденного стоксова излучения в ячейке с нитробензолом как функция длины ячейки с бромбензолом, расположенной непосредственно перед первой.

Вертикальная штриховая прямая отмечает порог вынужденного стоксова излучения в бромбензоле [33]

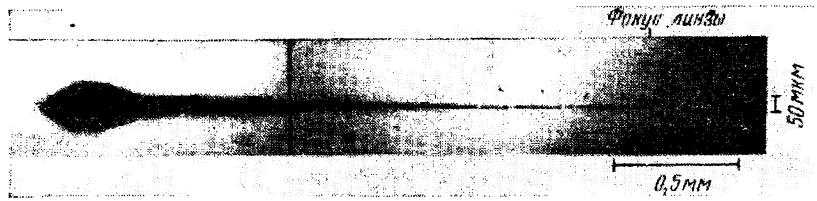


Рис. 18.15. Разрушение сапфира вследствие самофокусировки излучения рубинового лазера [34]

в первой ячейке, которая действует как собирающая линза, пучок сжимается и ВКР в расположенной следом ячейке с нитробензолом наблюдается при меньшей длине последней.

В случае самофокусировки лазерного излучения в твердом теле чрезмерное нарастание плотности мощности в фокальной области может вызвать разрушение материала [29], как это показано на рис. 18.15. Это явление имеет непосредственное отношение к импульсным лазерам с очень высокой мощностью излучения, поскольку разрушению может подвергаться и активный элемент лазера.

Наблюдалась самофокусировка и самозахват непрерывного излучения лазера на красителе, настроенного на D_2-линию натрия ($^2S_{1/2} - {}^3P_{3/2}$) 589 нм, в парах натрия [30].

Показатель преломления зависел от интенсивности благодаря частичному насыщению резонансного перехода. При $\nu > \nu_0$ (ν_0 — частота резонансного перехода) показатель преломления на оси гауссова пучка больше, чем на периферии, в результате чего происходит его фокусировка. Наблюдаемая при этом низкая критическая мощность является следствием сильной нелинейной части показателя преломления n_2, который обратно пропорционален произведению двух очень малых величин: мощности насыщения и доплеровской ширины линии. Для $\nu < \nu_0$ знак n_2 меняется на противоположный и в ячейке происходит дефокусировка лазерного пучка.

Для более детального ознакомления с данной проблемой читатель может обратиться к статье [18].

Задачи

18.1. Обоснуйте соотношение $\Gamma = 2\pi\Delta\nu$, где Γ — постоянная затухания (18.4.1), $\Delta\nu$ — ширина линии спонтанного комбинационного рассеяния.

18.2. (а) Полагаем, что молекулярная жидкость полностью прозрачна в некоторой спектральной области. Покажите, что при мощном лазерном облучении этой жидкости ее пропускание перестает быть однородным по спектру. В частности, покажите, что среда может поглощать излучение частоты $\omega_1 = \omega_л + \omega_v$ и иметь отрицательное поглощение на частоте $\omega_2 = \omega_л - \omega_v$.

Указание: используйте результаты § 18.1 вместе с диаграммами рис. 18.1.

(б) Обсудите, как можно использовать комбинацию источника белого света с лазерным лучом для определения колебательных уровней [W. J. Jones, B. P. Stoicheff, Phys. Rev. Letters, **13**, 657 (1964)].

(в) Получите выражение для коэффициента поглощения на частоте $\omega = \omega_л + \omega_v$ в присутствии лазерного излучения, считая известными интенсивность лазера и дифференциальное сечение

18.3. Покажите, что в изотропной среде с нормальной дисперсией условие $2\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3$ не может быть выполнено при распространении волн в одном направлении.

18.4. (а) Покажите, что частота, на которой имеет место максимум ВКР, равна $\omega_1 = \omega_2 - \omega_v + (\Gamma^2/4\omega_v)$.

(б) Каков сдвиг частоты возбужденных колебаний молекул относительно ω_v?

18.5. Покажите, что угол β при вершине конуса антистоксова излучения, изображенного на рис. 18.7, равен

$$\beta = \left\{\frac{1}{n}\frac{\omega_1}{\omega_3}\left[n_3 - n_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}(n_3 + n_1 - 2n_0)\right]\right\}^{1/2},$$

где индексы *1*, *2*, *3* относятся соответственно к стоксовой, лазерной и антистоксовой частотам, а n — показатель преломления.

18.6. Решите уравнения (18.7.13)—(18.7.15).

18.7. Используя метод, изложенный в приложении 2, получите квантовомеханическое выражение для ε_2, определенное в (18.7.1). Сравните эти результаты с выражением (18.7.2).

Глава 19

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, МОДУЛЯЦИЯ И ГЕНЕРИРОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

В этой главе мы рассмотрим различные вопросы, связанные с распространением волн в диэлектрических пленках, толщина которых сравнима с длиной волны.

Возможность генерирования, канализации, модуляции и детектирования света в тонких пленках [1—3] открывает новые пути для создания монолитных «оптических схем» [4] и развития области, которая носит название «интегральной оптики» [5].

Мы рассмотрим сначала основную задачу о распространении ТЕ- и ТМ-волн в полосковых диэлектрических волноводах. Затем будет развит метод связанных волн для решения задач о влиянии возмущения на поток мощности ТЕ- и ТМ-мод.

Метод связанных волн применяется для анализа многих ситуаций: а) периодических (гофрированных) оптических волноводов и фильтров, б) лазеров с распределенной обратной связью, в) электрооптической и г) магнитооптической связи волн.

19.1. Моды диэлектрических волноводов

Для понимания законов взаимодействия направляемых волн в «возмущенных» волноводах нужно изучить свойства волноводных мод. Мода диэлектрического волновода с круговой частотой ω представляет собой решение уравнения (6.5.3), которое может быть записано в виде

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 n^2(\mathbf{r})\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (19.1.1)$$

где $k^2(\mathbf{r}) = k^2 n^2(\mathbf{r})$. Решения (19.1.1) должны удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границах раздела диэлектриков. В (19.1.1) предполагается монохроматическая зависимость поля от времени

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp[i(\omega t - \varphi(\mathbf{r}))] \qquad (19.1.2)$$

$k = \omega/c$, а $n(\mathbf{r})$ — показатель преломления, связанный с диэлектрической проницаемостью соотношением $n^2(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})/\varepsilon_0$. Ограничиваясь рассмотрением волн с фазовыми фронтами, перпендикулярными оси волновода z, будем иметь $\varphi(\mathbf{r}) = \beta z$, и (19.1.1) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \mathbf{E}(x, y) + [k^2 n^2(\mathbf{r}) - \beta^2]\, \mathbf{E}(x, y) = 0. \qquad (19.1.3)$$

Основные свойства диэлектрического волновода могут быть выяснены на плоской модели, для которой зависимость поля от одной из координат (например, y) отсутствует. Волноводы, у которых поперечные размеры ограничены как в x-, так и в y-направлениях, приближенно описываются теорией плоского волновода, если один из поперечных размеров волновода значительно превышает другой [6, 7]. Даже при невыполнении указанного условия большинство результатов при переходе от плоского волновода к ограниченному меняются лишь в количественном отношении. Именно поэтому, а также из-за значительных математических упрощений мы ограничимся в последующем изложении случаем плоского (полоскового) волновода, показанного на рис. 19.1.

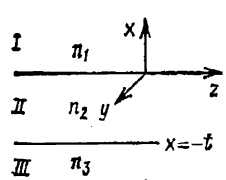


Рис. 19.1. Полосковый ($d/dy=0$) диэлектрический волновод

Полагая $\partial/\partial y = 0$ в (19.1.3.) и записывая это уравнение отдельно для областей I, II, III, получаем:

область I

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + (k^2 n_1^2 - \beta^2) E(x, y) = 0; \qquad (19.1.4а)$$

область II

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + (k^2 n_2^2 - \beta^2) E(x, y) = 0; \qquad (19.1.4б)$$

область III

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y) + (k^2 n_3^2 - \beta^2) E(x, y) = 0. \qquad (19.1.4в)$$

Здесь $E(x, y)$ — декартова компонента $\mathbf{E}(x, y)$.

Прежде чем приступить к формальному решению (19.1.4), качественно обсудим физическую природу решений. Рассмотрим зависимость вида решения от постоянной распространения β для *фиксированной* частоты ω. Предположим, что $n_2 > n_3 > n_1$. Для $\beta > kn_2$ [область (*а*) на рис. 19.2] из (19.1.4) получаем, что $(1/E)(\partial^2 E/\partial x^2) > 0$ и, следовательно, $E(x)$ — экспоненциальная функция во всех трех средах, образующих волновод. Поскольку поле $E(x)$ и его производная должны быть непрерывны на границах (см. § 19.2), распределение поля имеет вид, показанный на рис. 19.2, *а*. Величина поля неограниченно возрастает при удалении от волновода, так что это решение не относится к числу физически реализуемых и не соответствует реально существующим волнам.

При $kn_3 < \beta < kn_2$ (рис. 19.2, *б*, *в*) из (19.1.4) следует, что решение синусоидально в области II, так как $(1/E)(\partial^2 E/\partial x^2) < 0$, и экспоненциально в областях I и III. Это делает возможным существование решений $E(x)$, удовлетворяющих граничным условиям, и экспоненциально спадающих в областях I и III. Такие решения приведены на рис. 19.2, *б* и *в*. Энергия, переносимая такими модами, локализована в окрестности направляющего слоя (область II), что позволяет говорить о локализованных или волноводных модах. Необходимым для их существования является условие $kn_1, kn_3 < \beta < kn_2$, т. е. волноводные моды существуют, если внутренний слой обладает наибольшим показателем преломления.

При $kn_1 < \beta < kn_2$ (рис. 19.2, *г*) решения (19.1.4) имеют экспоненциальный характер в области I и синусоидальный в областях II и III. Мы будем ссылаться на эти моды как на излучательные моды подложки. Для $0 < \beta < kn_1$ (рис. 19.2, *д*) решение для $E(x)$ становится синусоидальным во всех трех областях. Это так называемые излучательные моды волновода.

Решение (19.1.4), приведенное в следующей главе, показывает, что в то время как в областях (*г*) и (*д*) величина β непрерывна, в области $kn_3 < \beta < kn_2$ граничным условиям удовлетворяют лишь волны с дискретными значениями β. Количество волноводных мод

зависит от толщины слоя t, от частоты ω и показателей преломления n_1, n_2, n_3. При заданной длине волны число волноводных мод увеличивается от нуля при увеличении t. При некотором t становится локализованной мода TE_0. Дальнейшее увеличение t разрешает существование TE_1-моды и т. д.

Практичная точка зрения на распространение волны во внутреннем слое II состоит в следующем: в слое под некоторым углом θ к горизонтальной оси распространяется плоская волна, испытывающая последовательные полные внутренние отражения от границ раздела II—I и II—III. Такое представление основывается на (19.1.4б). Предполагая, что $E \sim \sin(hx + \alpha) \exp(-i\beta z)$, получаем

$$\beta^2 + h^2 = k^2 n_2^2. \qquad (19.1.5)$$

Соответствующие векторные диаграммы приведены на рис. 19.2. Отметим, что, поскольку частота постоянна, $kn_2 = (\omega/c)n_2$ принимает одинаковое значение во всех областях, исключая область (а).

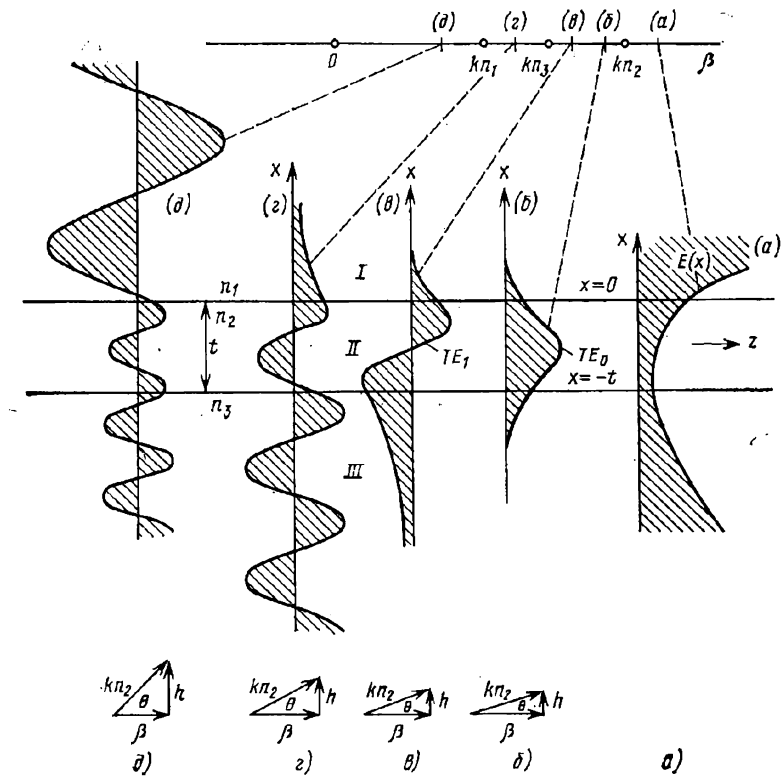


Рис. 19.2. Различные режимы распространения волн в волноводе, изображенном на рис. 19.1, и соответствующие им распределения поля.
Внизу приведены треугольники волновых векторов для разных режимов

Таким образом, распространение волны в волноводе может формально рассматриваться как распространение плоской волны вдоль направления гипотенузы с постоянной распространения kn_2. При увеличении β угол θ возрастает до тех пор, пока β не достигнет величины kn_3, и волна перестает испытывать полное внутреннее отражение от границы III—II. Условие экспоненциального спадания поля в области III ($\beta = kn_3$) идентично (при записи $\beta = kn_2 \cos 0$) условию полного внутреннего отражения.

19.2. Моды плоского волновода

ТЕ-моды. Рассмотрим диэлектрический волновод, изображенный на рис. 19.1. Волновод состоит из пленки толщиной t с показателем преломления n_2, заключенной между средами с показателями преломления n_1 и n_3. При $\partial/\partial y = 0$ этот волновод в общем случае может обладать конечным числом локализованных ТЕ-мод с компонентами поля E_y, H_x и H_z и ТМ-мод с компонентами H_y, E_x, E_z.

«Излучательные» моды этой структуры, не локализованные во внутреннем слое, здесь не рассматриваются. Они важны при решении других задач, например при создании решеточных ответвителей или при исследовании радиационных потерь волноводов [28].

Компонента E_y ТЕ-мод удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 E_y = \frac{n_i}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \text{ при } i = 1, 2, 3. \tag{19.2.1}$$

Возьмем $E_y(x, z, t)$ в виде

$$E_y(x, z, t) = \mathscr{E}_y(x) \exp[i(\omega t - \beta z)], \tag{19.2.2}$$

а поперечную функцию $\mathscr{E}_y(x)$ в виде

$$\mathscr{E}_y = \begin{cases} C \exp(-qx) & (x \geqslant 0), \\ C[\cos(hx) - (q/h)\sin(hx)] & (-t \leqslant x \leqslant 0), \\ C[\cos(ht) + (q/h)\sin(ht)] \exp[p(x+t)] & (x \leqslant -t), \end{cases} \tag{19.2.3}$$

что при подстановке в (19.2.1) дает

$$h = (n_2^2 k^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad q = (\beta^2 - n_1^2 k^2)^{1/2},$$
$$p = (\beta^2 - n_3^2 k^2)^{1/2}, \quad k = \omega/c. \tag{19.2.4}$$

Решение для $\mathscr{E}_y$ и $\mathscr{H}_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{d\mathscr{E}_y}{dx}$ должно быть непрерывным при $x = 0$ и $x = -t$. Коэффициенты (19.2.3) выбраны так, что условие непрерывности выполняется для $\mathscr{E}_y$ на границах $x = 0$ и $x = -t$ и для $\partial\mathscr{E}_y/\partial x$ на границе $x = 0$. Удовлетворяя условию непрерывности для $\partial\mathscr{E}_y/\partial x$ при $x = -t$, получаем из (19.2.3)

$$h \sin(ht) - q \cos(ht) = p[\cos(ht) + (q/h)\sin(ht)]$$

или

$$\operatorname{tg}(ht) = \frac{q+p}{h(1 - qp/h^2)}. \tag{19.2.5}$$

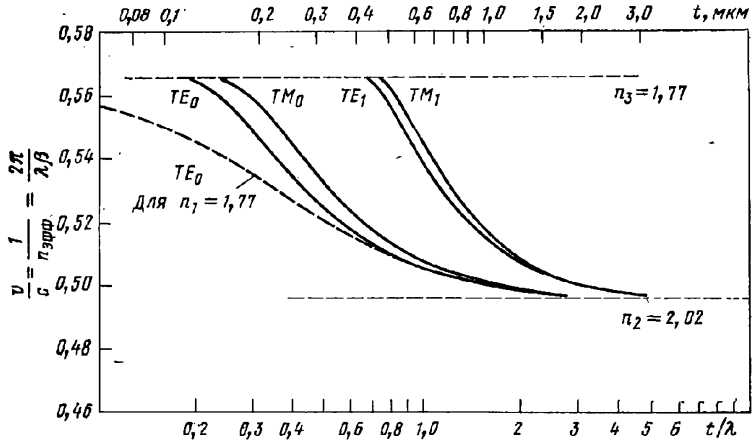


Рис. 19.3. Дисперсионные кривые волноводных мод при $\lambda=0{,}6328$ мкм для пленки ZnO на сапфировой подложке; $n_1=1$ [10]

Для симметричного волновода ($n_1 = n_3$) распределение поля (19.2.3) должно быть либо четным, либо нечетным относительно $x = -t/2$. Согласно (19.2.3) из этого вытекает, что выражение $1 + q/h$ или $1 - q/h$ соответственно равно нулю. Поскольку $p = q$, знаменатель в (19.2.5) обращается в нуль. Этот частный случай рассмотрен в [8, 9].

Уравнение (19.2.5) вместе с (19.2.4) используется для вычисления собственных значений β волноводных ТЕ-мод. Пример такого решения показан на рис. 19.3.

Константа C в (19.2.3) произвольна, тем не менее для многих применений, связанных с обменом энергией между модами, полезно определить C таким образом, чтобы константа была связана с энергией моды. Смысл этого положения станет более понятным в § 19.3. Мы выберем C так, чтобы полю моды $\mathscr{E}_y(x)$ в (19.2.3) соответствовал поток мощности в *один* ватт на единицу длины в y-направлении. Мода, для которой $E_y = A\mathscr{E}_y(x)$, будет, таким образом, иметь поток мощности $|A|^2$ [Вт/м]. Условие нормировки имеет вид

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* \, dx = \frac{\beta_m}{2\omega\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathscr{E}_y^{(m)}(x)\right]^2 dx = 1, \qquad (19.2.6)$$

где индекс m обозначает m-ю ТЕ-моду, соответствующую m-му собственному числу (19.2.5).

Подстановка (19.2.3) в (19.2.6) дает

$$C_m = 2h_m\left[\frac{\omega\mu}{|\beta_m|\,(t + 1/q_m + 1/t_m)\,(h_m^2 + q_m^2)}\right]^{1/2}. \qquad (19.2.7)$$

Поскольку моды $\mathscr{E}_y^{(m)}$ ортогональны (см. задачу 19.10), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}_y^{(l)}\, \mathscr{E}_y^{(m)}\, dx = \frac{2\omega\mu}{\beta_m}\, \delta_{l,\,m}, \qquad (19.2.8)$$

где $\delta_{l,m}$ — символ Кронекера.

ТМ-моды. Компоненты поля указанных мод суть

$$\begin{aligned} H_y(x, z, t) &= \mathscr{H}_y(x) \exp[i(\omega t - \beta z)], \\ E_x(x, z, t) &= \frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}\mathscr{H}_y(x) \exp[i(\omega t - \beta z)], \\ E_z(x, z, t) &= -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (19.2.9)$$

Поперечная функция $\mathscr{H}_y(x)$ выбирается в виде

$$\mathscr{H}_y(x) = \begin{cases} -C[(h/\bar{q})\cos(ht) + \sin(ht)]\exp[p(x+t)] & (x \leqslant -t), \\ C[-(h/\bar{q})\cos(hx) + \sin(hx)] & (-t \leqslant x \leqslant 0), \\ -(h/\bar{q})\, C\exp(-qx) & (x \geqslant 0). \end{cases} \qquad (19.2.10)$$

Непрерывность H_y и E_z на обеих граничных поверхностях требует удовлетворения следующего характеристического уравнения для постоянных распространения:

$$\operatorname{tg}(ht) = h(\bar{p} + \bar{q})/(h^2 - \bar{p}\bar{q}), \qquad (19.2.11)$$

где $\bar{p} = (n_2^2/n_3^2)\, p$; $\bar{q} = (n_2^2/n_1^2)\, q$.

Нормировочный коэффициент C выбирается так, чтобы волна, представленная выражениями (19.2.9) и (19.2.10), переносила 1 Вт на единицу длины в y-направлении, т. е.

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H_y E_x^*\, dx = \frac{\beta}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathscr{H}_y^2(x)}{\varepsilon(x)}\, dx = 1$$

или с учетом соотношения $n_i^2 = \varepsilon_i/\varepsilon_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\mathscr{H}_y^{(m)}(x)]^2}{n^2(x)}\, dx = \frac{2\omega\varepsilon_0}{\beta_m}. \qquad (19.2.12)$$

Интегрирование с использованием (19.2.10) дает

$$C_m = 2\sqrt{\omega\varepsilon_0/\beta_m\, t_{\text{эфф}}},$$

$$t_{\text{эфф}} = \frac{\bar{q}^2 + h^2}{\bar{q}^2}\left(\frac{t}{n_2^2} + \frac{q^2 + h^2}{\bar{q}^2 + h^2}\,\frac{1}{n_1^2 q} + \frac{p^2 + h^2}{\bar{p}^2 + h^2}\,\frac{1}{n_3^2 p}\right). \qquad (19.2.13)$$

Основные свойства ТЕ- и ТМ-мод иллюстрируются рис. 19.3. При значениях параметра t/λ выше критического мода локализована. При критическом значении величина p обращается в 0 и область, занятая модой, простирается до $x = -\infty$. Для больших значений t/λ выполняется неравенство $p > 0$ и мода с увеличением t/λ все более концентрируется в слое II. На рис. 19.3 это отражено в поведении эффективного показателя преломления волноводной моды $\beta\lambda/2\pi$, который равен n_3 на критической длине волны и асимптотически стремится к n_2 при увеличении t/λ. В симметричном волноводе ($n_1 = n_3$) моды низшего порядка TE_0 и TM_0 не имеют отсечки и существуют для всех значений t/λ. Способ селективного возбуждения волноводных мод с помощью призменных ответвителей и методы определения их постоянных распространения β_m приведены в работе [11].

19.3. Связь между волноводными модами

В предыдущем параграфе мы получили выражения для волноводных мод полоскового диэлектрического волновода, изображенного на рис. 19.1. Во все возрастающем числе устройств используется связь между такими модами [12]. В большинстве случаев связь между модами обусловлена распределенным возмущением поляризации среды.

Типичные примеры — преобразование волн ТМ и ТЕ при электрооптическом или акустооптическом эффектах [13, 14] или связь между прямой и встречной волнами благодаря гофрировке одной из поверхностей волновода [15]. Мы начнем с волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \qquad (19.3.1)$$

Поляризацию среды можно взять в виде суммы

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t), \qquad (19.3.2)$$

где

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t) = [\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0]\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \qquad (19.3.3)$$

— поляризация, наводимая $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в невозмущенном волноводе с диэлектрической постоянной $\varepsilon(\mathbf{r})$. Возмущенная поляризация $\mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t)$ определяется соотношением (19.3.2). Подстановка (19.3.2) и (19.3.3) в (19.3.1) дает

$$\nabla^2 E_y - \mu\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 E_y}{dt^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{возм}\, y}}{\partial t^2}. \qquad (19.3.4)$$

Для E_x и E_z справедливы аналогичные уравнения.

Пренебрегая возможной связью с континуумом излучательных мод, представим полное поле «возмущенного» волновода в виде

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_m A_m(z)\, \mathscr{E}_y^{(m)}(x)\, e^{i(\omega t - \beta_m z)} + \text{к. с.} \qquad (19.3.5)$$

Входящая сюда m-я мода волновода удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta_m^2\right) \mathcal{E}_y^m(\mathbf{r}) + \omega^2 \mu \varepsilon(\mathbf{r}) \mathcal{E}_y^{(m)}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (19.3.6)$$

где $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})$. Подставляя (19.3.5) в (19.3.4), имеем

$$e^{i\omega t} \sum_m \left[\frac{A_m}{2} \left(-\beta_m^2 \mathcal{E}_y^{(m)} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_y^{(m)}}{\partial x^2} + \omega^2 \mu \varepsilon(\mathbf{r}) \mathcal{E}_y^{(m)} \right) e^{-i\beta_m z} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(-i2\beta_m \frac{dA_m'}{dz} + \frac{d^2 A_m}{dz^2} \right) \mathcal{E}_y^{(m)} e^{-i\beta_m z} \right] + \text{к. с.} =$$

$$= \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t)]_y. \qquad (19.3.7)$$

Отметим, что в соответствии с (19.3.6) сумма первых трех членов в (19.3.7) равна нулю. Предполагая «медленность» изменения амплитуд волн

$$\left| \frac{d^2 A}{dz^2} \right| \ll \beta_m \left| \frac{dA}{dz} \right|,$$

из (19.3.7) получаем

$$\sum_m -i\beta_m \frac{dA_m}{dz} \mathcal{E}_y^{(m)} e^{i(\omega t - \beta_m z)} + \text{к. с.} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t)]_y. \qquad (19.3.8)$$

Умножим (19.3.8) на $\mathcal{E}_y^{(s)}(x)$ и проинтегрируем в пределах от $-\infty$ до ∞. В результате, используя (19.2.8), получаем

$$\frac{dA_s^{(-)}}{dz} e^{i(\omega t + \beta_s z)} - \frac{dA_s^{(+)}}{dz} e^{i(\omega t - \beta_s z)} - \text{к. с.} =$$

$$= -\frac{i}{2\omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t)]_y \mathcal{E}_y^{(s)}(x)\, dx. \qquad (19.3.9)$$

Здесь в явном виде выписаны оба члена суммы (19.3.8) с $m = s$. Первый из них, с верхним индексом (—), соответствует волне, бегущей в $-z$-направлении, а второй, с индексом (+), — в $+z$-направлении.

Уравнение (19.3.9) может быть использовано при анализе процессов взаимодействия мод. Некоторые важные примеры рассмотрены в последующих параграфах.

19.4. Периодический волновод

Рассмотрим диэлектрический волновод, в котором периодичность обусловлена гофрировкой одной из поверхностей раздела (рис. 19.4). Гофрировка описывается возмущением диэлектрической постоянной $\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \Delta n^2(\mathbf{r})$, так что полная диэлектрическая постоянная

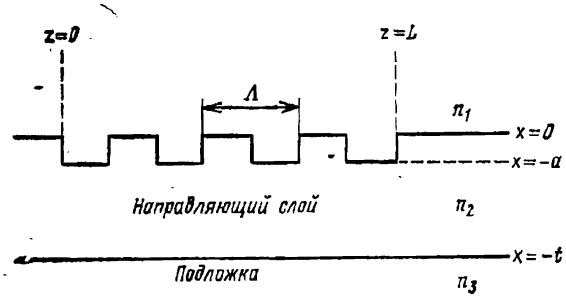


Рис. 19.4. Гофрированный периодический волновод

равна $\varepsilon'(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) + \Delta\varepsilon(\mathbf{r})$. Выражение для возмущенной поляризации следует из (19.3.2) и (19.3.3)

$$\mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t) = \Delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Delta n^2(\mathbf{r})\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \qquad (19.4.1)$$

Поскольку $\Delta n^2(\mathbf{r})$ — скаляр, из (19.3.4) вытекает, что гофрировка связывает моды одного типа (либо ТЕ, либо ТМ), а между волнами разного типа связи нет.

Рассмотрим для определенности распространение ТЕ-волны. При подстановке (19.3.5) в (19.4.1) получаем выражение

$$[\mathbf{P}_{\text{возм}}(\mathbf{r}, t)]_y = \frac{1}{2}\Delta n^2(\mathbf{r})\varepsilon_0 \sum_m \left[A_m \mathscr{E}_y^{(m)}(x) e^{i(\omega t - \beta_m z)} + \text{к. с.}\right], \qquad (19.4.2)$$

использование которого в (19.3.9) приводит к соотношению

$$\frac{dA_s^{(-)}}{dz} e^{i(\omega t + \beta_s z)} - \frac{dA_s^{(+)}}{dz} e^{i(\omega t - \beta_s z)} - \text{к. с.} =$$

$$= -\frac{i\varepsilon_0}{4\omega}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_m \left[A_m \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n^2(x, z)\mathscr{E}_y^{(m)}(x)\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\,dx e^{i(\omega t - \beta_m z)} + \right.$$

$$\left. + \text{к. с.}\right]. \qquad (19.4.3)$$

Важность выполнения фазового синхронизма подчеркивалась в § 16.5 и 17.1. По аналогичным причинам для связи m-й и s-й мод необходимо, чтобы произведение

$$\Delta n^2(x, z)\exp(\mp i\beta_m z)$$

в (19.4.3) содержало член, пропорциональный $\exp(-i\beta_s z)$ или $\exp(i\beta_s z)$. В первом случае возмущение синхронно возбуждает прямую волну $A_s^{(+)}$, а во втором — встречную волну $A_s^{(-)}$. Таким образом, выбор связываемых волн определяется видом зависимости $\Delta n^2(x, z)$ от продольной координаты z. Предположим, в частности, что период Λ функции $\Delta n^2(x, z)$ выбран так, что $l\pi/\Lambda \approx \beta_s$ при некотором целом l. Мы можем представить $\Delta n^2(x, z)$ в виде

$$\Delta n^2(x, z) = \Delta n^2(x)\sum_{-\infty}^{\infty} a_q \exp[i(2q\pi/\Lambda)z].$$

Правая часть (19.4.3) теперь содержит член ($q = l$, $m = s$), пропорциональный $A_s^{(+)} \exp[i(2l\pi/\Lambda - \beta_s)z]$. В то же время

$$2l\pi/\Lambda - \beta_s \approx \beta_s, \tag{19.4.4}$$

так что эта компонента вынуждающей силы находится в синхронизме с волной $A_s^{(-)} \exp(i\beta_s z)$, представленной в левой части (19.4.3), и в результате

$$\frac{dA_s^{(-)}}{dz} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{4} A_s^{(+)} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n^2(x) \left[\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\right]^2 dx\, a_l\, e^{i(2l\pi/\Lambda - 2\beta_s)z}. \tag{19.4.5}$$

Таким образом, связь между встречной волной $A_s^{(-)}$ и прямой волной $A_s^{(+)}$ за счет l-й гармоники возмущения $\Delta n^2(x, z)$ может описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_s^{(-)}}{dz} &= \varkappa A_s^{(+)} \exp[-i2\Delta\beta z], \\ \frac{dA_s^{(+)}}{dz} &= \varkappa^* A_s^{(-)} \exp[i2\Delta\beta z], \end{aligned} \tag{19.4.6}$$

где

$$\varkappa = i\frac{1}{4}\varepsilon_0\,\omega a_l \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n^2(x) \left[\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\right]^2 dx; \tag{19.4.7}$$

$$\Delta\beta = \beta_s - l\pi/\Lambda = \beta_s - \beta_0. \tag{19.4.8}$$

Отметим, что полная энергия, переносимая обеими модами, сохраняется, так как

$$\frac{d}{dz}\left[|A_s^{(-)}|^2 - |A_s^{(+)}|^2\right] = 0. \tag{19.4.9}$$

Вернемся к волноводу с прямоугольной гофрировкой, изображенной на рис. 19.4. Для этого волновода

$$\begin{aligned} \Delta n^2(x, z) &= \Delta n^2(x)\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\eta z + \frac{1}{3}\sin 3\eta z + \ldots\right)\right] = \\ &= \Delta n^2(x) \sum_l a_l \exp(il\eta z), \end{aligned} \tag{19.4.10}$$

где

$$\Delta n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 - n_1^2 & (-a \leqslant x \leqslant 0), \\ 0 & (x < -a,\ x > 0), \end{cases} \tag{19.4.11}$$

$$\eta = 2\pi/\Lambda, \text{ так что } a_0 = 1/2,$$

$$a_l = \begin{cases} i/l\pi & (l\text{—нечетное}), \\ 0 & (l\text{—четное}), \end{cases}$$

и для нечетных l

$$\varkappa = -\frac{\omega\varepsilon_0}{4l\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta n^2(x)\left[\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\right]^2 dx. \qquad (19.4.12)$$

Практически Λ выбирается так, чтобы для некоторого выделенного l было $\Delta\beta \approx 0$. Отметим, что при $\Delta\beta = 0$

$$\Lambda = l\lambda_{\text{в}}^{(s)}/2, \qquad (19.4.13)$$

где $\lambda_{\text{в}}^{(s)} = 2\pi/\beta_s$ — волноводная длина волны s-й моды.

Преобразуем интеграл в (19.4.12), используя выражение для полей (19.2.3) и формулу (19.4.11):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta n^2(x)\left[\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\right]^2 dx = (n_2^2 - n_1^2)\int\limits_{-a}^{0}\left[\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\right]^2 dx =$$

$$= (n_2^2 - n_1^2)\,C_s^2\int\limits_{-a}^{0}\left[\cos(h_s x) - \frac{q_s}{h_s}\sin(h_s x)\right]^2 dx. \qquad (19.4.14)$$

Интеграл в (19.4.14) может быть вычислен точно с помощью (19.2.3) и (19.2.5). Особенно простой результат получается для мод, достаточно удаленных по частоте от критической, так что, как следует из (19.2.4) и (19.2.5), $h_s \to s\pi/t$ ($s = 1, 2, \ldots$ = поперечный индекс моды),

$$q_s/h_s \approx (n_2^2 - n_1^2)^{1/2}(2t/s\lambda),\ \beta_s \approx n_2 k. \qquad (19.4.15)$$

К тому же, поскольку $q_s \gg h_s$, из (19.2.7) следует

$$C_s^2 = 4h_s^2\,\omega\mu/\beta_s t q_s^2 \qquad (19.4.16)$$

для четко выраженных волноводных мод. Принимая во внимание что $h_s a \ll 1$, вычислим интеграл в (19.4.14)

$$(n_2^2 - n_1^2)\int\limits_{-a}^{0}\left[\mathscr{E}_y^{(s)}(x)\right]^2 dx = (n_2^2 - n_1^2)\,\frac{4\pi^2\omega\mu}{3n_2 k}\left(\frac{a}{t}\right)^3 \times$$

$$\times\left(1 + \frac{3}{q_s a} + \frac{3}{q_s^2 a^2}\right)$$

и, используя (19.4.15), получим

$$\varkappa_s \approx \frac{2\pi^2 s^2}{3l\lambda}\,\frac{(n_2^2 - n_1^2)}{n_2}\left(\frac{a}{t}\right)^3\left[1 + \frac{3}{2\pi}\,\frac{\lambda/a}{(n_2^2 - n_1^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4\pi^2}\,\frac{(\lambda/a)^2}{(n_2^2 - n_1^2)}\right]. \qquad (19.4.17)$$

Итак, задача сводится к решению системы двух связанных уравнений (19.4.6), коэффициент связи в которых определяется (19.4.17).

19.5. Метод связанных волн [19, 5]

Вернемся к уравнениям связанных волн (19.4.6), в которых переобозначим для простоты $A_s^{(-)} = A$, $A_s^{(+)} = B$, $\beta_s = \beta$,

$$\frac{dA}{dz} = \varkappa_{ab} B \exp\left[-i2\Delta\beta z\right],$$
$$\frac{dB}{dz} = \varkappa_{ab}^{*} A \exp\left[i2\Delta\beta z\right], \tag{19.5.1}$$

где $\Delta\beta = \beta - \beta_0$.

Рассмотрим волновод с гофрированным участком длиной L (рис. 19.5), на который слева падает волна с амплитудой $B(0)$. Решение (19.5.1), удовлетворяющее граничному условию $A(L) = 0$, имеет вид

$$A(z)\, e^{i\beta z} = B(0) \frac{i\varkappa_{ab} \operatorname{sh}\left[S(z-L)\right]}{-\Delta\beta \operatorname{sh}(SL) + iS \operatorname{ch}(SL)} e^{i\beta_0 z},$$
$$B(z)\, e^{-i\beta z} = B(0) \frac{\Delta\beta \operatorname{sh}\left[S(z-L)\right] + iS \operatorname{ch}\left[S(z-L)\right]}{-\Delta\beta \operatorname{sh}(SL) + iS \operatorname{ch}(SL)} e^{-i\beta_0 z}, \tag{19.5.2}$$

где

$$S = \sqrt{\varkappa^2 - (\Delta\beta)^2}; \quad \varkappa = |\varkappa_{ab}|^2. \tag{19.5.3}$$

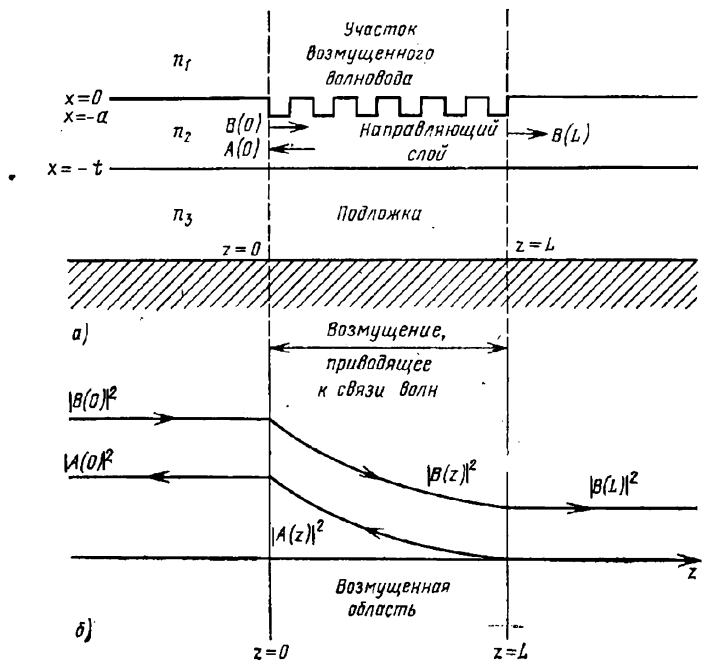


Рис. 19.5. Гофрированный участок диэлектрического волновода (*а*) и поля падающей и отраженной волн (*б*)

При наличии фазового синхронизма ($\Delta\beta = 0$) выражения (19.5.2) можно переписать в более простом виде

$$A(z) = B(0)\left(\frac{\varkappa_{ab}}{\varkappa}\right)\frac{\mathrm{sh}\,[\varkappa(z-L)]}{\mathrm{ch}\,\varkappa L},\quad B(z) = B(0)\,\frac{\mathrm{ch}\,[\varkappa(z-L)]}{\mathrm{ch}\,\varkappa L}. \qquad (19.5.4)$$

График зависимости мощностей волн $|B(z)|^2$ и $|A(z)|^2$ для этого случая приведен на рис. 19.5. Если аргументы гиперболических функций в (19.5.4) достаточно велики, то мощность падающей волны экспоненциально спадает на участке возмущенного волновода. Это вызвано, однако, не поглощением, а перекачкой мощности во встречную волну.

Из (19.3.5) и (19.5.2) нетрудно найти, что постоянная распространения волны в периодическом волноводе равна

$$\beta' = \beta_0 \pm iS = l\pi/\Lambda \pm i\sqrt{\varkappa^2 - [\beta(\omega) - \beta_0]^2}, \qquad (19.5.5)$$

где $\Delta\beta = \beta - \beta_0$; $\beta_0 = l\pi/\Lambda$. В области частот, для которых $\Delta\beta(\omega) < \varkappa$, постоянная распространения β' имеет мнимую часть. Это соответствует так называемой «запрещенной зоне», аналогичной энергетической щели в полупроводниках, где комплексность постоянной распространения электронных волн обусловлена периодичностью потенциала в кристалле. Возвращаясь к (19.5.5) и аппроксимируя $\beta(\omega)$ вблизи брэгговского значения $l\pi/\Lambda$ линейной функцией $\beta(\omega) = (\omega/c)n_{\text{эфф}}$, где $n_{\text{эфф}}$ — эффективный показатель преломления для волны в волноводе, будем иметь

$$\beta' \approx l\pi/\Lambda \pm i\,[\varkappa^2 - (n_{\text{эфф}}/c)^2(\omega - \omega_0)^2]^{1/2}. \qquad (19.5.6)$$

Здесь $\omega = \omega_0$ — центральная частота запрещенной зоны, на которой невозмущенное значение β равно $l\pi/\Lambda$.

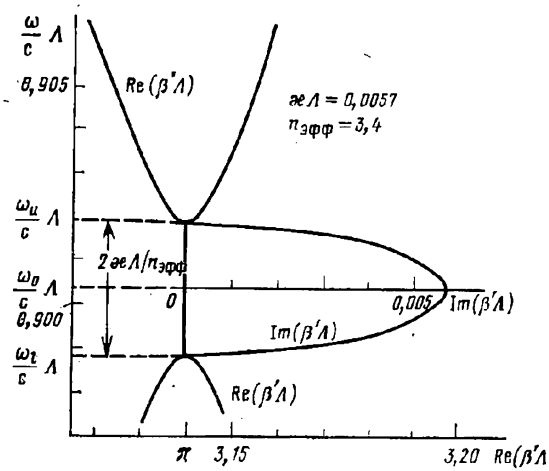


Рис. 19.6. Зависимость действительной и мнимой частей постоянной распространения β от частоты для мод в периодическом волноводе.
На частотах $\omega_l < \omega < \omega_u$ справедливы соотношения $\mathrm{Im}\beta' \neq 0$ и $\mathrm{Re}\beta' = \pi/\Lambda$

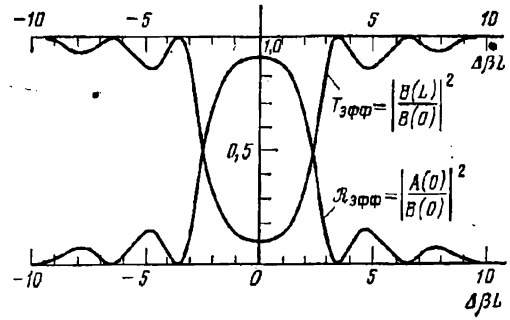


Рис. 19.7. Отражательная и проходная частотные характеристики участка гофрированного волновода длиной L в зависимости от расстройки $\Delta\beta L \approx \approx [(\omega-\omega_0)L/c]n_{эфф}$; $\varkappa L=1{,}84$

График зависимости $\mathrm{Re}\,\beta'$ и $\mathrm{Im}\,\beta'$ от ω, построенный по формуле (19.5.5), приведен на рис. 19.6. Ширина запрещенной зоны равна

$$(\Delta\omega)_{щели}=2\varkappa c/n_{эфф} \qquad (19.5.7)$$

$$\text{и } (\mathrm{Im}\,\beta')_{max}=\varkappa.$$

Таким образом, на частотах, близких к брэгговской ω_0, короткий отрезок гофрированного волновода обладает свойствами хорошо отражающего зеркала. Коэффициенты прохождения $T_{эфф} = |B(L)/B(0)|^2$ и отражения $\mathcal{R}_{эфф} = |A(0)/B(0)|^2$ такого фильтра получаются непосредственно из (19.5.2); соответствующие графики изображены на рис. 19.7. Реальная характеристика гофрированного волновода представлена на рис. 19.8.

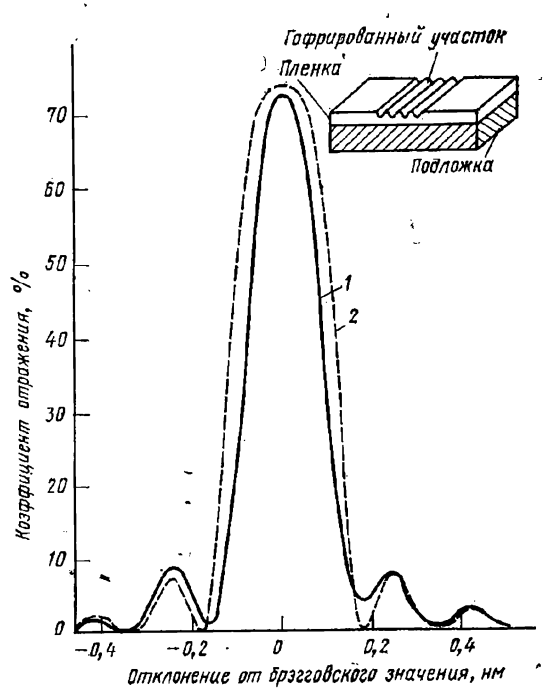


Рис. 19.8. Экспериментальная (*1*) и теоретическая (*2*) зависимости коэффициента отражения гофрированного фильтра на пленочном волноводе от расстройки длины волны по отношению к брэгговской величине [16]

19.6. Лазер с распределенной обратной связью

Если периодическая среда обеспечивает достаточный коэффициент усиления на частотах, близких к брэгговской частоте ω_0 (на этих частотах $\beta \approx l\pi/\Lambda$), то генерация возможна и без концевых отражателей. Обратная связь создается непрерывным синфазным переизлучением во встречную волну на неоднородностях периодической структуры. Рассмотрим два случая:

1) периодическое возмущение параметров среды лазера [17];

2) периодическую гофрировку боковой поверхности волноводного лазера [18]. Как мы увидим, оба случая описываются одинаковыми уравнениями.

Объемная периодичность. Рассмотрим среду с комплексной диэлектрической постоянной, у которой волновое число равно

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = \omega^2 \mu (\varepsilon_r + i\varepsilon_i) = k_0^2 n^2 (z)\left[1 + i\frac{2\gamma(z)}{k_0 n}\right]. \quad (19.6.1)$$

Здесь k_0 — постоянная распространения в свободном пространстве; γ ($\gamma \ll k_0$) — показатель усиления в среде[1]. Если показатель преломления $n(z)$ и показатель усиления $\gamma(z)$ — гармонические функции z, то можно записать

$$n(z) = n + n_1 \cos 2\beta_0 z, \quad \gamma(z) = \gamma + \gamma_1 \cos 2\beta_0 z. \quad (19.6.2)$$

Подставляя (19.6.2) в (19.6.1), для слабовозмущенной среды ($n_1 \ll n$, $\gamma_1 \ll \gamma$) получим

$$k^2(z) = k_0^2 n^2 + i2k_0 n\gamma + 4k_0 n\left(\frac{\pi n_1}{\lambda} + i\frac{\gamma_1}{2}\right)\cos 2\beta_0 z.$$

Поскольку постоянная распространения в невозмущенной среде ($\gamma_1 = 0$, $n_1 = 0$) равна $\beta = k_0 n$, то, определяя постоянную $\varkappa$ соотношением

$$\varkappa = (\pi n_1/\lambda) + i(\gamma_1/2), \quad (19.6.3)$$

где λ — длина волны в свободном пространстве, можем переписать выражение для $k^2(z)$ в виде

$$k^2(z) = \beta^2 + i2\beta\gamma + 4\beta\varkappa \cos 2\beta_0 z. \quad (19.6.4)$$

Как было показано в § 6.5, при слабом изменении k^2 на длине волны скалярное волновое уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{d^2E}{dz^2} + k^2(z)E = 0 \quad (19.6.5)$$

или с использованием (19.6.4)

$$\frac{d^2E}{dz^2} + [\beta^2 + i2\beta\gamma + 4\beta\varkappa \cos 2\beta_0 z]E = 0.$$

[1] Используемая здесь величина γ составляет половину фигурирующей в (8.4.3).

В обсуждении, последовавшем за выводом (19.4.3), указывалось, что пространственная модуляция параметра по закону $\cos 2\beta_0 z$ при выполнении условия $\beta \approx \beta_0$ может связать волну $\exp(-i\beta z)$, бегущую в прямом направлении, со встречной волной $\exp(i\beta z)$. В этом случае представление поля $E(z)$ в виде одиночной бегущей волны неправомерно; хорошим приближением является линейная суперпозиция обеих бегущих в противоположные стороны волн:

$$E(z) = A'(z)\exp(i\beta' z) + B'(z)\exp(-i\beta' z), \qquad (19.6.6)$$

где β' — постоянная распространения несвязанных волн ($\varkappa = 0$):

$$\beta'^2 = \beta^2 + i2\beta\gamma,\ \beta' \approx \beta + i\gamma,\ \gamma \ll \beta. \qquad (19.6.7)$$

Используя (19.6.6) и

$$\frac{d^2A}{dz^2}(A'(z)e^{i\beta' z}) = -\left(\beta'^2 A' - i2\beta'\frac{dA'}{dz} - \frac{d^2A'}{dz^2}\right)e^{i\beta' z},$$

получаем для медленных амплитуд волн $\left(\frac{d^2A'}{dz^2} \ll \beta'\frac{dA'}{dz}\right)$ следующее уравнение:

$$i\beta'\frac{dA'}{dz}e^{i\beta' z} - i\beta'\frac{dB'}{dz}e^{-i\beta' z} = -\beta\varkappa e^{i(2\beta_0-\beta')z}B' -$$

$$-\beta\varkappa e^{-i(2\beta_0-\beta')z}A' - \beta\varkappa e^{i(2\beta_0+\beta')z}A' - \beta\varkappa e^{-i(2\beta_0+\beta')z}B'. \qquad (19.6.8)$$

При выполнении брэгговского условия $\beta \approx \beta_0$ можно приравнять члены с близкими фазовыми набегами (т. е. синхронные члены), пренебрегая, таким образом, последними двумя в уравнении (19.6.8). В результате получим

$$\frac{dA'}{dz} = i\varkappa B' e^{-i2(\beta'-\beta_0)z} = i\varkappa B' e^{-i2(\Delta\beta+i\gamma)z},$$

$$\frac{dB'}{dz} = -i\varkappa A' e^{i2(\beta'-\beta_0)z} = -i\varkappa A' e^{i2(\Delta\beta+i\gamma)z}, \qquad (19.6.9)$$

где $\Delta\beta = \beta - \beta_0$. Далее выведем подобную систему уравнений для гофрированного волноводного лазера.

Гофрированный волноводный лазер. Пассивный гофрированный волновод описывается уравнениями (19.5.1). Для направляющей среды с усилением эти уравнения нужно модифицировать путем добавления таких членов, описывающих усиление, чтобы при $\varkappa = 0$ оба независимых решения $A(z)$ и $B(z)$ соответствовали экспоненциально растущим волнам в направлениях $-z$ и $+z$. Итак, перепишем (19.5.1) в виде

$$\frac{dA}{dz} = \varkappa_{ab}Be^{-i2\Delta\beta z} - \gamma A,\quad \frac{dB}{dz} = \varkappa_{ab}^* Ae^{i2\Delta\beta z} + \gamma B, \qquad (19.6.10)$$

где $\varkappa$ определяется (19.4.12), а γ — показатель усиления в среде. Вводя обозначения

$$A(z) = A'(z)\exp(-\gamma z),\quad B(z) = B'(z)\exp(\gamma z), \qquad (19.6.11)$$

приводим уравнения (19.6.10) к форме

$$\frac{dA'}{dz} = \varkappa_{ab} B' \exp[-i2(\Delta\beta + i\gamma)z], \quad \frac{dB'}{dz} = \varkappa_{ab}^{*} A' \exp[i2(\Delta\beta + i\gamma)z], \tag{19.6.12}$$

идентичной (19.6.9) для среды с объемной периодической модуляцией показателя преломления.

С помощью подстановки

$$\Delta\beta \to \Delta\beta + i\gamma \tag{19.6.13}$$

можно свести (19.6.12) к уравнениям (19.5.1) и затем использовать (19.5.2) для нахождения поля $E(z) = B'(z) \exp[(-i\beta + \gamma)z] + A'(z) \exp[(i\beta - \gamma)z]$ внутри периодического волновода длиной L. Предполагая амплитуду падающей волны на входе ($z = 0$) равной $B(0)$, найдем решение системы (19.6.12) для «прямой» $B'(z) \exp[(-i\beta + \gamma)z]$ и «встречной» $A'(z) \exp[(i\beta - \gamma)z]$ волн:

$$B'(z)\, e^{[(-i\beta+\gamma)z]} = B(0) \frac{(\gamma - i\Delta\beta)\,\mathrm{sh}\,[S(L-z)] - S\,\mathrm{ch}\,[S(L-z)]}{(\gamma - i\Delta\beta)\,\mathrm{sh}\,(SL) - S\,\mathrm{ch}\,(SL)} e^{-i\beta_0 z}, \tag{19.6.14}$$

$$A'(z)\, e^{[(i\beta-\gamma)z]} = B(0) \frac{\varkappa_{ab}\,\mathrm{sh}\,[S(L-z)]}{(\gamma - i\Delta\beta)\,\mathrm{sh}\,(SL) - S\,\mathrm{ch}\,(SL)} e^{i\beta_0 z}.$$

Здесь $S^2 = \varkappa^2 + (\gamma - i\Delta\beta)^2$; $\varkappa^2 = |\varkappa_{ab}|^2$.

Комплексность величины S приводит к качественному различию между свойствами периодического волновода с усилением (19.6.14) и пассивного периодического волновода (19.5.2). Действительно, при выполнении равенства

$$(\gamma - i\Delta\beta)\mathrm{sh}\,(SL) = S\mathrm{ch}\,(SL) \tag{19.6.15}$$

согласно (19.6.14) как коэффициент отражения $E_r(0)/E_i(0)$, так и коэффициент прохождения $E_i(L)/E_i(0)$ стремятся к бесконечности. То, что поля $E_r(0)$ и $E_i(L)$ на выходе достигают конечных значений в отсутствие входного сигнала [$E_i(0) = 0$], означает, что отрезок гофрированного волновода представляет собой генератор. Таким образом, соотношение (19.6.15) есть условие генерации лазера с распределенной обратной связью [17]. При $\gamma = 0$, как следует из (19.5.2), $|E_i(L)/E_i(0)| < 1$ и $|E_r(0)/E_i(0)| < 1$, что соответствует пассивному устройству без внутреннего усиления.

На частотах, близких к брэгговской ω_0 ($\Delta\beta = 0$), и при условии, что усиление в среде чуть меньше, чем требуется соотношением (19.6.15), отрезок волновода представляет собой усилитель с высоким коэффициентом усиления. Усилитель может работать как отражательный с коэффициентом усиления

$$\frac{E_r(0)}{E_i(0)} = \frac{\varkappa_{ab}\,\mathrm{sh}\,(SL)}{(\gamma - i\Delta\beta)\,\mathrm{sh}\,(SL) - S\,\mathrm{ch}\,(SL)} \tag{19.6.16}$$

либо как проходной с коэффициентом усиления

$$\frac{E_t(L)}{E_i(0)} = \frac{-S\exp(-i\beta_0 L)}{(\gamma - i\Delta\beta)\,\mathrm{sh}(SL) - S\,\mathrm{ch}(SL)}. \qquad (19.6.17)$$

Характер поведения полей падающей и отраженной волн при высоком усилении иллюстрируется рис. 19.9. Отметим качественное отличие от рис. 19.5, где изображены поля пассивного волновода.

Коэффициенты усиления $|E_r(0)/E_i(0)|^2$ по отраженной волне и $|E_t(L)/E_i(0)|^2$ по проходящей волне как функции $\Delta\beta$ и γ изображены на рис. 19.10 и 19.11 соответственно. На обоих рисунках коэффициент усиления имеет четыре особенности, в которых выполняется условие генерации (19.6.15). Эти точки соответствуют четырем продольным лазерным модам.

Условие генерации. Условие генерации (19.6.15) можно переписать в виде

$$\frac{S-(\gamma-i\Delta\beta)}{S+(\gamma-i\Delta\beta)}\,e^{2SL} = 1. \qquad (19.6.18)$$

В общем случае для вычисления пороговых значений $\Delta\beta$ и γ необходимо прибегнуть к численному решению (19.6.18) [17]. Однако в некоторых частных случаях можно получить приближенное реше-

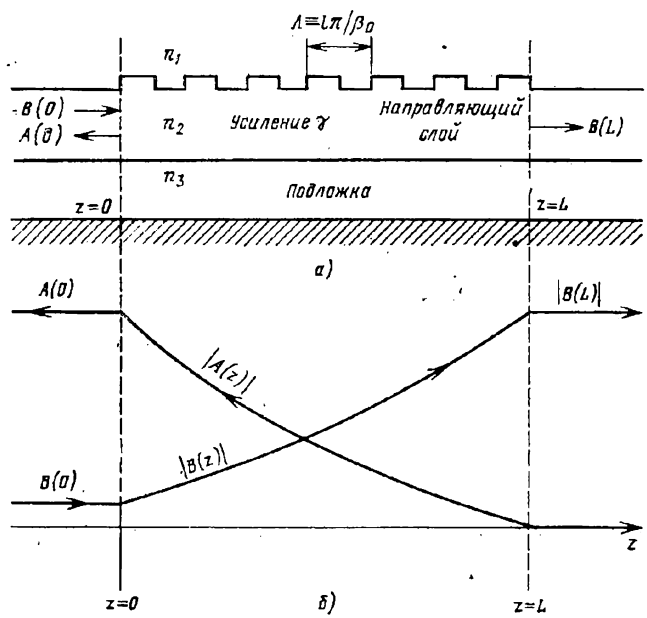


Рис. 19.9. Участок периодического волновода с усилением (*а*) и поля падающей и отраженной волн на этом участке при выполнении условия Брэгга $\beta \approx \pi l/\Lambda$ (*б*)

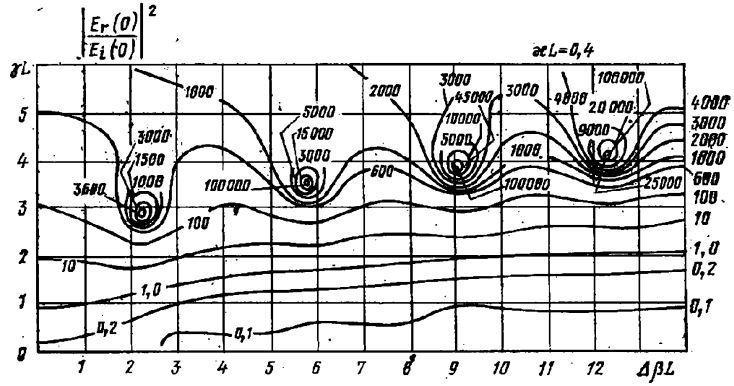


Рис. 19.10. Контуры равных коэффициентов усиления по отраженной волне на плоскости $\Delta\beta L$—γL

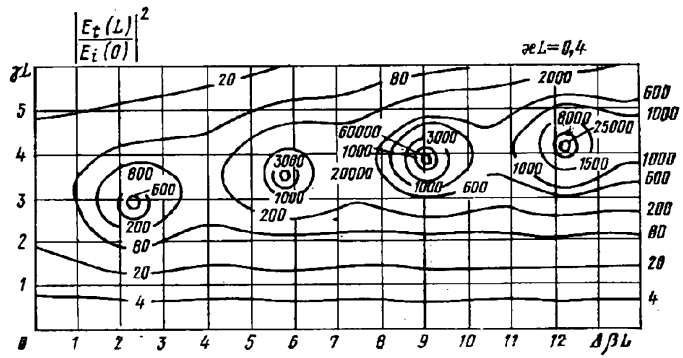


Рис. 19.11. Контуры равных коэффициентов усиления по проходящей волне на плоскости $\Delta\beta L$—γL

ние. Так, для больших коэффициентов усиления ($\gamma \gg \varkappa$) из выражения, определяющего S^2, находим

$$S \approx -(\gamma - i\Delta\beta)\left[1 + \frac{\varkappa^2}{2(\gamma - i\Delta\beta)^2}\right],$$

$$S-(\gamma - i\Delta\beta) = -2(\gamma - i\Delta\beta), \quad S+(\gamma - i\Delta\beta) = \frac{-\varkappa^2}{2(\gamma - i\Delta\beta)}.$$

Подставив эти значения в (19.6.18), получим соотношение

$$\frac{4(\gamma - i\Delta\beta)^2}{\varkappa^2} e^{2SL} = -1 \qquad (19.6.19)$$

и, приравняв в нем фазы правой и левой частей, придем к уравнению

$$2\,\mathrm{arctg}\,\frac{(\Delta\beta)_m}{\gamma_m} - 2(\Delta\beta)_m L + \frac{(\Delta\beta)_m L\varkappa^2}{\gamma_m^2 + (\Delta\beta)_m^2} = (2m+1)\pi, \qquad (19.6.20)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В частности, при $\gamma_m \gg (\Delta\beta)_m$ и $\gamma_m \gg \varkappa$ резонансные частоты мод определяются выражением

$$(\Delta\beta)_m L \approx -(m + 1/2)\pi \qquad (19.6.21)$$

и, поскольку $\Delta\beta = \beta - \beta_0 \approx (\omega - \omega_0) n_{эфф}/c$,

$$\omega_m = \omega_0 - \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi c}{n_{эфф} L}. \qquad (19.6.22)$$

Отметим, что на частоте, в точности равной брэгговской (ω_0), генерация невозможна. Частотный интервал между модами

$$\omega_{m-1} - \omega_m = \pi c / n_{эфф} L \qquad (19.6.23)$$

примерно такой же, как для двухзеркального резонатора с межзеркальным расстоянием L.

Пороговое значение показателя усиления γ_m можно получить, приравняв модули обеих частей в (19.6.19):

$$\frac{\exp(2\gamma_m L)}{\gamma_m^2 + (\Delta\beta)_m^2} = \frac{4}{\varkappa^2}. \qquad (19.6.24)$$

Отсюда следует, что порог генерации возрастает по мере увеличения номера моды m. Это ясно также из приведенных графиков (рис. 19.10 и 19.11).

Экспериментальный гофрированный волноводный лазер на GaAs показан на рис. 19.12. На рис. 19.13 представлены построенная по формуле (19.6.18) теоретическая кривая для порога генерации и точки, полученные в эксперименте с гофрированным лазером на GaAs.

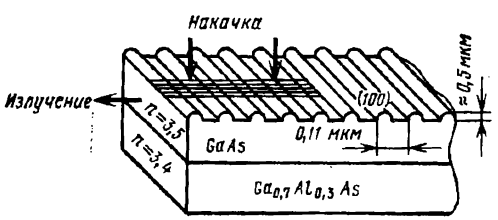


Рис. 19.12. Структура лазера на GaAs с распределенной обратной связью. Волноводный слой толщиной 3 мкм изображен не в масштабе [19]

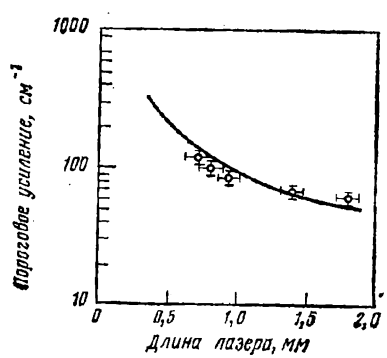


Рис. 19.13. Пороговое значение показателя усиления для лазера с распределенной обратной связью

19.7. Электрооптическая модуляция и связь мод в диэлектрических волноводах

Рассмотрим случай, когда в волноводе при наличии постоянного электрического поля $E^{(0)}$ распространяется волна ТМ-типа ($E_x^{(\omega)} \neq 0$). Согласно (16.0.1) эффект состоит в возникновении поляризации

$$[P_{\text{возм}}(t)]_y \sim rE^{(0)} E_x^{(\omega)} e^{i\omega t}. \qquad (19.7.1)$$

Символ r обозначает электрооптический коэффициент (или линейную комбинацию таких коэффициентов). Поляризация $\mathbf{P}_{\text{возм}}(t)$ в соответствии с (19.3.9) может возбуждать ТЕ-волну, бегущую в положительном направлении. Таким образом, наличие постоянного электрического поля делает возможным преобразование волн ТМ → ТЕ.

Комплексная амплитуда вектора поляризации, наведенной ТМ-волной в присутствии постоянного поля $\mathbf{E}^{(0)}$, равна

$$P_{y\,x}^{(\omega)}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon^2 rE^{(0)}}{\varepsilon_0} E_x^{(\omega)}(\mathbf{r}), \qquad (19.7.2)$$

где

$$\varepsilon^2 rE^{(0)} = \varepsilon_i \varepsilon_j r_{ijk} l_{iy} l_{jx} E_k^{(0)}. \qquad (19.7.3)$$

Здесь i, j, k — главные диэлектрические оси кристалла, а x и y — оси волновода, изображенного на рис. 19.1. Через l обозначены направляющие косинусы. В большинстве практически важных случаев сумма (19.7.3) вырождается в один или два члена.

Используя (19.2.9), запишем поле входной ТМ_l-волны

$$E_x^{(l)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_l}{2\omega\varepsilon(x)} B_l \mathcal{H}_y^{(l)}(x) e^{i(\omega t - \beta_l z)} + \text{к. с.}, \qquad (19.7.4)$$

где $\mathcal{H}_y^{(l)}(x)$ определяется (19.2.10), а $|B_l|^2$ — мощность волны на единицу длины в y-направлении. Таким образом, поляризацию (19.7.2) можно записать в виде

$$P_y(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon^2 r(x, z) E^{(0)}}{2\omega\varepsilon_0 \varepsilon(x)} \beta_l B_l \mathcal{H}_y^{(l)}(x) e^{i(\omega t - \beta_l z)} + \text{к. с.} \qquad (19.7.5)$$

Подстановка (19.7.5) в волновое уравнение (19.3.9) приводит к уравнению

$$\frac{dA_m^{(+)}}{dz} \exp\left(-i\beta_m^{\text{ТЕ}} z\right) - \frac{dA_m^{(-)}}{dz} \exp\left(i\beta_m^{\text{ТЕ}} z\right) =$$

$$= -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 r(x, z) E^{(0)}(x, z)}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} \beta_l B_l \mathcal{H}_y^{(l)}(x) \mathcal{E}_y^{(m)}(x)\, dx \exp\left(-i\beta_l^{\text{ТМ}} z\right). \qquad (19.7.6)$$

Если $\beta_l^{TM} \approx \beta_m^{TE}$, то возбуждается только волна $A_m^{(+)}$, бегущая в том же направлении, что и ТМ-волна. Опуская верхние индексы у амплитуд волн, перепишем (19.7.6)

$$\frac{dA_m}{dz} = -i\varkappa_{m,l}(z) B_l \exp\left[-i(\beta_m^{TE} - \beta_l^{TM}) z\right], \qquad (19.7.7)$$

$$\varkappa_{m,l} = \frac{\beta_l}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 r(x, z) E^{(0)}(x, z)}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} \mathcal{H}_y^{(l)}(x) \mathcal{E}_y^{(m)}(x) dx. \qquad (19.7.8)$$

Выражение (19.7.8) записано в достаточно общей форме и может применяться во многих случаях. Зависимость $E_{x,z}^{(0)}$ и $r(x, z)$ от поперечной координаты x обеспечивает связь между волнами благодаря электрооптическому эффекту в направляющем слое либо в примыкающих к нему средах. Зависимость от z в (19.7.8) возникает в ситуациях, когда $E^{(0)}$ или r зависят от продольной координаты. Пусть направляющий слой $-t \leqslant x \leqslant 0$ однороден по электрооптическим свойствам и в нем задано однородное поле $E^{(0)}$, так что интеграл нужно брать в пределах от $-t$ до нуля. В этом случае интеграл перекрытия в (19.7.8) максимален, если моды TE_m и TM_l имеют одинаковый индекс ($l = m$) и их частоты далеки от критических. При выполнении последнего условия $p, q \gg h$, а выражения (19.2.3), (19.2.7) для $\mathcal{E}_y^{(m)}(x)$ и (19.2.10), (19.2.13) для $\mathcal{H}_y^{(m)}(x)$ в направляющем слое принимают вид

$$\mathcal{E}_y^{(m)}(x) \to (4\omega\mu/t\beta_m^{TE})^{1/2} \sin(m\pi x/t),$$
$$\mathcal{H}_y^{(m)}(x) \to (4\omega\varepsilon_0 n_2^2/t\beta_m^{TM})^{1/2} \sin(m\pi x/t),$$

где $\beta_l^{TM} \approx \beta_m^{TE} \approx \beta = kn_2$. Интеграл перекрытия в (19.7.8) равен

$$\int_{-t}^{0} \mathcal{H}_y^{(m)}(x) \mathcal{E}_y^{(m)}(x) dx = \frac{4\omega\sqrt{\mu\varepsilon_2}}{t\beta} \int_{-t}^{0} \sin^2 \frac{m\pi x}{t} dx = 2$$

и коэффициент связи достигает своего максимального значения

$$\varkappa \to {}^1/_2 n_2^3 k r E^{(0)}. \qquad (19.7.9)$$

Связь между модами описывается, таким образом, системой уравнений

$$\frac{dA_m}{dz} = -i\varkappa B_m \exp\left[-i(\beta_m^{TM} - \beta_m^{TE}) z\right],$$
$$\frac{dB_m}{dz} = -i\varkappa A_m \exp\left[i(\beta_m^{TM} - \beta_m^{TE}) z\right]. \qquad (19.7.10)$$

Второе уравнение (19.7.10) можно получить либо так же, как и первое, либо, как в [12], исходя из закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dz}(|A_m|^2 + |B_m|^2) = 0,$$

которому удовлетворяет написанное выше выражение для dB_m/dz.

При условии фазового синхронизма $\beta_m^{TM} = \beta_m^{TE}$ решение (19.7.10), удовлетворяющее граничным условиям $B_m(0) = B_0$, $A_m(0) = 0$, есть

$$B_m = B_0 \cos \varkappa z, \quad A_m = -iB_0 \sin \varkappa z. \tag{19.7.11}$$

Используя (19.7.9), можно показать, что в этом случае величина произведения поля на длину $(E^{(0)}L)$, необходимая для полной трансформации энергии из ТМ- в ТЕ-волну на заданной длине, совпадает с величиной, обеспечивающей переход объемного модулятора, изображенного на рис. 14.4, из открытого состояния в запертое. В общем же случае коэффициент связи $\varkappa$ меньше величины, которую дает (19.7.9), и для достижения полной трансформации требуется большее значение $E^{(0)}L$.

Если $\beta_m^{TM} \neq \beta_m^{TE}$, то решение (19.7.10), удовлетворяющее граничным условиям $B_m(0) = B_0$, $A_m(0) = 0$, есть

$$A(z) = -iB_0 e^{-i\delta z} \frac{\varkappa}{(\varkappa^2 + \delta^2)^{1/2}} \sin [(\varkappa^2 + \delta^2)^{1/2} z], \tag{19.7.12}$$

$$B(z) = B_0 e^{i\delta z} \left\{ \cos [(\varkappa^2 + \delta^2)^{1/2} z] - i \frac{\delta}{(\varkappa^2 + \delta^2)^{1/2}} \sin [(\varkappa^2 + \delta^2)^{1/2} z] \right\},$$

где

$$2\delta = \beta_m^{TM} - \beta_m^{TE}. \tag{19.7.13}$$

В отличие от случая фазового синхронизма (19.7.11) максимальная мощность, которая может быть передана от волны B волне A, составляет

$$\mathcal{P}_{max} = \varkappa^2/(\varkappa^2 + \delta^2) \tag{19.7.14}$$

и оказывается незначительной, если $\delta \gg \varkappa$. Графики, характеризующие поведение мощностей мод при фазовом синхронизме ($\delta = 0$) и в его отсутствие ($\delta \neq 0$) приведены на рис. 19.14.

Заметим, что, осуществляя периодическое изменение $E^{(0)}(z)$ или $r(z)$ с периодом $2\pi/(\beta_m^{TE} - \beta_m^{TM})$, можно согласно (19.7.7) нейтрализовать фактор отклонения от синхронизма $\exp[-i(\beta_m^{TE} - \beta_m^{TM})z]$ в (19.7.10) и снова вернуться к синхронному режиму.

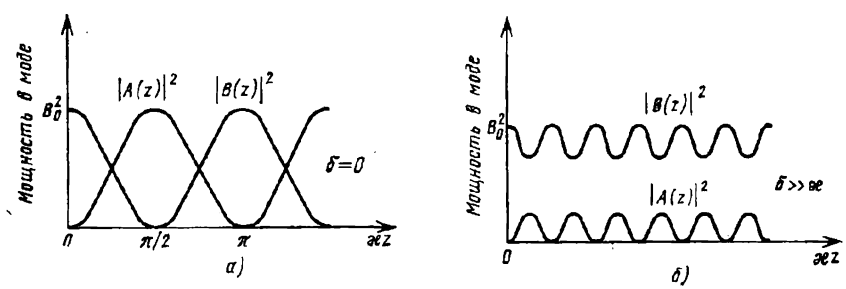


Рис. 19.14. Обмен мощностью между связанными волнами:
а — при фазовом синхронизме $(\beta_m^{TM} = \beta_m^{TE})$; *б* — в отсутствие синхронизма $(\beta_m^{TM} \neq \beta_m^{TE})$

Пример.

Тонкопленочный модулятор на GaAs. Для оценки порядка величины связи рассмотрим модулятор, направляющий слой которого состоит из GaAs, и будем считать $\lambda = 1$ мкм. В этом случае (см. табл. 14.2) $n_2 = 3{,}5$, $n_2^3 r = 59 \cdot 10^{-12}$ м/В. Используя поля с напряженностью $E^{(0)} = 10^6$ В/м, получим из (19.7.9) значения $\varkappa = 1{,}85$ см$^{-1}$ для коэффициента связи, $L = \pi/2\varkappa = 0{,}85$ см для длины полной трансформации.

19.8. Моды «возмущенного» волновода. Магнитооптическая связь

В § 19.7 мы рассмотрели в приближении связанных мод диэлектрический волновод, содержащий электрооптическую среду. Связь между собственными TE- и TM-волнами выражается системой уравнений (19.7.10). Развитая выше теория может быть использована для изучения большого числа других физических ситуаций. Во всех случаях TE-волна порождает P_x поляризацию, которая возбуждает TM-волну, в то время как TM-волна порождает P_y поляризацию, которая возбуждает [как в (19.3.9)] TE-волну. Для координатной системы, используемой на рис. 19.1, связь между TE- и TM-волнами может осуществляться, если $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \neq 0$. Помимо электрооптической связи волны связываются:

а) если ось волновода не параллельна главной диэлектрической оси анизотропного кристалла;

б) при наличии акустической волны в надлежащим образом ориентированной фотоупругой волноводной среде [12, 13];

в) если среда волновода обладает магнитооптическими свойствами [20].

Все перечисленные случаи охватываются уравнениями (19.7.10). Если на входе в волновод при $z = 0$ существует только одна (TE или TM) волна, то обмен энергией между волнами осуществляется согласно (19.7.11), (19.7.12). С другой стороны, нам могут понадобиться собственные моды «возмущенного» волновода. Говоря о собственной моде, мы имеем в виду такое распределение поля $f(x) \exp[i(\omega t - \beta z)]$, которое реализуется при наличии возмущения и не зависит от координаты z, за исключением фазового множителя. Такие моды можно получить, решая уравнения Максвелла непосредственно для волновода, изготовленного из анизотропного диэлектрика.

Наиболее простая процедура получения собственных мод возмущенного волновода может быть применена, если задача поставлена в форме, приводящей к уравнениям типа (19.7.10):

$$\frac{dA}{dz} = \varkappa B \exp(-i2\delta z),$$
$$\frac{dB}{dz} = -\varkappa^* A \exp(i2\delta z), \tag{19.8.1}$$

$$\delta = {}^1/_2 (\beta_a - \beta_b), \tag{19.8.2}$$

где A и B — амплитуды нормальных волн невозмущенного волновода. Поля в отсутствие связи имеют следующий вид:

$$a(x, z, t) \sim A(z)\,\mathscr{E}_y^{(m)}(x)\exp[i(\omega t - \beta_a z)],$$
$$b(x, z, t) \sim B(z)\,\mathscr{H}_y^{(l)}(x)\exp[i(\omega t - \beta_b z)] \qquad (19.8.3)$$

и могут ассоциироваться, например, с ТЕ- и ТМ-модами, соответственно.

Наша задача заключается в нахождении таких линейных комбинаций $A(z)$ и $B(z)$, которые, за исключением фазового множителя, не зависят от z. Будучи однажды возбужденной, такая линейная комбинация распространяется не изменяясь, что соответствует приведенному определению собственной моды.

Определим вектор-столбец $\tilde{\mathbf{E}}(z)$ как

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \begin{vmatrix} B(z)\exp(-i\beta_b z) \\ A(z)\exp(-i\beta_a z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{vmatrix}. \qquad (19.8.4)$$

Уравнение для $\tilde{\mathbf{E}}(z)$ следует из (19.8.1) и (19.8.2)

$$\frac{d\tilde{E}}{dz} = \tilde{\tilde{C}}\tilde{E}, \qquad (19.8.5)$$

где

$$\tilde{\tilde{C}} = \begin{vmatrix} -i\beta_b & -\varkappa^* \\ \varkappa & -i\beta_a \end{vmatrix}. \qquad (19.8.6)$$

Собственной моде по определению соответствует решение

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \tilde{\mathbf{E}}(0)\exp(i\gamma z) = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix}\exp(i\gamma z),$$

подстановка которого в (19.8.5) приводит к двум однородным уравнениям для E_1 и E_2:

$$-i(\beta_b + \gamma)E_1 - \varkappa^* E_2 = 0, \quad \varkappa E_1 - i(\beta_a + \gamma)E_2 = 0. \qquad (19.8.7)$$

Система (19.8.7) обладает нетривиальным решением, если детерминант ее обращается в нуль. Корнями характеристического уравнения являются

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{2}(\beta_a + \beta_b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_a - \beta_b)^2 + 4\varkappa^2} = -\bar{\beta} \pm S, \qquad (19.8.8)$$

где введены обозначения

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2}(\beta_a + \beta_b); \quad S = \sqrt{\delta^2 + \varkappa^2}; \quad \varkappa^2 = \varkappa\varkappa^*; \quad \delta = \frac{1}{2}(\beta_a - \beta_b). \qquad (19.8.9)$$

Соответствующие собственные векторы находятся подстановкой (19.8.8) в (19.8.7):

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{vmatrix} \frac{i\varkappa^*}{\delta+S} \\ 1 \end{vmatrix} \exp[-i(\bar{\beta}-S)z], \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = \begin{vmatrix} \frac{i\varkappa^*}{\delta-S} \\ 1 \end{vmatrix} \exp[-i(\bar{\beta}+S)z]. \tag{19.8.10}$$

Отметим, что $\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^*$ и $\tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^*$ — это мощности мод и $\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^* = 0$. Компоненты $i\varkappa^*/(\delta \pm S)$ и 1 каждого собственного вектора — это нормированные амплитуды TE- и TM-компонент каждой моды. Распределение мощностей между двумя поляризациями характеризуется величиной их отношения $\varkappa^2/(\delta \pm S)^2$. В пределе при $\varkappa/\delta \to 0$ величина $\tilde{\mathbf{E}}_1$ и $\tilde{\mathbf{E}}_2$ имеют вид

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 \to \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} e^{-i\beta_a z}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} e^{-i\beta_b z}$$

с точностью до постоянного множителя и собственные векторы соответствуют несвязанным TE- и TM-модам. Другим важным следствием является то, что при $\delta = 0$ мы имеем $S = \varkappa$ и независимо от $\varkappa$ мощность распределяется поровну между обеими поляризациями.

В качестве примера применим (19.8.10) к магнитооптической связи волн [20].

Если направление вектора намагниченности совпадает с осью z, то для главных диэлектрических осей, ориентированных, как показано на рис. 19.1, диэлектрический тензор имеет вид [21]

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \varepsilon_x & -i\alpha & 0 \\ i\alpha & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix}, \tag{19.8.11}$$

где α — действительная величина, пропорциональная намагниченности M_z. Возмущенная поляризация, связывающая TE- и TM-моды, обусловлена недиагональными членами в (19.8.11), поэтому

$$(P_{\text{возм}})_i = \begin{cases} \varepsilon_{ij} E_j & (i \neq j), \\ 0 & (i = j), \end{cases} \tag{19.8.12}$$

так что TM-волна с электрическим полем $\frac{1}{2}E_x^{(\omega)} \exp[i(\omega t - \beta^{\text{TM}} z)] +$ + к. с. будет наводить поляризацию

$$(P_{\text{возм}})_y = i\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0 E_x^{(\omega)} \exp[-i(\omega t - \beta^{\text{TM}} z)] + \text{к. с.} \tag{19.8.13}$$

Выражая $E_x^{(\omega)}$ в последнем уравнении через $B_l \mathcal{H}_y^{(l)}(x)$ с помощью (19.2.9) и подставляя результат в (19.3.9), находим

$$\frac{dA}{dz} = \frac{\beta^{\text{TM}} B}{4\varepsilon/\varepsilon_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_y^{(l)}(x)\, \mathcal{E}_y^{(m)}(x)\, \alpha(x, z)\, dx \right] \exp[i(\beta^{\text{TE}} - \beta^{\text{TM}})z], \tag{19.8.14}$$

где A — амплитуда нормальной TE_m-волны, а B — амплитуда нормальной TM_l-волны. Недиагональный элемент α записан в виде некоторой функции от x и z. Определяя

$$\varkappa = \frac{\beta^{TM}}{4\varepsilon/\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_y^{(l)}(x)\, \mathcal{E}_y^{(m)}(x)\, \alpha(x, z)\, dx, \qquad (19.8.15)$$

приходим к уравнениям связанных мод

$$\frac{dA}{dz} = \varkappa B \exp(i2\delta z), \quad \frac{dB}{dz} = -\varkappa A \exp(-i2\delta z), \qquad (19.8.16)$$

$$2\delta = \beta^{TE} - \beta^{TM}.$$

Решение (19.8.16) соответствует волнам, распространяющимся в одном направлении, и совпадает с (19.7.12).

Вычислим в качестве примера величину $\varkappa$ для парамагнитного направляющего слоя; обе связанные волны имеют одинаковые индексы ($l = m$), а частота далека от критической. Для парамагнитных сред элемент α пропорционален приложенному магнитному полю H_z [21]

$$\alpha = \lambda n V H_z/\pi, \qquad (19.8.17)$$

где V — константа Верде. С целью выделения чисто магнитного эффекта полагаем $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \delta\varepsilon_z = \varepsilon_0 n^2$. Для частот, лежащих значительно выше критической, можно воспользоваться теми же приближениями, что и в предыдущем параграфе, и вычислить интеграл, который в (19.8.14) выделен квадратными скобками:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_y^{(l)}(x)\, \mathcal{E}_y^{(l)}(x)\, \alpha(x, z)\, dx \approx \alpha \int_{-t}^{0} \mathcal{H}_y^{(l)}\, \mathcal{E}_y^{(l)}\, dx = 2\alpha.$$

Подставляя этот результат в (19.8.5), получаем

$$\varkappa = \pi\alpha/n\lambda = V H_z. \qquad (19.8.18)$$

Если в волновод поступает волна TM-типа, то в случае фазового синхронизма ($\delta = 0$) решение (19.8.16) имеет вид

$$A = B_0 \sin \varkappa z, \quad B = B_0 \cos \varkappa z, \qquad (19.8.19)$$

так что мощность на выходе ($z = L$), пропускаемая поляроидом, ориентированным перпендикулярно плоскости поляризации падающей волны, равна

$$|A|^2 = B_0^2 \sin^2 \varkappa L = B_0^2 \sin^2 (V H_z L) \qquad (19.8.20)$$

и может регулироваться изменением H_z. Этот результат лежит в основе магнитооптической модуляции [20]. Выражение (19.8.20), полученное в предельном случае высоких частот, применимо также для объемных модуляторов, поскольку энергия мод локализована внутри магнитооптического направляющего слоя.

Воспользуемся теперь системой (19.8.10) для нахождения собственных мод магнитооптического волновода. Возьмем $\varkappa = V H_z$ и

предположим, что $\varkappa \gg \delta$ (случай $\varkappa < \delta$ рассмотрен в задаче 19.4). Две собственные моды

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(z) = \begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix} \exp[-i(\bar{\beta} - \mathrm{V}H_z)z],$$
$$\tilde{\mathbf{E}}_2(z) = \begin{vmatrix} -i \\ 1 \end{vmatrix} \exp[-i(\bar{\beta} + \mathrm{V}H_z)z] \qquad (19.8.21)$$

соответствуют двум циркулярно-поляризованным в противоположных направлениях волнам. Если на вход подается линейно-поляризованная волна, то на расстоянии z плоскость поляризации вследствие фарадеевского вращения окажется повернутой на угол [21]

$$\theta(z) = \mathrm{V}H_z z. \qquad (19.8.22)$$

Оба способа описания распространения волн в возмущенном волноводе (19.8.19) и (19.8.21) эквивалентны. Выбор того или иного — вопрос удобства и обычно зависит от граничных условий при $z = 0$.

19.9. Волноводы с утечкой

В § 19.1 мы выявили свойства ТЕ и ТМ-волн в тонких диэлектрических волноводах. Было найдено необходимое условие существования волноводных мод, которое состоит в том, что показатель преломления внутреннего слоя n_2 (рис. 19.1) удовлетворяет соотношению

$$n_3 < n_2 > n_1. \qquad (19.9.1)$$

Если (19.9.1) не выполняется, то интенсивность поля экспоненциально увеличивается с расстоянием x в средах *1* или *2* или в каждой из них. Распространение волны в таком волноводе сопровождается потерей мощности за счет «утечки» в волны континуума, и волна затухает вдоль направления распространения z.

Различными исследователями [22] было обнаружено, что эти потери при определенных условиях могут быть достаточно малыми и допустимыми в применении к лазерам [23]. За последнее время опубликовано несколько работ [24—26], в которых сообщается о создании так называемых «волноводных лазеров», использующих волноводы с «утечкой».

Далее мы опишем свойства ТЕ-мод, в частности, найдем величину их потерь в таких волноводах.

Используемая волноводная модель представлена на рис. 19.15. Рассмотрим случай $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ($\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_i^2$). Будем искать поле ТЕ-моды в двумерном ($\partial/\partial y = 0$) волноводе в виде:

область I

$$E_y = A \exp[i(h_1 x + \gamma z - \omega t) \text{ при } x \geqslant t;$$

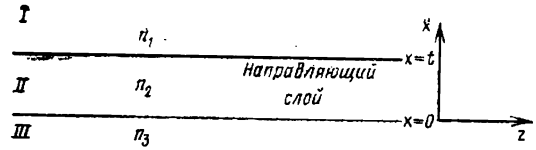


Рис. 19.15. Волновод с «утечкой» ($\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$)

область II

$$E_y = [B \cos(h_2 x) + C \sin(h_2 x)] \exp[i(\gamma z - \omega t)] \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant t; \tag{19.9.2}$$

область III

$$E_y = D \exp[i(-h_3 x + \gamma z - \omega t)] \text{ при } x \leqslant 0.$$

Волновое уравнение (19.1.1) может быть записано как

$$\left(\gamma^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E_y + k_i^2 E_y = 0, \tag{19.9.3}$$

где $k_i^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_i = k^2 n_i^2$; $k = 2\pi/\lambda$; $i = 1, 2, 3$.

Подстановка (19.9.2) в (19.9.3) дает

$$h_1^2 = k_2^2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \gamma^2, \quad h_2^2 = k_2^2 - \gamma^2, \quad h_3^2 = k_2^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} - \gamma^2. \tag{19.9.4}$$

Сшивание E_y и $\partial E_y/\partial x$ на границах $x = 0$ и $x = t$ приводит к системе уравнений относительно коэффициентов A, B, C, D

$$\begin{gathered} A \exp(ih_1 t) - B \cos(h_2 t) - C \sin(h_2 t) = 0, \\ Ah_1 \exp(ih_1 t) - iBh_2 \sin(h_2 t) + iCh_2 \cos(h_2 t) = 0, \\ B - D = 0, \quad ih_2 C - h_3 D = 0, \end{gathered} \tag{19.9.5}$$

приравнивание детерминанта которой к нулю дает

$$\operatorname{tg}(h_2 t) = -i(h_1 h_2 + h_2 h_3)/(h_2^2 + h_1 h_3). \tag{19.9.6}$$

Отметим, что характеристическое уравнение (19.9.6) может быть получено непосредственно из (19.2.5) подстановкой $q \to -ih_1$, $h \to h_2$, $p \to -ih_3$. Это соответствие между двумя системами постоянных распространения следует из сравнения вида решения для направляемых волн (19.2.3) и для «вытекающих» (излучательных) волн (19.9.2).

Уравнение (19.9.6) решается совместно с (19.9.4) относительно h_1, h_2, h_3 и γ. Найдем приближенное решение для «широкого» ($k_2 \gg h_2$) волновода. Из второго соотношения (19.9.4) следует

$$\gamma \to k_2, \quad h_1 \approx ik_2 (1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2)^{1/2}, \quad h_3 \approx k_2 (\varepsilon_3/\varepsilon_2 - 1)^{1/2}, \tag{19.9.7}$$

так что h_3, $h_1 \gg h_2$. Поэтому можем аппроксимировать (19.9.6) следующим образом:

$$h_2 t = \operatorname{arctg}[i(-h_2/h_1 - h_2/h_3)] + m\pi \approx$$

$$\approx \operatorname{arctg}\left\{i\left[-\frac{h_2}{ik_2(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2)^{1/2}} - \frac{h_2}{k_2(\varepsilon_3/\varepsilon_2-1)^{1/2}}\right]\right\} + m\pi \approx$$

$$\approx \operatorname{arctg}(-h_2 f_2/k_2 - ih_2 f_3/k_2) + m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (19.9.8)$$

Здесь

$$f_2 = (1-\varepsilon_1/\varepsilon_2)^{-1/2};\ f_3 = (\varepsilon_3/\varepsilon_2 - 1)^{-1/2} = (n_3^2/n_2^2 - 1)^{-1/2}$$

и поскольку f_2 и f_3 есть 0 (1) и $k_2 \gg h_2$, то (19.9.8) можно переписать в виде

$$h_2 t\,(1 + f_2/k_2 t + if_3/k_2 t) = m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$h_2 t \approx m\pi\,[1 - f_2/k_2 t - if_3/k_2 t]. \qquad (19.9.9)$$

Подстановка (19.9.9) во второе уравнение (19.9.4) дает

$$\gamma_{TE} = k_2[(1 - m^2\pi^2/2k_2^2 t^2)(1 - 2f_2/k_2 t)] + (im^2\pi^2 f_3/k_2^2 t^3). \qquad (19.9.10)$$

Таким образом, декремент затухания равен

$$\alpha_{TE} = 2\operatorname{Im}\gamma_{TE} = 2k_2 m^2\pi^2 f_3/(k_2 t)^3, \text{ где } m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (19.9.11)$$

и для $\Delta n = (n_3 - n_2) \ll n_2,\ n_3$

$$\alpha_{TE} \approx \frac{m^2}{2\lambda\,(t/\lambda)^3\, n_2^2 \sqrt{2\Delta n/n_2}} \qquad (19.9.12)$$

Итак, мы нашли, что декремент затухания уменьшается пропорционально t^{-3}. Некоторые типичные значения декремента затухания α_{TE} при $n = 1$, $n_2 = 3{,}3$, $\Delta n = 0{,}1$ и $\lambda = 0{,}8$ мкм приведены в следующей таблице:

t, мкм	0,8	2,4	4	6,4	8	10,4	50
α_{TE}, см$^{-1}$	2331	86	18	4,6	2,33	1,00	$8{,}5\cdot10^{-3}$

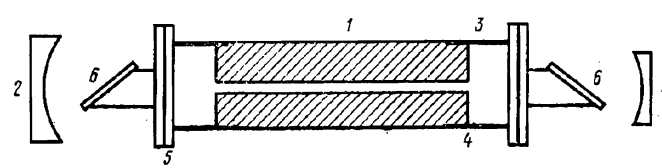


Рис. 19.16. Конструкция лазера на CO_2 с капиллярным каналом в BeO [26]:
1 — труба из Beo; *2* — зеркала; *3* — электроды из ковара; *4* — металлокерамическая изоляция; *5* — металлический вакуумный фланец; *6* — окна из CdTe

Таким образом, при $t > 10\lambda$ имеем $\alpha_{TE}\lambda \sim 10^{-4}$. Такие потери легко могут быть скомпенсированы усилением в большинстве лазерных сред [24, 26]. Волноводный лазер на CO_2 ($\lambda = 10{,}6$ мкм), работающий на описанных выше «вытекающих» волнах, схематически изображен на рис. 19.16. Волноводный эффект достигается в капиллярной трубке из BeO.

Задачи

19.1. Выведите формулу (19.2.7).

19.2. Покажите, что уравнения связанных волн (19.7.10) согласуются с законом сохранения энергии.

19.3. Выведите соотношения (19.7.12).

19.4. Рассмотрите возможность создания волноводного магнитооптического модулятора, основанного на преобразовании волн TE→TM. Параметр рассинхронизма δ достаточно велик ($\delta \gtrsim \varkappa$, так что необходимы дополнительные меры для выполнения фазового синхронизма. Используя (19.8.16)—(19.8.18), выясните, может ли фазовый синхронизм быть достигнут за счет периодической пространственной (по z) модуляции магнитного поля H_z. Какова требуемая величина периода? Сравните Ваши результаты с решением, полученным в [20].

19.5. Получите выражение для мощности, затрачиваемой в поперечном электрооптическом волноводном модуляторе длиной L с поперечным сечением $2\lambda \times 2\lambda$ (λ — длина волны в свободном пространстве). Сравните его с результатом, полученным в [9, с. 325] для объемного модулятора. Оцените мощность, требуемую для $LiNbO_3$ модулятора при $\lambda = 1$ мкм, $L = 5$ мм.

19.6. Выведите условие генерации лазера с распределенной обратной связью в случае возмущения показателя усиления ($\gamma_1 \neq 0$, $n_1 = 0$). Сравните с результатом, полученным в [17].

19.7. Вычислите пороговое значение показателя усиления в лазере на GaAs с распределенной обратной связью без потерь при следующих значениях параметров: $n_1 = 1$; $n_2 = 3{,}5$, $n_3 = 3{,}4$, $t = 3$ мкм; $a = 50$ нм, $\lambda = 0{,}85$ мкм; $L = 100, 300, 500$ мкм. Постройте график зависимости порогового значения показателя усиления от длины L.

19.8. Найдите постоянную распространения γ TM-волны в волноводе с утечкой, изображенном на рис. 19.15.

19.9. Используя формальное сходство между одномерным уравнением Шредингера и волновым уравнением (19.1.3), докажите, что, как и в (1.2.5), $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y^{(l)}(x)\,\mathcal{E}_y^{(m)}(x)\,dx = 0$, если $l \neq m$.

Указание: сходство между двумя дифференциальным и уравнениями можно установить, если воспользоваться решением в виде (19.2.2).

Приложение 1

СПОНТАННОЕ ВРЕМЯ ЖИЗНИ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ЛИНЕЙНОЙ МОЛЕКУЛЫ

Знание спонтанного времени жизни необходимо при вычислении вероятности индуцированного перехода (8.3.10) или, что то же, усиления (поглощения) среды при заданном распределении населенностей (8.4.4).

С целью упрощения математических выкладок рассмотрим линейную молекулу. Если ориентация оси молекулы задана углами θ, φ, уравнение Шредингера следует записать в сферической системе координат:

$$-\frac{\hbar}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]u+V(r)\,u=Eu, \qquad (\text{П}.1.1)$$

где m — приведенная масса, r — колебательная координата; $V(r)$ — полная потенциальная энергия, включая энергию электронов в основном состоянии [1]. Координаты электронов обозначим через $\mathbf{r}_e$.

Полагая, что волновая функция электрона мгновенно реагирует на изменение колебательной координаты r, представим собственные функции в виде

$$u(\mathbf{r}_e, r, \theta, \varphi)=u_r(\mathbf{r}_e)\,u_v(r)\,N_{Jm}\,P_J^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}. \qquad (\text{П}.1.2)$$

Решение $u_v(r)$ зависит от вида потенциальной функции $V(r)$ и в дальнейшем предполагается известным.

Чтобы найти спонтанное время жизни для перехода $|v=2,\ J,\ m\rangle \to |v=1,\ J',\ m'\rangle$, поступим так же, как в § 8.3. Предположим, что электрическая составляющая электромагнитного поля имеет только z-составляющую, так что дипольное взаимодействие описывается гамильтонианом возмущения, подобным (8.3.1):

$$\mathscr{H}'=-\mu_z E_z=-\mu(r)\cos\theta\,E_z, \qquad (\text{П}.1.3)$$

где $\boldsymbol{\mu}(r)=\mathbf{a}_{\theta,\varphi}\,\mu(r)=e\int|u_r(\mathbf{r}_e)|^2\,\mathbf{r}_e d^3\mathbf{r}_e$; $\mathbf{a}_{\theta,\varphi}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии молекулы.

Разложим дипольный момент в ряд Тейлора:

$$\mu(r)=\mu_0+e'r+b_1r^2+\ldots \qquad (\text{П}.1.4)$$

Ограничиваясь случаем, когда постоянный дипольный момент отсутствует, т. е. $\mu_0=0$, и пренебрегая членами, содержащими r более чем в первой степени, имеем

$$\mathscr{H}'=-e'rE_z\cos\theta, \qquad (\text{П}.1.5)$$

полагая, что диполь ориентирован в направлении (θ, φ). Здесь e' — эффективный заряд, определяемый по формуле (П.1.4).

Сравнение (П.1.5) и (8.3.1) показывает, что можно воспользоваться результатами гл. 8, если заменить ey на $e'r\cos\theta$.

Таким образом из (8.3.7) следует

$$W_{\substack{\text{спонт}\\2,\,J,\,m\to1,\,J',\,m'}}=\frac{n^3e'^2\omega^3}{\varepsilon\pi\hbar c^3}\,|\langle 2Jm|\,r\cos\theta\,|1J'm'\rangle|^2. \qquad (\text{П}.1.6)$$

Вычислим матричный элемент. Пользуясь (П.1.1) и выражением

$$N_{Jm}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(2J+1)\,(J-|m|)\,!}{(J+|m|)!}\right]^{1/2}, \qquad (\text{П}.1.7)$$

получаем

$$r_z = \langle 2Jm \mid r\cos\theta \mid 1J'\,m' \rangle = \int_0^\infty u_2^*(r)\,u_1(r)\,rdr \times$$

$$\times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} N_{Jm} N_{J',m'} P_J^m P_{J'}^{m'}(\theta)\, e^{-i(m-m')\varphi} \cos\theta \sin\theta d\theta\, d\varphi .$$

Пользуясь (П.1.7) и замечая, что интеграл отличен от нуля лишь при $m' = m$, имеем

$$r_z = f_{12}\left[\frac{(2J+1)(J-|m|)!}{(J+|m|)!}\right]^{1/2}\left[\frac{(2J'+1)(J'-|m|)!}{(J'+|m|)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} v P_J^m(v) P_{J'}^m(v)\, dv , \qquad (П.1.8)$$

где $v = \cos\theta$ и

$$f_{12} = \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty u_2^*(r)\,u_1(r)\,rdr. \qquad (П.1.9)$$

Обратившись к соотношениям

$$vP_J^m(v) = \frac{1}{2J+1}\left[(J-|m|+1)P_{J+1}^m + (J+|m|)P_{J-1}^m\right], \qquad (П.1.10)$$

$$\int_{-1}^{1} P_K^m(v) P_J^m(v)\, dv = 2\delta_{KJ}\frac{(J+|m|)!}{(2J+1)(J-|m|)!} , \qquad (П.1.11)$$

находим, что интеграл в (П.1.8) отличен от нуля в двух случаях: $J' = J+1$ (P переход) или $J' = J-1$ (R переход).

Для определенности рассмотрим $J' = J+1$ и после очевидных, но громоздких преобразований приходим к уравнению

$$\frac{r_z}{2f_{12}} = \frac{(J-|m|+1)^{1/2}(J+|m|+1)^{1/2}}{(2J+1)^{1/2}(2J+3)^{1/2}}. \qquad (П.1.12)$$

Обсудим исходное предположение о том, что вначале молекула находилась в состоянии $|2, J, m\rangle$. Так как имеется $2J+1$ вырожденных состояний с $m = J, J-1, \ldots, -J$, данная молекула с равной вероятностью может находиться в любом из них. Поэтому следует усреднить квадрат абсолютного значения величины (П.1.12) по $2J+1$ возможным m-состояниям

$$\frac{\overline{r_z^2}}{4f_{12}^2} = \frac{1}{(2J+1)^2(2J+3)}\sum_{m=-J}^{J}[(J+1)^2 - m^2]. \qquad (П.1.13)$$

Пользуясь соотношением $\sum_{m=1}^{J} m^2 = \frac{1}{6}J(J+1)(2J+1)$, находим, что сумма в (П.1.13) равна $1/3(2J+1)(J+1)(2J+3)$, поэтому

$$\frac{\overline{r_z^2}}{4f_{12}^2} = \frac{1}{3}\frac{J+1}{2J+1} \text{ при } J \to J+1, \quad \frac{\overline{r_z^2}}{4f_{12}^2} = \frac{1}{3}\frac{J}{3J+1} \text{ при } J \to J-1. \qquad (П.1.14)$$

Подстановка (П.1.14) в (П.1.6) дает

$$W^{\text{спонт}}_{2,J\to 1,J\pm 1} = \frac{8n^3 e'^2 f_{12}^2 \omega^3}{6\pi\varepsilon\hbar c^3} \frac{(J+{}^1/_2 \pm {}^1/_2)}{(2J+1)} = \frac{32\pi^2 n^3 e'^2 f_{12}^2}{3\varepsilon\hbar\lambda^3} \frac{(J+{}^1/_2 \pm {}^1/_2)}{(2J+1)}, \tag{П.1.15}$$

что совпадает с (10.6.8).

Приложение 2

КВАНТОВЫЙ ВЫВОД НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

В § 16.3 изложен классический вывод нелинейных оптических констант d_{ijk}, связывающих согласно (16.1.4) амплитуду поляризации среды на частоте $\omega_j \pm \omega_k$ с произведением амплитуд поля $E_j E_k$. Ниже дан квантовомеханический вывод этих выражений.

Воспользуемся введенным в гл. 3 формализмом матрицы плотности ρ_{ij}, изменение которой во времени описывается уравнением (3.8.5). Его нужно обобщить с тем, чтобы учесть эффект столкновений.

Карплюс и Швингер [1] показали, что после введения времени «соударений» Γ^{-1} уравнение (3.8.5) принимает вид

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}}, \hat{\rho}] - \Gamma(\hat{\rho} - \hat{\bar{\rho}}), \tag{П.2.1}$$

где $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{V}(t)$, а

$$\hat{\bar{\rho}} = \exp(-\hat{\mathscr{H}}_0/kT)/\mathrm{Sp}[\exp(-\hat{\mathscr{H}}_0/kT)] \tag{П.2.2}$$

— матрица плотности системы, находящейся в термодинамическом равновесии. Из (П.2.2) следует, что матрица $\hat{\bar{\rho}}$ диагональна в $\mathscr{H}_0$-представлении.

Чтобы учесть возможное различие в скоростях релаксации диагональных и недиагональных матричных элементов (см. § 8.1), видоизменим (П.2.1)

$$\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}}, \hat{\rho}]_{ij} - \gamma_{ij}(\hat{\rho} - \hat{\bar{\rho}})_{ij}. \tag{П.2.3}$$

Здесь γ_{ii} — скорость релаксации населенности i-го уровня, тогда как γ_{ij} — скорость, с которой элемент ρ_{ij} $(i \neq j)$ релаксирует к нулю.

Записывая гамильтониан в виде $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + V(t)$, где $V(t)$ — возмущение, выберем представление, в котором $(\hat{\mathscr{H}}_0)_{ij} = \mathscr{E}_i \delta_{ji}$, и, определяя $\omega_{ij} = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_j)/\hbar$, запишем (П.2.3) в виде

$$\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial t} = -i\omega_{ij}\rho_{ij} - \frac{i}{\hbar}[\hat{V}, \hat{\rho}]_{ij} - \gamma_{ij}(\hat{\rho} - \hat{\bar{\rho}})_{ij}. \tag{П.2.4}$$

Найдем решение для $\hat{\rho}$ в виде интеграла от возмущения. Введем, как и в § 3.5, параметр «включения» λ и заменим V в (П.2.4) на λV. Тогда матрица плотности разлагается в ряд по степеням λ

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}^{(0)} + \lambda\rho_{ij}^{(1)} + \lambda^2\rho_{ij}^{(2)} + \dots . \tag{П.2.5}$$

Формальная процедура заключается в решении уравнения для ρ итерациями до желаемого порядка и приравнивании $\lambda = 1$ в результате. Подставляем (П.2.5) в (П.2.4), заменяем V на λV и после приравнивания коэффициен-

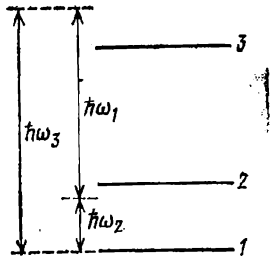


Рис. П.2.1. Энергетические уровни атомов и энергии квантов, фигурирующие при вычислении нелинейной поляризации

тов при одинаковых степенях λ находим $\rho_{ij}^{(0)} = \bar{\rho}_{ii}\delta_{ij}$ и получаем цепочку уравнений

$$\frac{\partial \rho_{ij}^{(n)}}{\partial t} = -(i\omega_{ij} + \gamma_{ij})\,\rho_{ij}^{(n)} - \frac{i}{\hbar}\,[V,\ \rho^{(n-1)}]_{ij},$$

решение которых

$$\rho_{ij}^{(n)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{(i\omega_{ij} - \gamma_{ij})(t'-t)}\,[V(t'),\ \rho^{(n-1)}(t')]_{ij}\,dt'. \qquad (\text{П.2.6})$$

Хотя этот результат получен чисто формально, он является одним из наиболее важных в теории взаимодействия атомов с излучением [2]. Применим его к вычислению нелинейной поляризации на частоте $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$, возникающей при смещении полей $E_3 \exp(i\omega_3 t)$ и $E_2 \exp(i\omega_2 t)$ в среде, энергетический спектр которой изображен на рис. П.2.1.

Предположим, что энергии фотонов $\hbar\omega_2$ и $\hbar\omega_3$ близки к энергиям переходов $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1$ соответственно, и учтем при анализе только те члены, знаменатель которых почти равен нулю (т. е. резонансные члены). Предполагая взаимодействие дипольным ($V = -\mu\mathbf{E}(t)$, где μ — оператор дипольного момента, $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = 0$) и представляя поле в виде

$$E(t) = (E_3/2)\exp(i\omega_3 t) + (E_2/2)\exp(i\omega_2 t) + \text{к. с.}, \qquad (\text{П.2.7})$$

имеем

$$V = \begin{vmatrix} 0 & \left(-\mu_{12}\dfrac{E_2}{2}e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.}\right) & \\ \left(-\mu_{12}\dfrac{E_2}{2}e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.}\right) & 0 & \cdots\to \\ \left(-\mu_{13}\dfrac{E_3}{2}e^{i\omega_3 t} + \text{к. с.}\right) & 0 & \\ & \left(-\mu_{13}\dfrac{E_3}{2}e^{i\omega_3 t} + \text{к. с.}\right) & \\ \leftarrow\cdots & 0 & \\ & 0 & \end{vmatrix}. \qquad (\text{П.2.8})$$

Поскольку нерезонансные члены опущены, в (П.2.8) оставлены только такие матричные элементы V_{ij}, в которых частота изменения поля близка к ω_{ij}.

Поляризация дается выражением

$$P_\alpha = N\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}\,\hat{\mu}_\alpha) = N\mathrm{Sp}\,[(\rho^{(0)}+\rho^{(1)}+\ldots),\,\mu_\alpha], \qquad (\text{П.2.9})$$

где N — плотность атомов; составляющая поляризации с частотой $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ обусловлена $\rho^{(2)}$. Так как $\rho^{(2)}$ выражается согласно (П.2.6) через $[V(t'), \rho^{(1)}(t')]$, требуемый смешанный член возникает из произведения, содержащего $V_{31}\exp(i\omega_3 t)\rho_{21}^{(1)}(t)$. Таким образом, прежде всего нужно найти $\rho_{21}^{(1)}(t)$.

Подставим (П.2.8) в (П.2.6), учитывая, что $\rho_{ij}^{(0)} = \bar{\rho}_{ii}\delta_{ij}$. Коммутатор $[V, \rho^{(0)}]$ имеет вид

$$[V,\,\rho^{(0)}] = \begin{vmatrix} 0 & V_{12}(\bar{\rho}_{22}-\bar{\rho}_{11}) & -\bar{\rho}_{11}V_{13} \\ V_{12}(\bar{\rho}_{11}-\bar{\rho}_{12}) & 0 & 0 \\ V_{13}\bar{\rho}_{11} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где предположено, что равновесной населенностью уровня 3 можно пренебречь, положив $\bar{\rho}_{33} = 0$. С помощью этого выражения из (П.2.6) находим

$$\rho_{12}^{(1)} = -\frac{i}{2\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{i(\omega_{12}-i\gamma_{12})(t'-t)}\left[-(\bar{\rho}_{22}-\bar{\rho}_{11})\mu_{12}E_2 e^{i\omega_2 t'} - (\bar{\rho}_{22}-\bar{\rho}_{11})\times\right.$$

$$\left.\times\mu_{12}E_2^* e^{-i\omega_2 t'}\right]dt'. \qquad (\text{П.2.10})$$

Поскольку $\omega_{12} \approx -\omega_2$, в квадратных скобках доминирующим является первый член и

$$\rho_{12}^{(1)} \approx \frac{i}{2\hbar}\frac{(\bar{\rho}_{22}-\bar{\rho}_{11})\mu_{12}E_2}{i(\omega_{12}+\omega_2-i\gamma_{12})}e^{i\omega_2 t} \equiv \rho_{12A}^{(1)}e^{i\omega_2 t}, \qquad (\text{П.2.11})$$

$$\rho_{21}^{(1)} = \rho_{12}^{(1)*}.$$

Есть еще два резонансных матричных элемента $\rho_{ij}^{(1)}$: $\rho_{13}^{(1)}$ и $\rho_{31}^{(1)} = \rho_{13}^{(1)*}$, причем

$$\rho_{13}^{(1)} = \frac{i}{2\hbar}\frac{\bar{\rho}_{11}\mu_{13}E_3}{[i(\omega_{13}+\omega_3)+\gamma_{13}]}e^{i\omega_3 t} \equiv \rho_{13A}^{(1)}e^{i\omega_3 t}. \qquad (\text{П.2.12})$$

Компонент поляризации вдоль направления α во втором порядке теории возмущений равен

$$P_\alpha^{(2)} = N\mathrm{Sp}\,(\rho^{(2)}\mu_\alpha). \qquad (\text{П.2.13})$$

Из (П.2.6) и виде $\rho_{ij}^{(1)}$ следует, что компонент поляризации $P^{(2)}$, осциллирующий с частотой $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$, равен

$$P_\alpha^{(2)} = \rho_{23}^{(2)}(\mu_\alpha)_{32} + \rho_{32}^{(2)}(\mu_\alpha)_{23}. \qquad (\text{П.2.14})$$

Часть матричного элемента $\rho_{23}^{(2)}$, меняющаяся с частотой ω_1, равна

$$\rho_{32}^{(2)} = -\frac{i}{2\hbar}e^{-i(\omega_{32}-i\gamma_{32})t}\int_{-\infty}^{t} e^{i(\omega_{32}-i\gamma_{32})t'}\left[-\rho_{12A}^{(1)}\mu_{13}E_3^*\right]e^{-i\omega_1 t'} +$$

$$+\rho_{31A}^{(1)}\mu_{12}E_2 e^{-i\omega_1 t'}\Big]dt' = \frac{i}{2\hbar}\left[\frac{\rho_{12}^{(1)}\mu_{13}E_3^*}{i(\omega_{32}-\omega_1-i\gamma_{32})} - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho_{31}^{(1)}\mu_{12}E_2}{i(\omega_{32}-\omega_1-i\gamma_{32})}\right]e^{i\omega_1 t}, \qquad (\text{П.2.15})$$

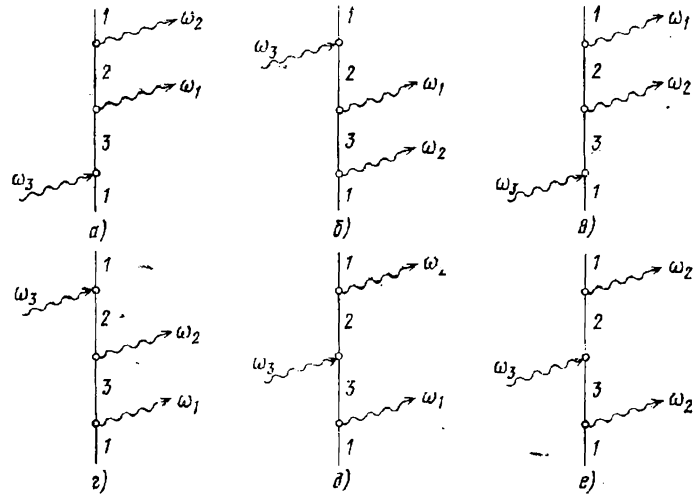


Рис. П.2.2. Фейнмановские диаграммы, сопоставляемые с шестью слагаемыми в выражении $d_{\alpha 32}^{\omega_1=\omega_3-\omega_2}$, т. е. с шестью возможными последовательностями взаимодействия атома с фотонами в процессе перехода $|1\rangle \to |3\rangle \to |2\rangle \to |1\rangle$ с поглощением фотона ω_3 и излучением фотонов ω_1 и ω_2. Поскольку $\omega_3=\omega_1+\omega_2$, энергия системы сохраняется. Амплитуды, соответствующие этим диаграммам, даются формулой (П.2.19).

или с учетом (П.2.11), (П.2.12)

$$\rho_{32}^{(2)}=\frac{1}{4\hbar^2}\left\{\frac{\bar{\rho}_{11}\,\mu_{12}\,\mu_{13}}{[-i(\omega_3-\omega_{31})+\gamma_{13}]\,[i(\omega_{32}-\omega_1)+\gamma_{32}]}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\bar{\rho}_{22}-\bar{\rho}_{11})\,\mu_{12}\,\mu_{13}}{[i(\omega_2-\omega_{21})+\gamma_{12}]\,[i(\omega_{32}-\omega_1)+\gamma_{32}]}\right\}E_3^*E_2e^{-i\omega_1 t}. \qquad (П.2.16)$$

Подставляя (П.2.16) в (П.2.14), получаем желаемый результат

$$P_\alpha^{(2)}=\frac{1}{4\hbar^2}\left\{\frac{N_1\,\mu_{12}\,\mu_{13}\,(\mu_\alpha)_{32}}{[\gamma_{13}+i(\omega_3-\omega_{31})]\,[\gamma_{32}-i(\omega_{32}-\omega_1)]}-\right.$$
$$\left.-\frac{(N_2-N_1)\,\mu_{12}\,\mu_{13}\,(\mu_\alpha)_{32}}{[\gamma_{12}-i(\omega_2-\omega_{21})]\,[\gamma_{32}-i(\omega_{32}-\omega_1)]}\right\}E_3E_2^*e^{i\omega_1 t}+\text{к. с.}, \qquad (П.2.17)$$

где $N_i = N\bar{\rho}_{ii}$ — плотность населенности уровня i. При получении формулы (П.2.17) учтено, что $\rho_{ij}^{(n)}=\rho_{ji}^{(n)*}$.

Используя определение (16.1.4) тензора нелинейной восприимчивости d, из (П.2.17) получаем

$$d_{\alpha 32}^{\omega_1=\omega_3-\omega_2}=\frac{1}{2\hbar^2}\left\{\frac{N_1\,\mu_{12}\,\mu_{13}\,(\mu_\alpha)_{32}}{[\gamma_{13}+i(\omega_3-\omega_{31})]\,[\gamma_{32}-i(\omega_{32}-\omega_1)]}-\right.$$
$$\left.-\frac{(N_2-N_1)\,\mu_{12}\,\mu_{13}\,(\mu_\alpha)_{32}}{[\gamma_{12}-i(\omega_2-\omega_{21})]\,[\gamma_{32}-i(\omega_{32}-\omega_1)]}\right\}. \qquad (П.2.18)$$

Нелинейные константы, описывающие такие явления, как смешение трех частот $\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k$ и комбинационное рассеяние, получаются в третьем порядке теории возмущений по V [2].

Если рассматривать нерезонансные процессы, когда ни один из сомножителей в знаменателе формулы (П.2.18) не мал, можно пренебречь скоростями релаксации γ_{ij}. В этом случае, конечно, следует повторить вычисления, но уже сохраняя все ранее отброшенные «нерезонансные» члены, и результатом будет [3]

$$d^{\omega_1=\omega_3-\omega_2}_{\alpha 32}=\frac{N_1}{2\hbar^2}\sum_{2,3}\left[\frac{(\mu_\alpha)_{32}(\mu_2)_{21}(\mu_3)_{13}}{(\omega_2-\omega_{21})(\omega_3-\omega_{31})}+\frac{(\mu_\alpha)_{23}(\mu_2)_{12}(\mu_3)_{31}}{(\omega_3+\omega_{31})(\omega_2+\omega_{21})}+\right.$$
$$+\frac{(\mu_\alpha)_{12}(\mu_2)_{23}(\mu_3)_{31}}{(\omega_1-\omega_{21})(\omega_3-\omega_{31})}+\frac{(\mu_\alpha)_{31}(\mu_2)_{23}(\mu_3)_{12}}{(\omega_3-\omega_{21})(\omega_1-\omega_{31})}+$$
$$\left.+\frac{(\mu_\alpha)_{31}(\mu_2)_{12}(\mu_3)_{23}}{(\omega_2-\omega_{21})(\omega_1+\omega_{31})}+\frac{(\mu_\alpha)_{12}(\mu_2)_{31}(\mu_3)_{23}}{(\omega_1-\omega_{21})(\omega_2+\omega_{31})}\right], \qquad (П.2.19)$$

где μ_j — проекция $\boldsymbol{\mu}$ на $\mathbf{E}_j$.

Шести членам в (П.2.19) отвечают шесть диаграмм Фейнмана на рис. П.2.2. Например, первый член (рис. П.2.2, *а*) характеризует процесс, в котором молекула, поглощая фотон с частотой ω_3, переходит из состояния *1* в состояние *3*. Испуская затем фотон с частотой ω_1, она переходит в состояние *2*, и, наконец, испуская фотон с частотой ω_2, возвращается в начальное состояние *1*. Энергия при этом сохраняется, так как $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Таким образом, молекула ведет себя как катализатор, вызывая распад фотона ω_3 на два фотона ω_1 и ω_2, сама при этом не изменяясь.

Приложение 3

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ И ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ [1]

Ниже последовательно развивается формальный метод описания таких нелинейных процессов, как смешение оптических частот и многофотонные процессы произвольного порядка. Метод основан на использовании квантовомеханических операторов временной эволюции и родственных им фейнмановских диаграмм

1. Введение

Целью настоящей работы является демонстрация возможностей использования формализма квантовомеханических операторов эволюции и родственной техники диаграмм Фейнмана для определения констант нелинейности различных многофотонных процессов. В качестве иллюстрации рассмотрим сложение и умножение частот, двухфотонное поглощение, различные процессы рассеяния. Начнем с краткого обзора формализма оператора эволюции [1].

---

[1] Yariv A. The application of time evolution operators and Feynman diagrams to nonlinear optics. — IEEE J., QE-13, 943 (1977).

Собственную волновую функцию атома, взаимодействующего с электромагнитным полем, можно найти при решении уравнения Шредингера.

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (\text{П.3.1})$$

или, что эквивалентно, как результат воздействия оператора эволюции $\hat{u}(t_b, t_a)$ на волновую функцию, взятую в момент времени t_a:

$$\psi(t_b) = \hat{u}(t_b, t_a)\,\psi(t_a). \qquad (\text{П.3.2})$$

Оператор $\hat{u}(t_b, t_a)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \hat{u}(t_b, t_a)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\,\hat{u}(t_b, t_a). \qquad (\text{П.3.3})$$

Если $\hat{\mathcal{H}}$ не зависит от времени, то из (П.3.3) следует

$$\hat{u}(t_b, t_a) = \exp\left[-i\frac{\hat{\mathcal{H}}}{\hbar}(t_b - t_a)\right] = \sum_m |m\rangle\langle m| \exp[-i\omega_m(t_b - t_a)]. \qquad (\text{П.3.4})$$

Здесь $\omega_m = E_m/\hbar$ — собственное значение; $|m\rangle$ — собственная функция гамильтониана, т. е. $\hat{\mathcal{H}}|m\rangle = \hbar\omega_m |m\rangle$.

Возьмем гамильтониан в виде

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}(t), \qquad (\text{П.3.5})$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — часть гамильтониана, не зависящая от времени, а $\hat{V}(t)$ — зависящая от времени энергия взаимодействия атома со световым полем.

Решение $\hat{u}(t_b, t_a)$ для гамильтониана вида (П.3.5) можно получить разложением в ряд по степеням $\hat{V}(t)$ [1]:

$$\hat{u}(t_b, t_a) = \hat{u}^{(0)}(t_b, t_a) + \hat{u}^{(1)}(t_b, t_a) + \hat{u}^{(2)}(t_b, t_a) + \ldots \hat{u}^{(n)}(t_b, t_a) + \ldots, \qquad (\text{П.3.6})$$

где

$$\hat{u}^{(0)}(t_b, t_a) = \exp\left[-i\frac{\hat{\mathcal{H}}_0}{\hbar}(t_b - t_a)\right];$$

$$\hat{u}^{(1)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_a}^{t_b} \hat{u}^{(0)}(t_b, t)\,\hat{V}(t)\,\hat{u}^{(0)}(t, t_a)\,dt;$$

$$\hat{u}^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_a}^{t_b > t_1}\int_{t_a} dt_1\,dt_2\,\hat{u}^{(0)}(t_b, t_1)\,\hat{V}(t_1)\,\hat{u}^{(0)}(t_1, t_2)\,\hat{V}(t_2)\,u^{(0)}(t_2, t_a); \qquad (\text{П.3.7})$$

$$\hat{u}^{(3)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_a}^{t_b > t_1 > t_2}\int_{t_a}\int_{t_a} dt_1\,dt_2\,dt_3\,\hat{u}^{(0)}(t_b, t_1)\,\hat{V}(t_1)\,\hat{u}^{(0)}(t_1 t_2)\,\hat{V}(t_2) \times$$

$$\times\,\hat{u}^{(0)}(t_2, t_3)\,\hat{V}(t_3)\,\hat{u}^{(0)}(t_3, t_a) \quad (t_b > t_1 > t_2 > t_3 \ldots > t_n).$$

Как именно можно применить этот формализм, поясним на конкретном примере.

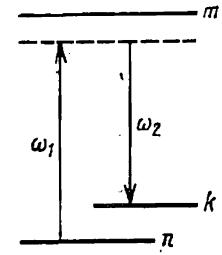


Рис. П.3.1. Энергетические уровни молекулы и спектральные компоненты поля, участвующие в комбинационном рассеянии

Рассмотрим процесс комбинационного рассеяния, когда атом, находящийся в поле, спектр которого содержит частоты ω_1 и ω_2, поглотив фотон частоты ω_1 и излучив фотон частоты $\omega_2 < \omega_1$, одновременно переходит из начального основного состояния n в состояние k. Этот процесс изображен на рис. П.3.1. В каждом элементарном акте рассеяния поглощается фотон частоты ω_1 и излучается фотон частоты ω_2. Вычислим скорость (т. е. вероятность в единицу времени) генерации фотонов частоты ω_2 в единице объема. Разделив эту скорость на плотность потока фотонов частоты ω_2 (фотон·м$^{-2}$·с$^{-1}$), найдем показатель усиления волны частоты ω_2 (комбинационное усиление).

Вычислим скорость комбинационного рассеяния с переходом $n \to k$, взяв производную по времени от вероятности перехода. Эта вероятность равна

$$W_k(t) = |\langle k|\psi(t)|^2 = |\langle k|\hat{u}(t, 0)|n\rangle|^2. \qquad (\text{П.3.8})$$

Поскольку в акте рассеяния участвуют лишь два фотона (частот ω_1 и ω_2), следует рассматривать только член второго порядка, т. е. $\hat{u}(t, 0)$. Таким образом,

$$W_k(t) = |\langle k|\hat{u}^{(2)}(t, 0)|n\rangle|^2. \qquad (\text{П.3.9})$$

Альтернативный подход к решению этой задачи состоит в отыскании наведенного дипольного момента третьего порядка для атома, взаимодействующего с полями $E_1 \exp(i\omega_1 t)$ и $E_2 \exp(i\omega_2 t)$. Интересоваться будем главным образом наведенным дипольным моментом, пропорциональным произведению полей:

$$E e^{i\omega_1 t}(E_1 e^{i\omega_1 t})^* E_2 e^{i\omega_2 t} = |E_1|^2 E_2 e^{i\omega_2 t}. \qquad (\text{П.3.10})$$

Среднее значение проекции дипольного момента на некоторую ось

$$\langle\mu_i\rangle = \langle\psi(t)|\hat{\mu}_i|\psi(t)\rangle. \qquad (\text{П.3.11})$$

Искомый дипольный момент дают такие члены, как $\langle\psi^{(1)}|\hat{\mu}_i|\psi^{(2)}\rangle$, $\langle\psi^{(0)}|\hat{\mu}_i|\psi^{(3)}\rangle$, где

$$\psi^{(n)}(t) = \hat{u}^{(n)}(t, 0)\psi(0), \qquad (\text{П.3.12})$$

так как в них входит третья степень энергии возмущения $\hat{V}(t)$. Действуя в рамках первого подхода, выражаем мощность, излучаемую единичным объемом среды на частоте ω_2, как

$$\mathcal{P}(\omega_2) = NW_{n\to k}\hbar\omega_2, \qquad (\text{П.3.13})$$

где $W_{n\to k} = (d/dt)W_k(t)$ — вероятность перехода за единицу времени одного атома из состояния $|n\rangle$ в состояние $|k\rangle$; N — плотность атомов.

Используя второй подход, т. е. обращаясь к (П.3.11), вычислим диссимируемую мощность $\mathcal{P}(\omega_2) = E_{2i}dP_i(\omega_2)/dt$, где $P_i(\omega_2)$ — поляризация на частоте ω_2. Таким образом,

$$\mathcal{P}(\omega_2) = \frac{1}{2}\overline{E_{2i}\frac{\partial}{\partial t}N\langle\hat{\mu}_i\rangle}. \qquad (\text{П.3.14})$$

Черта означает усреднение по времени.

Оба выражения (П.3.13) и (П.3.14) можно непосредственно и быстро вычислить, воспользовавшись диаграммами Фейнмана. При этом достаточно ограничиться рассмотрением доминирующих резонансных членов, пренебре-

гая остальными. Исходя из предположения об идентичности результатов (П.3.13) и (П.3.14), можно учесть конечную ширину линии.

Для вычисления средних значений наблюдаемых величин, например, с помощью формулы (П.3.11), необходимо получить выражение для волновой функции в нужном порядке теории возмущений. Зададим поле в месте нахождения атома

$$\hat{E}(t) = {}^1/_2 E_1 \exp(i\omega_1 t) + {}^1/_2 E_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к. с.} \qquad (\text{П.3.15})$$

и гамильтониан взаимодействия

$$\hat{V}(t) = -\hat{\mu}\left(\frac{E_1}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{E_2}{2} e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.}\right). \qquad (\text{П.3.16})$$

Предположим, что возмущение включается во время $t_0 = -\infty$, когда атом находится в основном состоянии n. Волновая функция в последующие моменты времени есть

$$\psi(t) = \psi^{(0)}(t) + \psi^{(1)}(t) + \ldots \psi^{(n)}(t) + \ldots, \qquad (\text{П.3.17})$$

где согласно (П.3.2) и (П.3.6)

$$\psi^{(n)}(t) = \hat{u}^{(n)}(t, t_0) \mid n\rangle. \qquad (\text{П.3.18})$$

Используя (П.3.7), запишем

$$\psi^{(0)}(t) = \exp\left[-i\frac{\hat{\mathcal{H}}_0}{\hbar}(t-t_0)\right] \mid n\rangle = \exp[-i\omega_n (t-t_0)] \mid n\rangle, \qquad (\text{П.3.19})$$

$$\psi^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \exp\left[-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0}{\hbar}(t-t_1)\right] V(t_1) \exp\left[-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0}{\hbar}(t_1-t_0)\right] dt_1 \mid n\rangle.$$

С помощью (П.3.4) это выражение преобразуется:

$$\psi^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar}\sum_m \int_{t_0}^{t} \mid m\rangle \langle m \mid \exp[-i\omega_m (t-t_1)]\, V(t_1) \exp[-i\omega_n (t_1-t_0)] \mid n\rangle\, dt_1. \qquad (\text{П.3.20})$$

Поскольку $\hat{V}(t_1)$ является суммой четырех слагаемых, интеграл (П.3.20) можно разбить на четыре части. Одна из них, например соответствующая $E_1^* \exp(-i\omega_1 t)$, имеет вид

$$\psi^{(1)}(t) = \frac{i}{2\hbar}\sum_m \int_{t_0 \to -\infty}^{t} (\mu_1)_{mn} E_1^* \exp[i(\omega_{mn} - \omega_1) t_1] \exp(-i\omega_m t) \times$$

$$\times \exp(i\omega_n t_0)\, dt_1 \mid m\rangle = \frac{1}{2\hbar}\sum_m (\mu_1)_{mn} E_1^* \frac{\exp[i(-\omega_1 - \omega_n) t]}{\omega_{mn} - \omega_1 - i\Gamma} \mid m\rangle. \qquad (\text{П.3.21})$$

Здесь μ_1 — проекция $\boldsymbol{\mu}$ на $\mathbf{E}_1$. В (П.3.21) для получения сходимости интеграла используем стандартный прием и заменим ω_{mn} на $\omega_{mn} - i\Gamma$. Благодаря этому при $t_1 \to -\infty$ интеграл обращается в нуль. В дальнейшем будет показано, что, вводя Γ таким способом, правильно учитывается конечное время жизни или ширина линии перехода. Множитель $\exp(i\omega_n t_0)$ опущен, поскольку он исчезает при вычислении средних величин (при перемножении на комплексно-сопряженное выражение).

Как уже упоминалось, $\psi^{(1)}(t)$ имеет еще три члена, каждый из которых подобен (П.3.21) с тем лишь отличием, что в них входят $+\omega_1$, $-\omega_2$, ω_2 соответственно. Их происхождение связано с тремя оставшимися в (П.3.20) членами гамильтониана (П. 3.16).

Таким образом, имеем

$$\psi^{(1)}(t)=\frac{1}{2\hbar}\sum_m\left\{(\mu_1)_{mn}\frac{E_1^*\exp[i(-\omega_1-\omega_n)t]\,|\,m\rangle}{\omega_{mn}-\omega_1-i\Gamma}+\right.$$

$$+(\mu_1)_{mn}\frac{E_1\exp[i(\omega_1-\omega_n)t]\,|\,m\rangle}{\omega_{mn}+\omega_1-i\Gamma}+(\mu_2)_{mn}\frac{E_2^*\exp[i(-\omega_2-\omega_n)t]\,|\,m\rangle}{\omega_{mn}-\omega_2-i\Gamma}+$$

$$\left.+(\mu_2)_{mn}\frac{E_2\exp[i(\omega_2-\omega_n)t]\,|\,m\rangle}{\omega_{mn}+\omega_2-i\Gamma}\right\}. \qquad (\text{П.3.22})$$

Используя (П.3.7), находим волновую функцию

$$\psi^{(2)}(t)=\hat{u}^{(2)}(t,t_0)\,|\,n\rangle=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}dt_1\,dt_2\exp[-i\hat{\mathcal{H}}_0(t-t_1)]\times$$

$$\times V(t_1)\exp[-i\hat{\mathcal{H}}_0(t_1-t_2)]\,V(t_2)\exp[-i\hat{\mathcal{H}}_0(t_2-t_0)]\,|\,n\rangle=$$

$$=\left(-\frac{i}{\hbar^2}\right)^2\sum_m\sum_s\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1>t_2}\exp[-i\omega_s(t-t_1)]\,|\,s\rangle\langle s\,|\,\hat{V}(t_1)\times$$

$$\times\exp[-i\omega_m(t_1-t_2)]\,|\,m\rangle\langle m\,|\,\hat{V}(t_2)\exp[-i\omega_n(t_2-t_0)]\,|\,n\rangle\,dt_2\,dt_1. \qquad (\text{П.3.23})$$

Поскольку гамильтониан содержит поля четырех частот, он входит в (П.3.23) дважды, результат интегрирования содержит шестнадцать членов. Типичный член, соответствующий слагаемому в подынтегральном выражении, содержащему

$$-\mu_1 E_1^*\exp(-i\omega_1 t_2)\quad\text{и}\quad-\mu E_2^*\exp(-i\omega_2 t_1),$$

выглядит так

$$\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,-\omega_2}(t)=\sum_m\sum_s\left(\frac{1}{\hbar}\right)^2\frac{E_1^*E_2^*\,(\mu_1)_{mn}(\mu_2)_{sm}\exp[i(-\omega_n-\omega_1-\omega_2)t]}{4\qquad(\omega_{mn}-\omega_1-i\Gamma)(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2-i\Gamma)}|s\rangle. \qquad (\text{П.3.24})$$

Далее удобно представить (П.3.24) в виде диаграмм Фейнмана (рис. П.3.2). Время растет снизу вверх. Каждый прямой отрезок изображает собственное состояние. Атом, находившийся в начальный момент t_0 в состоянии n переходит вследствие рассеяния в момент t_2 в состояние m, поглощая фотон частоты ω_1. Это рассеяние учитывается множителем

$$(\mu_1)_{mn}E_1^*\,e^{-i\omega_1 t}/(\omega_{mn}-\omega_1-i\Gamma).$$

Следующее «рассеяние» происходит в момент t_1 и включает поглощение фотона частоты ω_2. Знак минус перед частотой означает поглощение и изображается стрелкой, направленной к вершине, в то время как стрелка, направленная из вершины, означает излучение фотона. В качестве примера на рис. П.3.2, *б*

приведен случай перехода из состояния n в состояние s с поглощением фотона частоты ω_1 и излучением фотона частоты ω_2. Соответствующий член в $\psi^{(2)}(t)$ имеет вид

$$\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,\omega_2} = \sum_m \sum_s \left(\frac{1}{\hbar}\right)^2 \frac{E_1^* E_2}{4} \times$$

$$\times \frac{(\mu)_{mn}\,(\mu_2)_{sm} \exp\left[i\left(-\omega_n - \omega_1 + \omega_2\right) t\right]}{(\omega_{mn} - \omega_1 - i\Gamma)\,(\omega_{sn} - \omega_1 + \omega_2 - i\Gamma)} \,|\, s\rangle . \qquad (\text{П.3.25})$$

Подчеркнем, что каждый акт рассеяния, т. е. каждая вершина на диаграмме, добавляет в знаменатель множитель, равный (в единицах $\hbar$) энергии атома и поля после рассеяния за вычетом начальной ($t = t_0$) энергии. Второй множитель в знаменателе (П.3.25) получен, например из $\omega_s + \omega_2 - (\omega_1 + \omega_n)$. Остальные четырнадцать волновых функций получаются в результате всевозможных перестановок $\psi^{(2)}_{\pm\omega_i,\,\pm\omega_j}$ $(i,\ j = 1,2)$, причем будем считать, что $\psi^{(2)}_{+\omega_i,\,-\omega_j}$, например, соответствует испусканию фотона частоты ω_1 в t_2 и поглощению фотона частоты ω_j в t_1 $(t_1 > t_2)$. Отметим, что $\psi^{(2)}_{-\omega_j,\,\omega_i}$ не совпадает с $\psi^{(2)}_{\omega_i,\,-\omega_j}$.

Используя диаграммную технику, можно записать волновую функцию в любом порядке теории возмущений. В качестве примера рассмотрим процесс, в котором атом переходит из состояния n в состояние s, при этом поглощается фотон частоты ω_1 и фотон частоты ω_2 и испускается фотон частоты ω_3. Диаграмма $\psi^{(3)}_{-\omega_1,\,-\omega_2,\,\omega_3}$, описывающая этот процесс, приведена на рис. П.3.2, *в*

$$\psi^{(3)}_{-\omega_1,\,-\omega_2,\omega_3} = \sum_m \sum_k \sum_s \frac{-E_1^* E_2^* E_3}{8\hbar^3} \times$$

$$\times \frac{(\mu_1)_{mn}\,(\mu_2)_{km}\,(\mu_3)_{sk} \exp\left[i\left(-\omega_n - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3\right) t\right]}{(\omega_{mn} - \omega_1)\,(\omega_{kn} - \omega_1 - \omega_2)\,(\omega_{sn} - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3)} \,|\, s\rangle . \qquad (\text{П.3.26})$$

Полное число комбинаций функций $\psi^{(3)}_{\pm\omega_i,\,\pm\omega_j,\,\pm\omega_k}$ равно $6^3 = 216$ под знаком тройной суммы. Огромное преимущество диаграммного представления состоит в том, что с его помощью просто выбрать и записать нужный член, доминирующий в том или ином процессе. Яснее это будет видно из приведенных ниже примеров.

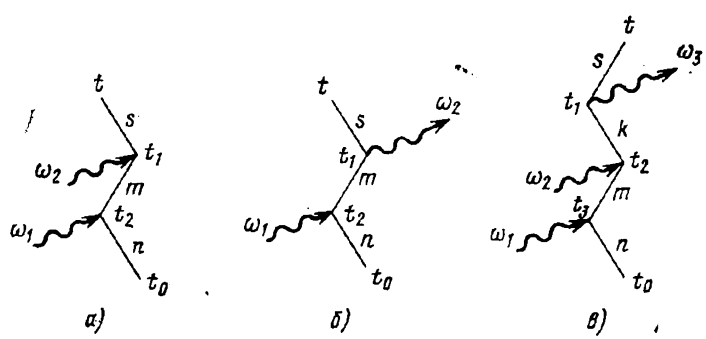


Рис. П.3.2. Диаграммы Фейнмана, используемые при расчете функций:
а) $\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,-\omega_2}(t)$; *б)* $\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,\omega_2}(t)$; *в)* $\psi^{(3)}_{-\omega_1,\,-\omega_2,\,\omega_3}(t)$.

2. Сложение частот

Вычислим нелинейную восприимчивость $d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}$, определяемую соотношением

$$P_i^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}=d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}E_2E_1. \qquad (\text{П.3.27})$$

Поля $\mathrm{Re}\,(E_{1j}e^{i\omega_1 t})$ и $\mathrm{Re}\,(E_{2k}e^{i\omega_2 t})$ совместно наводят в среде поляризацию, проекция которой на ось i записывается как

$$P_i(t)=\mathrm{Re}\,(P_i^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}e^{i\omega_3 t}). \qquad (\text{П.3.28})$$

Полный дипольный момент атома вычисляется по формуле

$$\langle\mu_i(t)\rangle=\langle\psi(t)\,|\,\hat{\mu}_i\,|\,\psi(t)\rangle, \qquad (\text{П.3.29})$$

поэтому квадратичную по полю компоненту типа той, которая дается формулой (П.3.27), следует искать в виде

$$\langle\mu_i^{(2)}(t)\rangle=\langle\psi^{(0)}\,|\,\hat{\mu}_i\,|\,\psi^{(2)}\rangle+\langle\psi^{(2)}\,|\,\hat{\mu}_i\,|\,\psi^{(0)}\rangle+\langle\psi^{(1)}\,|\,\hat{\mu}_i\,|\,\psi^{(1)}\rangle. \qquad (\text{П.3.30})$$

Каждое из слагаемых (П.3.30) порождает два слагаемых в искомом выражении для поляризации—один соответствует рассеянию сначала поля E_1, а затем E_2, второй — обратному порядку рассеяния.

В качестве примера рассмотрим член $\langle\psi^{(1)}|\hat{\mu}_i|\psi^{(1)}\rangle$:

$$\langle\psi^{(1)}\,|\,\hat{\mu}_i\,|\,\psi^{(1)}\rangle=\sum_s\sum_m\left(\frac{1}{2\hbar}\right)^2\langle s\,|\,E_2(\mu_k)_{sn}\frac{\exp[i(\omega_2+\omega_n)t]}{\omega_{sn}-\omega_2+i\Gamma}\times$$

$$\times\,|\,\hat{\mu}_i\,|\,E_1(\mu_j)_{mn}\frac{\exp[i(\omega_1-\omega_n)t]}{\omega_{mn}+\omega_1-i\Gamma}\,|\,m\rangle=\sum_s\sum_m\frac{E_1E_2}{4\hbar^2}\times$$

$$\times\frac{(\mu_k)_{sn}(\mu_i)_{sm}(\mu_j)_{mn}}{(\omega_{sn}-\omega_2+i\Gamma)(\omega_{mn}+\omega_1-i\Gamma)}\exp[i(\omega_1+\omega_2)t].$$

Заметим, что множитель перед волновой функцией слева от μ_i заменен на комплексно-сопряженный.

Соберем все члены, дающие вклад в d_{ijk}:

$$d_{ijk}^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}=\frac{N}{2\hbar^2}\sum_m\sum_s\left[\frac{(\mu_k)_{sn}(\mu_i)_{sm}(\mu_j)_{mn}}{(\omega_{sn}-\omega_2+i\Gamma)(\omega_{mn}+\omega_1-i\Gamma)}+\right.$$

$$+\frac{(\mu_j)_{sn}(\mu_i)_{sm}(\mu_k)_{mn}}{(\omega_{sn}-\omega_1+i\Gamma)(\omega_{mn}+\omega_2-i\Gamma)}+\frac{(\mu_j)_{mn}(\mu_k)_{sm}(\mu_i)_{ns}}{(\omega_{mn}+\omega_1-i\Gamma)(\omega_{sn}+\omega_1+\omega_2-i\Gamma)}+$$

$$+\frac{(\mu_k)_{mn}(\mu_j)_{sm}(\mu_i)_{ns}}{(\omega_{mn}+\omega_2-i\Gamma)(\omega_{sn}+\omega_1-\omega_2-i\Gamma)}+\frac{(\mu_j)_{nm}(\mu_k)_{sm}(\mu_i)_{ns}}{(\omega_{mn}-\omega_1+i\Gamma)(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2+i\Gamma)}+$$

$$\left.+\frac{(\mu_k)_{mn}(\mu_j)_{sm}(\mu_i)_{ns}}{(\omega_{mn}-\omega_2+i\Gamma)(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2+i\Gamma)}\right].$$

Более традиционный вывод дан в работах [2—4].

3. Двухфотонное поглощение

Применим развитый формализм к определению вероятности поглощения атомом двух фотонов частот ω_1 и ω_2. Положив $\omega_1=\omega_2$, получим известное выражение для коэффициента двухфотонного поглощения. Начнем с записи волновой функции $\psi^{(2)}(t)$ атома, находящегося в момент $t=0$ в состоянии n

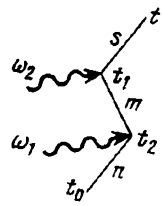


Рис. П.3.3. Диаграмма Фейнмана, используемая при рассмотрении двухфотонного поглощения

и взаимодействующего с полем (П.3.15). Предположим, что наибольший вклад в $\psi^{(2)}$ дает член $\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,-\omega_2}$, соответствующий диаграмме рис. П.3.3. Запишем

$$\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,-\omega_2} = \sum_m \sum_s \frac{E_1^* E_2^*}{4\hbar^2} \times$$

$$\times \frac{(\mu_1)_{mn}\,(\mu_2)_{sm}\,e^{-i\omega_s t}\,[\exp i\,(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2)\,t-1]}{(\omega_{mn}-\omega_1)\,(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2)}\,|s\rangle. \quad (П.3.31)$$

Полагаем далее, что некоторый уровень m расположен так, что $\omega_{mn} \approx \omega_1$. Благодаря этому соответствующее слагаемое является доминирующим и (П.3.31) можно переписать в виде

$$\psi^{(2)}_{-\omega_1,\,-\omega_2}(t) \approx \frac{E_1^* E_2^*}{4\hbar^2} \sum_m \sum_s \times$$

$$\times \frac{(\mu_1)_{mn}\,(\mu_2)_{sm}\,e^{-i\omega_s t}\exp[i\,(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2)\,t-1]}{(\omega_{mn}-\omega_1)\,(\omega_{sn}-\omega_1-\omega_2)}\,|s\rangle. \quad (П.3.32)$$

Вероятность обнаружения атома в некотором состоянии k в момент t равна $|\langle k|\,\psi^{(2)}(t)\rangle|^2$, следовательно, вероятность перехода вследствие двухфотонного поглощения

$$W_k = |\langle k\,|\,\psi^{(2)}(t)\rangle|^2 = \quad (П.3.33)$$

$$= \frac{|E_1|^2\,|E_2|^2}{16\hbar^4} \frac{(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_2)^2_{km}\sin^2[1/2\,(\omega_{kn}-\omega_1-\omega_2)\,t]}{(\omega_{mn}-\omega_1)^2\,[1/2\,(\omega_{kn}-\omega_1-\omega_2)]^2}. \quad (П.3.34)$$

Следует подчеркнуть, что переход возможен лишь в то из состояний k, для которого выполняется закон сохранения энергии $E_k - E_n = \hbar(\omega_1 + \omega_2)$. Если $g(\omega_{kn})$— нормированная функция формы линии перехода $n \to k$, то среднее значение W_k находится в результате умножения (П.3.34) на $g(\omega_{kn})$ с последующим интегрированием в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Воспользовавшись известным соотношением

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin^2(xt/2)}{(xt/2)^2} \to 2\pi t\delta(x), \quad (П.3.35)$$

получим вероятность перехода в единицу времени

$$W_{n\to k} = \frac{d}{dt} W_k = \frac{\pi\,|E_1|^2\,|E_2|^2\,(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_2)^2_{mk}\,g(\omega_{kn}=\omega_1+\omega_2)}{8\hbar^4\,(\omega_{mn}-\omega_1)^2}. \quad (П.3.36)$$

Частный случай двухфотонного поглощения света одной частоты $\omega_1 = \omega_2$ подробно рассмотрен в [5]. Можно получить коэффициент поглощения для этого случая, приравняв изменение интенсивности I_ω поля E_1 числу переходов в единицу времени в единице объема:

$$\frac{dI_\omega}{dz} = 2\hbar\omega W_{n\to k}(N_k - N_n), \qquad (\text{П.3.37})$$

где N_k и N_n — населенности уровней k и n. Используя выражение $I_\omega = (\varepsilon c/n_1)\,|E_1|^2/2$, получаем

$$\alpha_{\text{двухфот}} = \frac{\pi\omega\,((N_n - N_k)\,(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_1)^2_{km}\,n_1^2\,g\,(\omega_{kn} = 2\omega)}{\hbar^3\,(\omega_{mn} - \omega)^2\,\varepsilon^2\,c^2} \cdot I_\omega. \qquad (\text{П.3.38})$$

4. Комбинационное (рамановское) рассеяние

Обратимся теперь к комбинационному рассеянию, в процессе которого атом, первоначально находящийся в основном состоянии n, поглощает фотон частоты ω_1, одновременно излучает фотон частоты ω_2 и оказывается в состоянии k. Этот процесс изображен на рис. П.3.4. Рассматриваемая ситуация подобна описанной выше, за исключением того, что второй фотон (ω_2) излучается, а не поглощается. Поэтому можно воспользоваться результатами разд. 3, поменяв лишь знак перед ω_2:

$$W_k(t) = \frac{|E_1|^2\,|E_2|^2\,(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_2)^2_{km}}{16\hbar^4\,(\omega_{mn} - \omega_1)^2}\,2\pi t\delta\,(\omega_{kn} = \omega_1 + \omega_2). \qquad (\text{П.3.39})$$

Так же, как в (П.3.34), здесь предполагается, что основной вклад в вероятность W_k вносит лишь одно состояние m. Введем нормированную функцию формы линии $g\,(\omega_{kn})$. Умножая (П.3.39) на $g\,(\omega_{kn})d\omega_{kn}$ и интегрируя, получаем

$$W_k(t) = \frac{\pi t}{8\hbar^4}\,\frac{|E_1|^2\,|E_2|^2\,(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_2)^2_{km}}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2}\,g\,(\omega_{kn} = \omega_1 - \omega_2). \qquad (\text{П.3.40})$$

Соответствующая вероятность перехода

$$W_{n\to k} = \frac{dW_k}{dt} = \frac{\pi}{8\hbar^4} = \frac{|E_1|^2\,|E_2|^2\,(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_2)^2_{km}}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2}\,g\,(\omega_{kn} = \omega_1 - \omega_2) = (\text{П.3.41})$$

$$= \frac{\pi n_1 n_2 I_1 I_2\,(\mu_1)^2_{mn}\,(\mu_2)^2_{km}}{2\hbar^4 c^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2\,(\omega_{mn} - \omega_1)^2}\,g\,(\omega_{kn} = \omega_1 - \omega_2), \qquad (\text{П.3.42})$$

где I — интенсивность; ε — диэлектрическая проницаемость; n — показатель преломления.

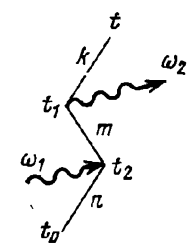


Рис. П.3.4. Фейнмановская диаграмма, соответствующая процессу комбинационного рассеяния

Показатель усиления на частоте ω_2 определяется из соотношения

$$\frac{dI_2}{dz} = g_{\text{кр}} I_2 = W_{n \to k} (N_n - N_k) \hbar\omega_2,$$

подставив в которое (П.3.42), получим

$$g_{\text{кр}} = \frac{\pi n_1 n_2 \omega_2 (\mu_1)^2_{mn} (\mu_2)^2_{km} (N_n - N_k) I_1}{2\hbar^3 c^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\omega_{mn} - \omega_1)^2} g(\omega_{kn} = \omega_1 + \omega_2). \qquad (\text{П.3.43})$$

Рассмотрим другой подход в теории комбинационного рассеяния. Вместо вероятности переходов вычислим наведенный дипольный момент атома, взаимодействующего с полями частот ω_1 и ω_2. Задачу решаем в том же приближении теории возмущений, что и раньше, поэтому ищем дипольный момент, кубичный по амплитуде приложенного поля;

$$\langle \mu_i \rangle \sim E_1 E_1^* E_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_1 + \omega_2) t] = |E_1|^2 E_2 \exp(i\omega_2 t).$$

Вклад в дипольный момент, кубичный по E, дают такие комбинации, как $\langle \psi^{(1)} | \hat{\mu}_i | \psi^{(2)} \rangle$ и $\langle \psi^{(0)} | \hat{\mu}_i | \psi^{(3)} \rangle$. Анализ (П.3.22) и (П.3.25) показывает, что наибольшую величину имеет

$$\langle \mu_i \rangle = \langle \psi^{(1)} | \hat{\mu}_i | \psi^{(2)} \rangle + \text{к. с.} \qquad (\text{П.3.44})$$

Подставляя выражения

$$\psi^{(1)}(t) = \sum_m \left(\frac{1}{2\hbar}\right) \frac{E_1^* (\mu_1)_{mn}}{(\omega_{mn} - i\Gamma - \omega_1)} \exp[i(-\omega_1 - \omega_n) t] | m \rangle, \qquad (\text{П.3.45})$$

$$\psi^{(2)}(t) = \sum_g \sum_s \frac{E_1^* E_2}{4\hbar^2} \frac{(\mu_1)_{gn} (\mu_2)_{sg} \exp[i(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_n) t]}{(\omega_{gn} - \omega_1 - i\Gamma)(\omega_{sn} - \omega_1 + \omega_2 - i\Gamma)} | s \rangle \qquad (\text{П.3.46})$$

в (П.3.44), получаем

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{1}{8\hbar^3} \sum_m \sum_g \sum_s E_1 E_1^* E_2 \times$$

$$\times \frac{(\mu_1)_{mn} (\mu_i)_{ms} (\mu_1)_{gn} (\mu_2)_{sg}}{(\omega_{mn} - \omega_1)(\omega_{gn} - \omega_1)(\omega_{sn} - \omega_1 + \omega_2 - i\Gamma)} e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.} \qquad (\text{П.3.47})$$

В первых двух сомножителях знаменателя опущено слагаемое $i\Gamma$. Если, однако, $\omega_{mn} \approx \omega_1$ или $\omega_{gn} \approx \omega_1$, то его следует учесть.

Будем считать, что в сумме (П.3.47) основную роль играет член с $\omega_{mn} \approx \omega_1$ и частоты ω_1 и ω_2 подобраны так, что имеется уровень $s = k$, для которого $\omega_{kn} = \omega_1 - \omega_2$.

Эти предположения заметно упрощают результат

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{1}{8\hbar^3} \frac{(\mu_1)^2_{mn} (\mu_i)_{mk} (\mu_2)_{km}}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2 (\omega_{kn} - \omega_1 + \omega_2 - i\Gamma)} e^{i\omega_2 t} E_1 E_1^* E_2 + \text{к. с.} \qquad (\text{П.3.48})$$

Определив комбинационную восприимчивость

$$P_i^{(\omega_3)} = N \langle \mu_i \rangle = \varepsilon_0 \chi_{\text{кр}} |E_1|^2 E_2, \qquad (\text{П.3.49})$$

из (П.3.48) и (П.3.49) получим

$$\chi_{\text{кр}} = \frac{N}{4\hbar^3 \varepsilon_0} \frac{(\mu_1)^2_{mn} (\mu_i)_{mk} (\mu_2)_{mk}}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2 (\omega_{kn} - \omega_1 + \omega_2 - i\Gamma)}. \qquad (\text{П.3.50})$$

Средняя мощность, излучаемая единицей объема на частоте ω_2,

$$\mathcal{P} = -\frac{\omega_2 \varepsilon_0}{2} |E_2|^2 |E_1|^2 \chi''_{\text{кр}}, \qquad (\text{П.3.51})$$

где

$$\chi_{\text{кр}} = \chi'_{\text{кр}} - i\chi''_{\text{кр}}. \qquad (\text{П.3.52})$$

Анализ (П.3.50) показывает, что при $\Gamma = 0$ $\chi_{\text{кр}}$ является действительной величиной и $\mathcal{P}=0$. Коэффициент Γ в фейнмановском формализме имеет непосредственное отношение к диссипации энергии. Рассмотрим Γ как параметр и вычислим мощность $\mathcal{P}$. Прежде всего запишем

$$\chi'_{\text{кр}} = \frac{N}{4\hbar^3 \varepsilon_0} \frac{(\mu_1)^2_{mn} (\mu_i)_{mk} (\mu_2)_{mk} [\omega_{kn} - (\omega_1 - \omega_2)]}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2 [(\omega_{kn} - \omega_1 + \omega_2)^2 + \Gamma^2]}, \qquad (\text{П.3.53})$$

$$\chi''_{\text{кр}} = \frac{-N}{4\hbar^3 \varepsilon_0} \frac{(\mu_1)^2_{mn} (\mu_i)_{mk} (\mu_2)_{mk} \Gamma}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2 [(\omega_{kn} - \omega_1 + \omega_2)^2 + \Gamma^2]}.$$

Из (П.3.51) (полагая $i = 2$, поскольку вклад в поглощение дает только компонента поляризации, параллельная E_2) находим

$$\mathcal{P} = \frac{\omega_2}{8\hbar^3} |E_1|^2 |E_2|^2 \frac{N (\mu_1)^2_{mn} (\mu_2)^2_{mk} \Gamma}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2 [(\omega_{kn} - \omega_1 + \omega_2)^2 - \Gamma^2]}. \qquad (\text{П.3.54})$$

Это та же мощность, что и вычисленная при вероятностном подходе по формуле (П.3.41):

$$\mathcal{P} = NW_{n \to k} \hbar\omega_2 = \frac{N\pi\omega_2}{8\hbar^3} \frac{|E_2|^2 |E_2|^2 (\mu_1)^2_{mn} (\mu_2)^2_{mk}}{(\omega_{mn} - \omega_1)^2} g(\omega_{kn} = \omega_1 - \omega_2). \qquad (\text{П.3.55})$$

Приравняв (П.3.54) и (П.3.55) (имея в виду, что $\mu_i = \mu_2$), находим

$$\frac{\pi/\Gamma}{[\omega_{kn} - (\omega_1 - \omega_2)]^2 + \Gamma^2} = g[\omega_{kn} - (\omega_1 - \omega_2)].$$

Таким образом, оба подхода дают совпадающие результаты, если считать, что Γ — ширина лоренцевой линии, ассоциирующейся с переходом $k \to n$.

Форма линии $\chi''_{\text{кр}}$ и ее знак зависят от знака Γ в (П.3.53). Установлено, что развитый метод вычислений привел к правильному результату. Знак Γ выбрали из соображений, что $\psi(t)$ должна быть независимой от «начального» времени ($t_0 \to -\infty$), и затем ограничили анализ учетом лишь тех членов, для которых $\omega_{kn} \approx \omega_1 - \omega_2$, т. е. привлекли закон сохранения энергии всей системы (вещество+поле). Последний закон учитывается автоматически, если рассматривать $\psi^{(2)}$ в (П.3.44) как кет-вектор.

Применяя изложенную методику к вычислению нелинейной восприимчивости на антистоксовой частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_{kn}$, приходим к дипольному моменту

$$\langle \mu_l^{(\omega_3)} \rangle = \langle \psi^{(2)}_{\omega_3, \omega_1} | \hat{\mu}_l | \psi^{(1)}_{\omega_1} \rangle,$$

колеблющему с частотой ω_3, для которого выполняется закон сохранения энергии ($\omega_{kn} - \omega_3 + \omega_1$).

Определяя нелинейную антистоксову восприимчивость χ_{AC} соотношением $P_l^{(\omega_3)} = N \langle \mu_l^{(\omega_3)} \rangle = \varepsilon_0 \chi_{ac} |E_1|^2 E_3$ и используя ту же процедуру, что и при вычислении (П.3.48) и (П.3.50), получаем

$$\chi_{ac} = \frac{N}{4\hbar^3 \varepsilon_0} \times$$

$$\times \left[\sum_m \sum_g \frac{(\mu_i)_{km} (\mu_3)_{gm} (\mu_1)_{gk} (\mu_1)_{mn}}{(\omega_{gn} - \omega_3 + i\Gamma_{gn})(\omega_{mn} + \omega_1 - i\Gamma_{mn})} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\omega_{kn} - \omega_3 + \omega_1 + i\Gamma} \right). \qquad \text{(П.3.56)}$$

Отметим, что вместо $-i\Gamma$, как в (П.3.50), в последнем сомножителе знаменателя стоит $+i\Gamma$. Это является следствием того, что здесь $\psi^{(2)}_{\omega_3 \omega_4}$ не кет-вектор, а бра-вектор. Видно, что знак χ''_{ac} противоположен знаку $\chi''_{кр}$ и, следовательно, антистоксово излучение (ω_3) в присутствии лазерного поля поглощается.

Таким образом, основываясь на приведенном примере комбинационного рассеяния, можно утверждать, что описанная методика вычислений приводит к правильному выражению функции формы линии.

Подведем итог. Формализм операторов эволюции и связанная с ними техника диаграмм Фейнмана были применены к широкому кругу многофотонных процессов. Развитый метод позволил целенаправленно рассмотреть сложные процессы высших порядков и непосредственно получить нелинейные восприимчивости, описывающие эти процессы[1]).

Приложение 4

ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА С УСИЛЕНИЕМ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ И ГЕНЕРАЦИЯ ПРИ ВЫРОЖДЕННОМ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ[2])

Рассматриваются некоторые новые оптические эффекты, обусловленный вырожденным четырехволновым взаимодействием в прозрачной среде. К их числу относится обращение волнового фронта (сопряженность фаз падающей и отраженной волн), а также новый тип параметрической генерации.

Кратко рассмотрим следствия из определенного класса четырехволновых взаимодействий. Во взаимодействии участвуют две интенсивные волны накачки E_1 и E_2 *одной и той же* частоты, распространяющиеся в *противоположных* направлениях, и две «слабые» волны E_3 и E_4 той же частоты ω, бегущие навстречу друг другу вдоль направления, отличного от направления распространения волн накачки. Эта ситуация иллюстрируется рис. П.4.1.

Возьмем поля в виде плоских волн

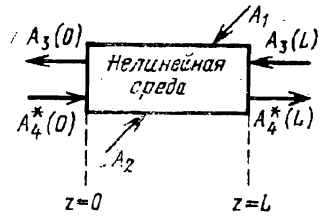
$$E_i(\mathbf{r}, t) = {}^1/_2 A_i(\mathbf{r}_i) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})] + \text{к. с.}, \qquad \text{(П.4.1)}$$

---

[1]) При переводе был выпущен заключительный раздел статьи, в котором формализм операторов эволюции применен к процессам двухфотонного комбинационного рассеяния, ранее описанным в работе [6]. — *Прим. пер.*

[2]) A. Yariv, D. M. Pepper. Amplified reflection, phase conjugation, and oscillation in degenerate four-wave mixing. — Opt. Letts, 1, 16 1977).

Рис. П.4.1. Схема четырехволнового взаимодействия



где r_i — расстояние вдоль $\mathbf{k}_i$. Из постановки задачи следует

$$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0, \quad \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4=0. \tag{П.4.2}$$

Нелинейная поляризация, определяющая взаимодействие волн, равна [1]

$$P_{\text{нел}}^{\omega_4}=\omega_1+\omega_2-\omega_3={}^1/_2\,\chi A_1 A_2 A_3^* \exp\{i[\omega_4 t-(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\mathbf{r}]\},$$

$$P_{\text{нел}}^{\omega_3}=\omega_1+\omega_2-\omega_4={}^1/_2\,\chi A_1 A_2 A_4^* \exp\{i[\omega_3 t-(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)\mathbf{r}]\}. \tag{П.4.3}$$

Рассмотрим среду, в которой нелинейная восприимчивость создается в области $0 < z < L$. Нас интересует пространственная эволюция волн A_3 и A_4 под воздействием накачки A_1 и A_2. Прибегнем к стандартным методам решения волнового уравнения, принятым в нелинейной оптике [2],

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\mathbf{P}_{\text{нел}}. \tag{П.4.4}$$

Пренебрегая истощением A_1 и A_2, получаем

$$\frac{dA_3}{dz}=i\frac{2\pi\omega}{cn}\chi A_1 A_2 A_4^* \exp\{-i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\mathbf{r}\}=i\varkappa^* A_4^*,$$

$$\frac{dA_4^*}{dz}=i\varkappa A_3. \tag{П.4.5}$$

Здесь использованы равенства $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0$, $\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4=0$, ось z направлена вдоль k_4, принято адиабатическое приближение

$$\left|\frac{d^2A_i}{dz^2}\right| \ll \left|k_i\frac{dA_i}{dz}\right|.$$

Комплексная константа взаимодействия $\varkappa$ выражается следующим образом:

$$\varkappa^*=(2\pi\omega/cn)\,\varkappa A_1 A_2. \tag{П.4.6}$$

Обозначим комплексные амплитуды слабых волн на входе в нелинейную среду через $A_3(L)$ и $A_4(0)$. Решения уравнений (П.4.5) имеют вид

$$A_3(z)=\frac{\cos|\varkappa|z}{\cos|\varkappa|L}A_3(L)+i\frac{\varkappa^*}{|\varkappa|}\frac{\sin|\varkappa|(z-L)}{\cos|\varkappa|L}A_4^*(0),$$

$$A_4^*(z)=i\frac{|\varkappa|}{\varkappa^*}\frac{\sin|\varkappa|z}{\cos|\varkappa|L}A_3(L)+\frac{\cos|\varkappa|(z-L)}{\cos|\varkappa|L}A_4^*(0). \tag{П.4.7}$$

Особо интересен случай, когда на нелинейную среду падает лишь одна волна на $A_4(0)$ при $z=0$. Тогда отраженная от этого края нелинейной среды ($z=0$) волна имеет амплитуду

$$A_3(0)=-i\left(\frac{\varkappa^*}{|\varkappa|}\operatorname{tg}|\varkappa|L\right)A_4^*(0), \tag{П.4.8}$$

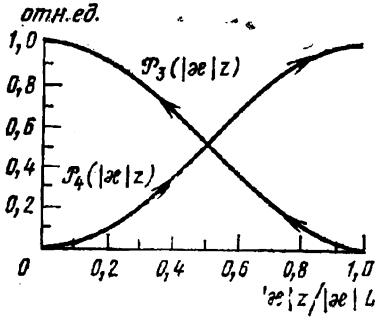


Рис. П.4.2. Зависимость интенсивностей входного сигнала ($\mathcal{P}_4$) и сопряженного поля ($\mathcal{P}_3$) от $|\varkappa|z$ в режиме, близком к самовозбуждению ($|\varkappa|L\approx\pi/2$)

в то время как волна, прошедшая через всю среду,

$$A_4^*(L)=\frac{A_4^*(0)}{\cos|\varkappa|L}. \qquad (\text{П.4.9})$$

Отметим, что для $\pi/4<|\varkappa|L<3\pi/4$

$$|A_3(0)|>|A_4(0)|. \qquad (\text{П.4.10})$$

Итак, амплитуда отраженной волны превышает амплитуду падающей, т. е. среда действует как отражательный усилитель. Амплитуда прошедшей волны $A_4(L)$ всегда превышает амплитуду падающей волны $A_4(0)$.
Когда $|\varkappa|L=\pi/2$,

$$\frac{A_3(0)}{A_4^*(0)}=\infty,\quad \frac{A_4^*(L)}{A_4^*(0)}=\infty. \qquad (\text{П.4.11})$$

Таким образом, при четырехволновом взаимодействии возможна генерация без обратной связи, обеспечиваемой зеркалами, аналогично тому, как это происходит в параметрическом генераторе обратной волны (§ 17.8).

Распределение поля в среде в режиме, близком к самовозбуждению, дано на рис. П.4.2.

Сопряженность фаз и усиление достигаются также в условиях трехволнового параметрического взаимодействия встречных волн в кристаллах [3]. Принципиальное различие между трех- и четырехволновыми взаимодействиями состоит в том, что первые зависят от реализации условий фазового синхронизма, а вторые нет (заметим, что сумма $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4$ в показателе экспоненты уравнения (П.4.5) равна нулю). Это различие влечет за собой ряд важных практических выводов: трехволновое смешение возможно практически лишь в кристаллах, обладающих значительным двулучепреломлением, и при большом отношении входной и выходной частот – оба эти ограничения связаны с необходимостью удовлетворения условий фазового синхронизма [3]; поскольку четырехволновые процессы не ограничены условиями фазового синхронизма, они могут использоваться для усиления сигналов со *сколь угодно сложной формой* волнового фронта.

Для доказательства последнего утверждения представим входное поле A_4, используя фурье-разложение, в виде *произвольной* суперпозиции плоских волн

$$A_4(x,y,z)=\int A_4(\mathbf{k}_\perp,z)\,e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp}\,d^2\mathbf{k}_\perp=\int A_4(-\mathbf{k}_\perp,z)\,e^{-i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp}d^2\mathbf{k}_\perp, \qquad (\text{П.4.12})$$

а выходное поле в виде

$$A_3(x,y,z)=\int A_3(k_\perp,z)\,e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}d^2\mathbf{k}_\perp. \qquad (\text{П.4.13})$$

Пусть накачка осуществляется плоскими волнами, бегущими по одной прямой, но в противоположном направлении. Подставив (П.4.12) и (П.4.13) в (П.4.4), после ряда преобразований получим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}A_3(\mathbf{k}_\perp,z)&=-i\frac{\lambda k_\perp^2}{4\pi}A_3(\mathbf{k}_\perp,z)+i\varkappa^*A_4^*(-\mathbf{k}_\perp,z),\\ \frac{\partial}{\partial z}A_4^*(-\mathbf{k}_\perp,z)&=-i\frac{\lambda k_\perp^2}{4\pi}A_4^*(-\mathbf{k}_\perp,z)+i\varkappa A_3(k_\perp,z),\end{aligned} \qquad (\text{П.4.14})$$

где $\varkappa$ определяется из соотношения (П.4.6) и $k=(\omega/c)\,n$.

Зададим на входе ($z = 0$) поле $A_4^*(-\mathbf{k}_\perp, 0)$; поскольку при $z > L$ нелинейного взаимодействия нет, положим при $z = 0$ отраженное поле $A_3(\mathbf{k}_\perp, L)$ равным нулю. При таких граничных условиях решение уравнений (П.4.14) имеет вид

$$A_3(\mathbf{k}_\perp, z) = ie^{-i\lambda_\perp^2 z/4\pi}\left(\frac{\varkappa^*}{|\varkappa|}\right)\frac{A_4(-\mathbf{k}_\perp, 0)}{\cos \varkappa L}\sin|\varkappa|(z-L), \quad \text{(П.4.15)}$$

$$A_4^*(-\mathbf{k}_\perp, z) = e^{-i\lambda_\perp^2 z/4\pi}A_4^*(-\mathbf{k}_\perp, 0)\frac{\cos|\varkappa|(z-L)}{\cos|\varkappa|L}.$$

На входе в нелинейную среду

$$A_3(\mathbf{k}_\perp, 0) = -i\left(\frac{\varkappa^*}{|\varkappa|}\operatorname{tg}|\varkappa|L\right)A_4^*(-\mathbf{k}_\perp, 0). \quad \text{(П.4.16)}$$

Из этого выражения видно, что плоская волна, являющаяся компонентой *произвольного* волнового фронта, ведет себя так же, как в случае взаимодействия плоских волн, с той лишь разницей, что каждая $\mathbf{k}_\perp$ компонента выходного пучка A_3 взаимодействует непосредственно с $-\mathbf{k}_\perp$ компонентой падающего пучка A_4.

Прибегнув к формальным преобразованиям, основанным на свойствах линейного параболического уравнения, можно показать, что соотношение (П.4.16) в совокупности с (П.4.4) и (П.4.13) дает

$$A_3(x, y, z < 0) = -i\left[\left(\frac{\varkappa^*}{|\varkappa|}\operatorname{tg}|\varkappa|L\right)\right]A_4^*(x, y, z < 0). \quad \text{(П.4.17)}$$

Следовательно, падающая комплексная волна с произвольным волновым фронтом A_4 порождает в области $z < 0$ отраженную и усиленную волну A_3, комплексно-сопряженную с A_4. То, что отраженная волна является комплексно-сопряженной, важно с точки зрения коррекции фазовых искажений [4.5]. Уравнение (П.4.17) в предельном случае $|\varkappa| L \ll 1$ получено Хеллвардом [6]. Его анализ, ограниченный условием $|\varkappa| L \ll 1$, не дал возможности обнаружить явление усиления.

Как было показано, генерация при четырехволновом взаимодействии возникает, когда $|\varkappa| L = \pi/2$. Это условие легче всего выполнить для волн A_3 и A_4, распространяющихся параллельно падающим волнам A_1 и A_2, поскольку при этом имеет место максимальное перекрытие взаимодействующих волн. Однако этот случай наименее интересен ввиду того, что «выходные» волны A_3 и A_4 вырождены по направлению распространения и частоте с волнами «накачки» A_1 и A_2.

Проблема генерации может быть решена постановкой добавочного зеркала, ориентированного, как показано на рис. П.4.3. Из уравнения (П.4.7) и граничных условий на зеркале следует, что условия генерации в этом случае имеют вид

$$|\varkappa| L = \operatorname{arctg}^{-1}(1/r), \quad \text{(П.4.18)}$$

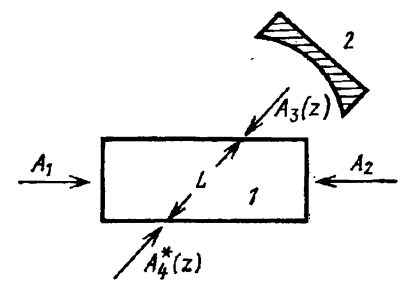


Рис. П.4.3. Схема четырехволнового взаимодействия в нелинейной среде (*1*) при наличии внешнего зеркала с коэффициентом отражения $\mathcal{R}_3 = |r|^2$ (*2*)

где $|r|^2$ — коэффициент отражения зеркала по мощности. Для зеркала с коэффициентом отражения, близким к единице, генерация имеет место при $\varkappa L = \pi/4$, что в два раза меньше, чем в отсутствие зеркала. Таким образом, введение внешнего зеркала представляет собой способ снижения порога генерации.

В ы в о д ы. Рассмотрен новый класс оптических эффектов, которые имеют место при вырожденном четырехволновом взаимодействии. Они включают усиление отраженной волны с обращением волнового фронта, усиление падающей волны и генерацию. Более детальному анализу и расчетам будет посвящена отдельная статья.

Д о п о л н е н и е. Серия недавно проведенных в Калтехе экспериментов подтвердила существование предсказанных эффектов возникновения усиленной волны, сопряженной по фазе с падающей, а также параметрической генерации. Эксперименты проводились на CS_2 с накачкой гигантскими импульсами рубинового лазера.

Дополнение титульного редактора к русскому переводу второго издания книги

МЕХАНИЗМЫ НЕЗАТУХАЮЩИХ ПУЛЬСАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ЛАЗЕРОВ

Режим незатухающих пульсаций интенсивности или, как его еще называют, пичковый режим присущ не всем типам лазеров. В таком режиме имеют тенденцию генерировать твердотельные лазеры, в том числе лазеры на рубине и на активных средах с неодимом, описанные в гл. 10. Пичковая генерация свойственна полупроводниковым лазерам [1]. Однако она не наблюдается в большинстве газовых лазеров, в том числе и в гелий-неоновом.

Для того чтобы понять, в чем тут дело, обратимся к формулам (11.4.10) и рассмотрим отношение скорости затухания релаксационных колебаний к их частоте

$$\frac{\theta}{\Omega_0} = \frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{t_c}{T_1}\frac{1}{\eta-1}}. \qquad (Д.1)$$

Для лазеров, которые работают в пичковом режиме, характерна малость параметра t_c/T_1, обеспечивающая медленность затухания релаксационных (переходных) колебаний интенсивности ($\theta \ll \Omega_0$). У большинства твердотельных лазеров $T_1 = 10^{-3} \ldots 10^{-4}$ с, $t_c = 10^{-7} \ldots 10^{-8}$ с, откуда $t_c/T_1 = 10^{-3} \ldots 10^{-5}$. Совсем иное соотношение между временами релаксации населенностей и поля наблюдается в гелий-неоновом лазере. Здесь $t_c/T_1 \gtrsim 1$, благодаря чему переходный процесс имеет апериодический характер.

В § 11.4 отмечалось, что уравнения баланса (11.4.2), (11.4.3), описывающие простейшую модель лазера, не имеют периодических решений, которые можно было бы отождествить с незатухающими пульсациями интенсивности. Однако при $t_c \ll T_1$ решения близки к периодическим, и это значит, что слабое возмущение системы может оказаться достаточным для качественного изменения динамики генерации.

Один из наиболее эффективных механизмов пичковой генерации твердотельных лазеров связан с нестабильностью их параметров в реальных условиях. Поскольку речь идет о возбуждении интенсивных незатухающих пульсаций, следует сосредоточить внимание на повторяющихся возмущениях, т. е. на модуляции параметров: а) с частотой, близкой к резонансной ($\Omega \approx \Omega_0$); б) с более низкой частотой, которая, тем не менее, превышает скорость затухания пичков ($\theta < \Omega \ll \Omega_0$).

Резонансная модуляция параметров лазера. В уравнениях баланса 11.4.2), (11.4.3) обнаруживаются четыре параметра: время релаксации разности населенностей T_1, время релаксации поля в резонаторе t_c, скорость накачки R и коэффициент Эйнштейна B (или сечение перехода σ). Из этого перечня можно сразу исключить T_1, поскольку зависимость этого параметра от внешних условий слаба и ею можно пренебречь. Остается рассмотреть поведение лазера при модуляции оставшихся трех параметров.

1. Предположим, что по гармоническому закону модулируются потери резонатора и, следовательно,

$$t_c^{-1} = \bar{t}_c^{-1}(1 + \tau \cos \Omega_M t). \qquad (Д.2)$$

С учетом (Д.2) уравнения (11.4.2), (11.4.3) преобразуются в

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi\left[BN - \frac{1}{\bar{t}_c}(1 + \tau \cos \Omega_M t)\right],$$

$$\frac{dN}{dt} = R - B\Phi N - \frac{N}{T_1} \qquad (Д.3)$$

Условия эффективного возбуждения пульсаций можно установить, оставаясь в рамках линейной теории. Поэтому будем искать решения (Д.3) в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \exp(i\,\Omega_M t) + \text{к. с.}, \quad |\Phi_1/\Phi_0| \ll 1. \tag{Д.4}$$

$$N = N_0 + N_1 \exp(i\,\Omega_M t) + \text{к. с.}, \quad |N_1/N_0| \ll 1.$$

Здесь Φ_0 и N_0 — стационарные решения невозмущенной системы, которые определяются формулами (11.4):

$$N_0 = 1/Bt_c; \quad \Phi_0 = (\eta - 1)/BT_1. \tag{Д.5}$$

Подставим (Д.4) в (Д.3), пренебрегая всеми членами высших порядков малости. Получившуюся линеаризованную систему приведем лишь для стационарного случая $\dot{\Phi}_1 = \dot{N} = 0$:

$$i\Omega_M \Phi_1 - B\Phi_0 N_1 = -\tau\Phi_0/2t_c, \tag{Д.6}$$

$$(i\,\Omega_M + B\Phi_0 + T^{-1}) N_1 + BN_0\Phi_1 = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями (Д.5) и (11.4.10), приведем решение системы (Д.6) к виду

$$\Phi_1 = \frac{(\Omega_0 T_1)^2}{2BT}\,\tau\,\frac{1}{(\Omega_M^2 - \Omega_0^2)\,T_1^2 - i\eta\Omega_M T_1}. \tag{Д.7}$$

В случае строгого резонанса ($\Omega_M = \Omega_0$) это выражение принимает вид

$$\Phi_1 = -(\Omega_0 T_1)^2\,\tau/2BT_1\eta. \tag{Д.8}$$

если учесть также, что $\Omega_M T_1 \gg \eta$. Формула (Д.8) справедлива до тех пор, пока $|\Phi_1| \ll \Phi_0$, откуда следует условие [2]

$$\tau \ll \tau_{кр} = 2\eta\, t_c/T_1. \tag{Д.9}$$

Когда неравенство (Д.9) нарушается, амплитуду колебаний интенсивности нельзя считать малой, а их форму гармонической. При $t_c/T_1 = 10^{-4}$, $\eta = 5$ получаем $\tau_{кр} = 10^{-3}$.

2. Перейдем к модуляции накачки, рассмотренной в § 11.4, но для простоты будем считать закон модуляции гармоническим:

$$R = \overline{R}\,(1 + \rho\cos\Omega_M \tau), \quad \rho \ll 1. \tag{Д.10}$$

Уравнения баланса при условии (Д.10)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi\left(BN - \frac{1}{t_c}\right), \quad \frac{dN}{dt} = \overline{R}\,(1 + \rho\cos\Omega_M t) - BN\Phi - \frac{N}{T_1}. \tag{Д.11}$$

Их решения можно опять предположить в виде (Д.5) и получить

$$\Phi_1 = -\frac{(\Omega_0 T_1)^2}{2BT_1}\,\eta\rho = \frac{1}{(\Omega_M^2 - \Omega_0^2)\,T_1^2 - i\eta\Omega_M T_1}, \tag{Д.12}$$

а в резонансном случае

$$\Phi_1 = -\,i\,\Omega_0\, T_1\,\rho/(2\,BT_1). \tag{Д.13}$$

Условие малости амплитуды пульсаций интенсивности теперь выглядит как

$$\rho \ll \rho_{кр} = 2\eta\sqrt{t_c\, T_1^{-1}\,(\eta - 1)}. \tag{Д.14}$$

Те же значения параметров, которые использовались выше, приводят теперь к $\rho_{кр} = 0{,}04$.

3. Рассмотрим, наконец, модуляцию коэффициента Эйнштейна:

$$B = \bar{B}(1 + \beta \cos \Omega_м t), \quad \beta \ll 1. \tag{Д.15}$$

Такая модуляция в принципе осуществима, поскольку коэффициент B зависит от расстройки частоты излучения относительно центра контура усиления активной среды. Линейный отклик системы на модуляцию параметра B выражается формулой

$$\Phi_1 = -\frac{(\Omega_0 T_1)^2}{2BT_1}\beta \frac{i\Omega_м T_1 + 1}{(\Omega_м^2 - \Omega_0^2) T_1^2 - i\eta\Omega_м T_1}. \tag{Д.16}$$

В пределе при $\Omega_м T_1 \gg \eta$ это выражение совпадает с (Д.7), а $\beta_{кр} = \tau_{кр}$.

Из всех рассмотренных способов резонансного возбуждения пичков в твердотельных лазерах модуляция накачки является наименее эффективной. Объясняется это значительной инерционностью процессов релаксации населенностей и накачки. Так как $\Omega_0 T_1 \gg 1$, то колебания накачки передаются разности населенностей (усилению) в значительно ослабленном виде. Как показали оценки, для достижения 100%-ной модуляции интенсивности достаточно модулировать потери или сечение перехода с глубиной менее 0,1%. Если модулируется накачка, то требуемая глубина модуляции больше 1%.

Для поддержания интенсивных пульсаций излучения посредством очень слабой модуляции параметров лазера частота модуляции должна быть близкой к резонансной: $\Omega_м \approx \Omega_0$. По мере удаления от резонанса требуемая глубина модуляции параметра резко возрастает. Однако для получения режима незатухающих пульсаций вовсе не обязательно стабильность частоты модуляции. Последняя может меняться в довольно широких пределах, но время от времени она должна проходить через резонанс [3]. За время пребывания $\Omega_м$ в окрестности Ω_0 в лазере успевают возбудиться интенсивные пульсации, которые затем будут затухать, но при условии, что интервал между последовательными прохождениями резонанса меньше постоянной времени затухания пичков, процесс в целом имеет вид незатухающих пульсаций.

Медленная модуляция параметров лазера. Пусть теперь $\Omega_м \ll \Omega_0$ и резонансные условия, следовательно, не достигаются. Возможность возбуждения интенсивных незатухающих пульсаций в этом случае связана, главным образом с тем, что при модуляции параметров система может многократно пересекать границу области генерации. Каждое возвращение в область выше влечет за собой переходный процесс, характер которого виден из рис. 11.17. В целом излучение представляет собой серии затухающих пичков, следующие одна за другой. В многомодовом лазере при несинфазной модуляции добротностей отдельных мод новая серия может возбудиться раньше, чем затухнет предыдущая [4], и в процессе генерации не будет перерывов. Для описания такого процесса уравнения (11.4.2), (11.4.3) непригодны, поскольку они охватывают только случай вырожденных мод. Более общая система балансных уравнений многомодового лазера, которая используется в подобного рода расчетах, была предложена в работах [5,6].

Одного факта вступления новой моды в генерацию еще не достаточно, чтобы можно было говорить об интенсивных пичках. Существенную роль здесь играет скорость пересечения порога. Оценки необходимой скорости, приводимые ниже, базируются на результатах нелинейной теории свободной генерации [3], которая в настоящей книге не приводится.

Амплитуда пичка тем больше, чем большее избыточное усиление достигнуто к моменту его излучения. Амплитуда будет заметно превышать уровень стационарной генерации, если выполняется условие

$$(\gamma - \gamma_{пор})/\gamma_{пор} \gtrsim 10^{-2},$$

где γ — показатель усиления, определяемый формулой (8.4.4): $\gamma_{\text{пор}}$ — пороговое усиление. Характерным временным масштабом процесса является интервал между пичками $T_0 \approx 10^{-5}$ с. Интенсивных пульсаций можно ожидать, если усиление моды, вступающей в генерацию, возрастает со скоростью

$$\gamma_{\text{пор}}^{-1}\, d\gamma/dt \geqslant 10^3 \text{ с}^{-1} \qquad (Д.17)$$

или с такой же скоростью снижается пороговое усиление.

Одним из реальных процессов вовлечения в генерацию новых мод является перестройка резонатора относительно контура усиления активной среды. Скорости перестройки, достаточные для возбуждения интенсивных пульсаций при переходе модой порога, найдем из (Д.17), воспользовавшись выражением (8.4.4) и учитывая, что $\gamma_{\text{пор}} \approx \gamma$:

$$\left|\frac{d\nu}{dt}\right| \geqslant 10^3\, g \left|\frac{dg}{d\nu}\right|^{-1} \left(\frac{d\nu}{dt}\right)_{\text{кр}}.$$

В случае однородно уширенной линии усиления лоренцевой формы

$$g(\nu) \propto [1 + 4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2\, T_2^2]^{-1}$$

и следовательно,

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_{\text{кр}} = 10^3\, \frac{1 + 4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2\, T_2^2}{8\pi^2\, T_2^2\, (\nu - \nu_0)}. \qquad (Д.18)$$

Полагая $T_2 = 10^{-12}$ с, $2\pi T_2 (\nu - \nu_0) = 10^{-1}$, находим $(d\nu/dt)_{\text{кр}} \approx 10^{15}$ Гц/с (или $3 \cdot 10^{-2}$ см$^{-1}$/мкс).

Процессы, ответственные за модуляцию параметров лазера в режиме свободной генерации. Выше было показано, как должны меняться во времени параметры лазера, чтобы излучение имело характер незатухающих пульсаций. Обсудим теперь причины, по которым такие изменения реализуются в процессе свободной генерации [2—4].

Вначале рассмотрим лазер, торцы активного элемента которого параллельны внешним зеркалам резонатора. Систему, имеющую несколько параллельных отражающих поверхностей, можно трактовать как совокупность связанных резонаторов. Перемещение одних отражающих границ относительно других видоизменяет систему и, в частности, влияет на потери. При поступательном движении соответствующей границы в направлении оси резонатора должны происходить периодические колебания добротности с периодом $T_{\text{м}} = \lambda/2v$, где v — скорость перемещения границы. Эти колебания оказываются резонансными ($T_{\text{м}} = T_0 = 2\pi/\Omega_0$) при условии

$$v = v_0 = 2\pi \sqrt{t_c T_1/(\eta - 1)}. \qquad (Д.19)$$

Подставив сюда значения $t_c = 3 \cdot 10^{-8}$ с, $T_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ с, $\eta = 10$, свойственные рубиновому лазеру, находим $v_0 \approx 2$ см/с.

Эффект периодической модуляции добротности резонатора достигается также при монотонном изменении температуры активного элемента, поскольку меняется показатель преломления, а вместе с ним и эффективная оптическая длина активного элемента $l_{\text{эфф}} = ln$. Приравнивая эффективную скорость деформации резонатора

$$v_{\text{эфф}} = \frac{dl_{\text{эфф}}}{dt} = l\, \frac{dn}{dT}\, \frac{dT}{dt}$$

введенной выше величине v_0, находим скорость нагрева, ассоциирующуюся с резонансной модуляцией добротности:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_0 = \frac{v_0}{cdn/dt}. \qquad (Д.20)$$

Подставляя значение $dn/dT = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ характерное для рубинового лазера, а также $l = 10$ см и $v_0 = 2$ см/с, получаем $(dT/dt)_0 \approx 10^5$ град/с. Такая скорость разогрева вполне реальна в условиях импульсной накачки рубинового лазера.

Глубина кинематической или температурной модуляции потерь, рассмотренной выше, определяется коэффициентом отражения торцов активного элемента. В отсутствие просветляющих покрытий френелевский коэффициент отражения составляет несколько процентов. Модуляции потерь с такой глубиной более чем достаточно для возбуждения интенсивных пульсаций в лазере.

Наиболее простым и действенным способом устранения паразитной кинематической и температурной модуляции добротности резонатора является наклон торцов активного элемента в сочетании с их просветлением. Если говорить о пучке, падающем на торец активного элемента извне, то при $\theta_{\text{накл}} > \theta_{\text{пучка}}/2$ отраженная часть энергии полностью теряется, причем отраженная энергия не зависит от положения активного элемента. Полагая, что генерируется только низшая поперечная мода (гауссов пучок), воспользуемся формулой (6.6.19) и запишем указанный критерий в виде

$$\theta_{\text{накл}} > \lambda/2\pi\rho_0 = \theta_1. \qquad (Д.21а)$$

Пучок, падающий на границу активного элемента изнутри, после двукратного отражения восстанавливает первоначальное направление и интерферирует с проходящим пучком, если сдвиг в поперечном направлении не превышает диаметра пучка. В этом случае активный элемент выполняет функцию селектора продольных мод. Положение максимумов пропускания на оси частот зависит от $\theta_{\text{накл}}$ и $l_{\text{эфф}}$. Изменение показателя преломления при нагреве активного элемента приводит к перемещению максимумов пропускания селектора относительно более слабо изменяющихся собственных частот резонатора, а вибрация зеркал сопровождается сканированием спектра мод относительно неподвижной характеристики селектора. Механизм возбуждения пульсаций связан, таким образом, не с резонансной модуляцией потерь, а с последовательным вовлечением в генерацию новых мод.

Переотраженные волны перестают интерферировать, когда пучок за проход по активному элементу туда и обратно смещается в поперечном направлении более чем на собственный диаметр. Так будет в случае

$$\theta_{\text{накл}} > \theta_2 = \rho_0/l, \qquad (Д.21б)$$

где l — длина активного элемента. Как правило, число Френеля велико ($\rho_0^2/\lambda l \gg 1$), благодаря чему $\theta_2 \gg \theta_1$.

При выполнении неравенства (Д.21б) ни механические вибрации, ни разогрев элементов лазера не приводят к модуляции добротности его резонатора. Это же относится к лазеру с зеркалами на торцах активного элемента. Но в этих случаях остаются механизмы, связанные со сканированием спектра собственных частот резонатора относительно контура усиления активной среды [7]. Вопрос лишь в том, может ли в условиях свободной генерации достигаться скорость свипирования, превышающая критическую (Д.18). Проведем необходимые оценки.

Частота продольной моды

$$\nu_q = qc/2L_{\text{эфф}},$$

где $q = 2L_{\text{эфф}}/\lambda$ — целое число: $L_{\text{эфф}} = L + l(n-1)$. Отсюда скорость перестройки резонатора

$$\frac{d\nu_q}{dt} = -q\frac{c}{2L_{\text{эфф}}^2}\frac{dL_{\text{эфф}}}{dt} = -\frac{c}{\lambda L_{\text{эфф}}}\frac{dL_{\text{эфф}}}{dt}. \qquad (Д.22)$$

Если перестройка осуществляется в результате движения зеркала, то $dL_{эфф}/dt = v$, и приравнивая (Д.22) $(dv/dt_{кр})$, находим

$$v_{кр} = \frac{\lambda L_{эфф}}{c}\left(\frac{dv}{dt}\right)_{кр}. \qquad (Д.23)$$

При $\lambda = 7 \cdot 10^{-5}$ см, $L_{эфф} = 10^2$ см, $(dv/dt)_{кр} = 10^{15}$ Гц/с, $v_{кр} \approx 2 \cdot 10^2$ см/с. Найденная скорость на два порядка больше резонансной скорости v_0 и заведомо не достигается при свободной генерации.

Оценим теперь темп разогрева активного элемента, требуемый для достижения критической скорости перестройки. Из (Д.22) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{cl}{\lambda L_{эфф}} \frac{dn}{dT} \frac{dT}{dt}, \text{ откуда } \left(\frac{dT}{dt}\right)_{кр} = \frac{\lambda L_{эфф}}{cl} \frac{(dv/dt)_{кр}}{dn/dT}. \qquad (Д.24)$$

Подставляя сюда значения, указанные выше, а также $L_{эфф}/l = 1$ $n = 1{,}8$, $dn/dT = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, получаем $(dT/dt)_{кр} \approx 2 \cdot 10^5$ град/с, что на порядок превышает реальную скорость нагрева рубина в условиях импульсной накачки лазера [1)].

Температура кристалла влияет не только на показатель преломления его матрицы, но и на положение спектральных линий примесных ионов. Скорость температурного дрейфа линии

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dT/dt}{dT/dv} \qquad (Д.25)$$

зависит от параметра dT/dv, который для рубинового лазера при $T \approx 300$ К равен 8 град/см$^{-1}$ [8]. Полагая скорость температурного дрейфа равной критической, находим, что ей соответствует скорость нагрева $(dT/dt)_{кр} \approx \approx 2{,}5 \cdot 10^5$ град/с. Значит температурный дрейф линии также не приводит к пичковой генерации (по крайней мере для рубина при комнатной температуре).

Сделанные оценки влияния перестройки резонатора на динамику генерации твердотельного лазера справедливы в случае равных добротностей мод. Селекция мод заметно меняет ситуацию. Наряду с ростом усиления вследствие сближения частоты моды с центром линии следует учитывать более быстрое уменьшение потерь при вхождении моды в полосу пропускания селектора. При наличии селектора критическая скорость перестройки резонатора падает в $(\delta\omega_{сел}T_2)^{-1}$ раз, где $\delta\omega_{сел}$ — полоса пропускания селектора. Если этот фактор превышает 10, то критическая скорость перестройки снижается до значений, допустимых в условиях работы импульсного лазера. Особенно отчетливо связь между динамической перестройкой резонатора и пичковым характером генерации выступает в свип-лазерах, в которых осуществляется принудительное свипирование частоты селектора в процессе генерации. Чтобы избежать влияния случайных факторов на динамику генерации, скорость принудительного свипирования берется выше скорости естественного свипирования, а практически и выше критической скорости перестройки. В этих условиях пичковый характер генерации неизбежен [3,9].

Говоря о механизмах незатухающих пульсаций, нельзя обойти вопрос о роли пространственной неоднородности распределения инверсной разности населенностей в активной среде. Такая неоднородность возникает в процессе генерации, если число одновременно возбуждающихся мод невелико. Неоднородность насыщения активной среды можно предотвратить перемещени-

[1)] Используемые здесь и выше данные относительно dn/dT для рубина взяты из работы [28]. В монографии [29, с. 190] приведены значения, которые на порядок меньше этих. Если принять $dn/dT \approx 10^{-6}$, то разогрев кристалла можно безоговорочно исключить из числа факторов, влияющих на кинетику генерации.

ем активного элемента относительно фиксированной картины стоячих волн (мод резонатора) [10, 11] либо сканированием этой картины относительно неподвижной активной среды (так называемый метод компенсируемой фазовой модуляции) [12, 13]. Одновременно стабилизируется и интенсивность излучения. На огромном экспериментальном материале показано, что режим незатухающих пульсаций (особенно нерегулярных) ассоциируется с малым числом одновременно генерирующих мод, которые чередуются в процессе работы лазера (см., например, [3]).

Пространственная неоднородность инверсии, наведенная в процессе генерации, сама по себе не может рассматриваться как причина пульсаций излучения. Это следует из того, что система балансных уравнений многомодового лазера имеет единственное стационарное решение, которое к тому же устойчиво [14]. Дело, следовательно, в том, что эффект неоднородного насыщения активной среды обостряет чувствительность лазера к действию возмущений. Не исключено, что критическая скорость перестройки снижается по сравнению с найденной по формуле (Д.18), в которой учтена дискриминация мод лишь по их отстройке от центра линий. Однако до конца этот вопрос не выяснен.

Изложенные представления о природе незатухающих пульсаций интенсивности полностью адекватны лазеру на алюмоиттриевом гранате с двухзеркальным резонатором. Такие меры, как повышение жесткости конструкции, стабилизация теплового режима, наклон торцов активного элемента и их просветление, позволяют избавиться от пичкового характера генерации [2,4].

Специфика лазера с кольцевым резонатором вытекает из того, что его модами являются бегущие волны. В отсутствие невзаимных эффектов каждому значению собственной частоты резонатора отвечает пара вырожденных по частоте волн, бегущих в противоположных направлениях [1]. Рассмотрение идеализированной модели лазера, в котором не учитываются дополнительные связи между встречными волнами, показывает, что устойчивым является режим генерации бегущей волны на частоте резонатора, ближайшей к центру линии [15, 16]. Если торцы активного элемента перпендикулярны оси резонатора, то вследствие френелевского отражения будут возбуждаться стоячие волны и к пичковой генерации приводят те же факторы, что и в лазере с двухзеркальным оптическим резонатором. Однако в кольцевом лазере имеется дополнительный механизм неустойчивости, который не устраняется разъюстировкой активного элемента и стабилизацией параметров. Он обусловлен линейной связью между вырожденными по частоте волнами через обратное рассеяние на микронеоднородностях зеркал, активного элемента и других элементов лазера [17, 18]. Когда коэффициент связи превышает некоторое критическое значение, режим бегущей волны оказывается неустойчивым по отношению к возбуждению встречной волны. Возникает режим синусоидальной противофазной автомодуляции встречных волн с постоянной общей мощностью излучения [19, 20].

В лазерах с невырожденным спектром генерируемых частот линейное рассеяние не приводит к эффективной связи между модами. Однако эту связь могут обеспечить нелинейные процессы, поскольку они сопровождаются преобразованием частоты. Механизм неустойчивости стационарной генерации, основанный на учете реактивной кубичной нелинейности матрицы лазерного кристалла[1], рассмотрен в работе [21]. Благодаря этой нелинейности в лазере наряду с однофотонным процессом вынужденного излучения идут четырехфотонные параметрические процессы. Элементарный акт параметрического взаимодействия трех мод приводит к уменьшению (увеличению) числа фотонов центральной моды на два при одновременном увеличении (уменьшении) на единицу числа фотонов каждой из боковых мод. Общая энергия поля при этом сохраняется, так как $\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2$. Трехмодовой модели лазера при-

[1] Вращение лазера, наличие в резонаторе невзаимного, например магнитооптического, элемента и др. приводят к снятию вырождения и расщеплению частот встречных волн.

сущ сложный спектр релаксационных колебаний. При возмущении состояния стационарной генерации амплитуды всех трех мод могут колебаться синфазно, амплитуды боковых мод могут колебаться в противофазе с амплитудой центральной моды и, наконец, возможны противофазные колебания амплитуд боковых мод при стационарной центральной. Последний тип колебаний оказывается незатухающим при достаточно большой нелинейности матрицы кристалла и должен проявиться как чередование генерирующих мод. Такой режим часто наблюдается в рубиновом лазере, если даже приняты меры по стабилизации механических параметров и технические флуктуации не могут, следовательно, быть причиной нестационарной генерации.

Нелинейные эффекты, ассоциирующиеся с кубичной нелинейностью, не ограничиваются параметрическим воздействием мод. К их числу относится также самофокусировка, рассмотренная в § 18.7 Самофокусировка тоже может быть причиной неустойчивости стационарной генерации [3,22]. Слой нелинейной среды действует подобно собирающей линзы и, будучи помещенным в резонатор, способствует концентрации поля излучения вблизи оси. Благодаря этому дифракционные потери убывают с ростом интенсивности генерации и, если эффект достаточно силен, такая зависимость приводит к раскачке пульсаций. Проявлений этого механизма неустойчивости следует ожидать в тех случаях, когда велики дифракционные потери, т. е. используются резонаторы неустойчивых и пограничных конфигураций, разъюстированные и сильно диафрагмированные резонаторы.

Итак, в лазерах на алюмоиттриевом гранате с неодимом пульсации интенсивности излучения обусловлены техническими причинами — флуктуациями параметров лазера в процессе генерации. В лазере на рубине действуют и другие механизмы, связанные с реактивной нелинейностью матрицы активного элемента (рубин более нелинеен, нежели гранат [23]). Наконец, в лазере на силикатном стекле с примесью неодима при определенных условиях на динамике генерации сказывается еще один нелинейный эффект — насыщаемое поглощение [24, 25]. Под влиянием коротковолновой компоненты спектра накачки ($\lambda \lesssim 400$ нм) в стекле образуются центры, поглощающие на рабочей длине волны 1,06 мкм. Количество этих центров не столь велико, чтобы существенно поднять порог генерации. Поэтому насыщение поглощения полем излучения лазера не приводит к формированию гигантских импульсов, рассмотренных в § 11.1. Однако для того чтобы режим стационарный генерации стал неустойчивым и уступил место пичковому, достаточно небольшого насыщаемого поглощения [3,24], поскольку параметр (Д.1)·мал.

Предотвратить возникновение центров поглощения в стекле, а следовательно, и связанных с ними пульсаций излучения очень несложно: достаточно установить между лампой накачки и активным элементом фильтр, поглощающий в диапазоне $\lambda \lesssim 400$ нм.

В начале настоящего дополнения упоминалось о том, что полупроводниковые лазеры также предрасположены к пичковой генерации. Механические колебания и температурный дрейф в этих лазерах не могут возбуждать и поддерживать пульсации, поскольку чрезвычайно высока частота релаксационных колебаний ($\Omega_0 \approx 10^9 \ldots 10^{10}$ с$^{-1}$). Нелинейные же механизмы пульсаций здесь весьма эффективны и естественны. Неоднородность в распределении тока инжекции вдоль p — n-перехода, практически неизбежная вследствие нелинейности кристаллов, приводит к тому, что более слабо накачиваемые участки действуют подобно насыщающемуся поглотителю [1]. Значительной должна быть и нелинейность показателя преломления полупроводников, например, вследствие зависимости от числа свободных носителей [27].

---

[1] Кубичной нелинейности соответствует связь между поляризацией среды и приложенным полем вида $P = \chi E^3$.

Список рекомендуемой литературы по квантовой механике

Мессиа А. Квантовая механика: Пер. с франц. — М.: Наука, 1978.
Шифф Л. Квантовая механика: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1957.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
Давыдов А. С. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики.— М.: Высшая школа, 1963.
Фок В. А. Начала квантовой механики.— Наука, 1976.

Список литературы

К главе 1

1. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы.— М.: ИЛ, 1962.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
3. **Serber R., Townes C. H.** In: Symposium on Quantum Electronics. Columbia Univ. Press, N. Y. 1960, p. 233.

К главе 2

1. **Leighton R. B.** Principles of Modern Physics. Mc Graw-Hill, N. Y., 1959.

К главе 3

1. **Киттель Ч.** Элементарная статистическая физика.— М.: ИЛ, 1960.
2. **Tolman R. C.** Principles of Statistical Mechanics.— Oxford Univ. Press, London, 1938.
3. **Fano U.** Rev. Mod. Phys., **29**, 74 (1957).

Дополнительная литература

4*. **Файн В. М., Ханин Я. И.** Квантовая радиофизика.— М.: Сов. радио, 1965.
Файн В. М. Квантовая радиофизика.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 1. Фотоны и нелинейные среды.
5*. **Вейлстеке А.** Основы теории квантовых усилителей и генераторов. — М.: ИЛ, 1963.

К главе 4

1. **Brillouin L.** Wave Propagation in Period Structures. Dover, N. Y., 1953. (Имеется перевод более позднего издания: Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах.— М.: ИЛ, 1959).
2. **Bommel H. E., Dransfeld K.**— Phys. Rev. Letts,, 1, 234 (1958).
3. **Seavey M. H., Fostier N. F.**— Proc. IEEE, 53, № 10 (1965).
4. **Киттель Ч.** Квантовая теория твердых тел: Пер. с англ.— М.: Наука, 1967.
5. **Weinreich G.** Solids. Wiley, N. Y., 1965.
6. **Макс Борн, Хуан Кунь.** Динамическая теория кристаллических решеток: Пер. с англ.— М.; ИЛ, 1958.

Дополнительная литература

7*. **Ансельм А. И.** Введение в теорию полупроводников.— М; Физматгиз, 1962.
8*. **Займан Дж.** Принципы теории твердого тела: Пер. с англ.— М.; Мир., 1966.
9*. **Люиселл У.** Связанные и параметрические колебания в электронике: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1963.

К главе 5

1. **Ramo S., Whinnery J. R., Van Duzer T.** Fields and Waves in Communications Electronics. Wiley, N. Y., 1965. (Имеется перевод более раннего издания: Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике.—М; Гостехиздат, 1948).
2. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики: Пер. с англ.— М.: Наука, 1970.
3. **Slater J. C.** Microwave Electronics. Van Nostrand, Princeton, N. Y., 1950. (Имеется перевод более раннего издания: Слэтер Дж. Электроника сверхвысоких частот.— М.: Сов. радио, 1948).

Дополнительная литература

4*. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.

К главе 6

1. **Пирс Дж.** Теория и расчет электронных пучков: Пер. с англ. — М.; Сов. радио, 1956.
2. **Ramo S. Whinnery J. R., Van Duzer T.** Fields and waves in communication electronics. Wiley, N. Y., 1965.
3. **Yariv A.** Introduction to optical electronics. Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1971.
4. **Siegman A. E.** An introduction to lasers and masers. Mc Graw-Hill, N. Y., 1968.
5. **Kogelnik H., Li T.** Laser beams and resonators.— Proc. IEEE, **54**, 1312 (1966).
6. **Herriot D., Kogelnik H., Kompfner R.** Off-axis paths in spherical mirror interferometers.— Appl. Opt. **3**, 523 (1964).
7. **Kogelnik H.** On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss and gain variation.— Appl. Opt., **4**, 1562 (1965).
8. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики: Пер. с англ.— М.: Наука, 1970.
9. **Kogelnik H. Rigrod W.**— Proc. IRE, **50**, 230 (1962).
10. **Dabby F. W., Whinnery J. R.** Thermal self-focusing of laser beams in lead glasses.— Appl. Phys. Letts, **13**, 284 (1968).
11. **Kawakami S. Nishizawa J.** An optical waveguide with the optimum distribution of the refractive index with reference to waveform distortion.— IEEE Trans, MTT-16, 814 (1968).
12. **Marcuse D.** The impulse response of an optical fiber with parabolic index profile. — Bell Syst. Tech. J. **52**, 1169 (1973).
13. **Casperson L.** Modes and spectra of high gain lasers. Ph. D. Thesis California Inst. of Technology,, 1971.
14. **Tien P. K., Gordon J. P., Whinnery J. R.** Focusing of a light beam of Gaussian field distribution in continuous and periodic lenslike media.— Proc. IEEE, **53**, 129 (1965).
15. **Casperson L., Yariv A.** The gaussian mode in optical resonators with a radial gain profile.— Appl. Phys. Letts, **12**, 355 (1968).

16. **Беннет В.** Механизмы возбуждения газовых лазеров.— В кн.: Газовые лазеры/Пер. с англ.— М.: Мир, 1968, с. 27.
17. **Casperson L.** Gaussian light beams in inhomogeneous media. — Appl. Opt., **12**, 2434 (1973).
18. **Zachos T. H.** Gaussian beams from CaAs junction lasers. — Appl. Phys. Letts, **12**, 318 (1969).
19. **Zachos, T. H., Ripper J. E.** Resonant modes of GaAs junction lasers,— — IEEE J., QE-5,29 (1969).
20. **Yonezu H.** et al., A GaAs — Al_xGa_{1-x} As double heterostrusture planar Stripe Laser.— Jap. J. of Appl. Phys., **12**, 1585 (1973).

Дополнительная литература

21. **Маркузе Д.** Оптические волноводы: Пер. с англ.— М.: Мир, 1974.
22. **Arnaud J. A.**, Hamiltonian theory of beam mode propagation. Progress in optics. Ed. by Wolf E., N. Holland Pub. Co., Amsterdam. 1973.
23* **Вайнштейн Л. А.** Открытые волноводы и открытые резонаторы.— М.: Сов. радио, 1966.

К главе 7

1. **Dicke R. H.** Molecular amplification and generation systems and methods. U. S. Patent No. 2, 851, 652 (Sept. 9, 1958)
2. **Schawlow A. L., Townes C. H.** Infrared and optical masers. — Phys., Rev., 112, 1940 (1958).
3. **Yariv A., Gordon J. P.** The laser.— Proc. IEEE, **51**, 4 (1963).
4. **Фокс А., Ли Т.** Резонансные типы колебаний в интерферометре квантового генератора.— В кн.: Лазеры/Пер. с англ.— М.,; ИЛ, 1963, с. 325.
5. **Бойд Дж., Гордон Дж.** Конфокальный резонатор со многими типами колебаний для квантовых генераторов миллиметрового и оптического диапазонов.— Там же, с. 363.
6. **Boyd G. D., Kogelnik H.**, Generalized confocal resonator theory.— Bell System Tech. J., **41**, 1347 (1962).
7. **Ramo S., Whinnery J. R., Van Duzer T.** Fields and waves in communication electronics, Wiley,, N. Y., 1965. (Имеется перевод более раннего издания: Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике.— М.: Гостехиздат, 1950).
8. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики: Пер. с англ.— М.: Наука, 1973.
9. **Siegman A. E.** Unstable optical resonators for laser applications.— Proc. IEEE, 53, 277 (1965).
10. **Siegman A. E., Miller H. Y.** Unstable optical resonator loss calculations using the prony method.— Appl. Opt. 9, 2729 (1970).
11. **Reilly J. P.**, Single-mode operation of a high-power pulsed N_2/CO_2 laser.— IEEE J., QE-8, 136 (1972).
12. **Ананьев Ю. А.** Неустойчивые резонаторы и их применение.— В кн.; Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова,— 1971, № 6, с. 3.
13. **Freiburg R. J., Chenausky P. P., Buczek C. J.** Unidirectional unstable ring lasers.— Appl. Opt., 12, 1140 (1973).
14. **Chodzko R. A., Mirels H., Roehrs F. S., Pedersen R. J.** Application to a single frecuency unstable cavity to a CW HW laser. — IEEE J. QE-9, 523 (1973).
15. **Casperson L. W.** Mode stability of lasers and periodic optical systems.— — IEEE, J., QE-10, 629 (1974).

К главе 8

1. **Bloch F., Hansen W. W. Packard M.**, Nuclear induction. — Phys. Rev., **70**, 960 (1946).
2. **Bloembergen N.** Nuclear magnetic relaxation, Benjamin, N. Y., 1961.
3. **Морс Ф. М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1958.

4. **Kronig R. L.**— J. Opt. Soc. Am., **12**, 547 (1926); Kramers H. H. — Atti Congr. Intern. Fis., **2**, 545 (1927).
5. **Einstein A.** Die Quanten Theorie der Strahlung.— Phys. Zeit., **18**, 121 (1917).
6. **Portis A. M.** Inhomogeneous linebroadening in F centers. — Phys. Rev., **91**, 1071 (1953).
7. **Yariv A.** Introduction to optical electronics. Holt, Rinehart and Winston, N. Y. 1971.
8. **Ярив А.** Квантовая электроника и нелинейная оптика: Пер. с англ.— М.; Сов. радио, 1972.
9. **Дитчберн Р.** Физическая оптика: Пер. с англ.— М.: Наука, 1965.
10*. **Апанасевич П. А.** Основы теории взаимодействия света с веществом. — Минск: Наука и техника, 1977.

К главе 9

1. **Weber J.** Amplification of microwave radiation by substances not in thermal equilibrium.— IRE Trans., **ED-3**,1 (1953).
2. **Gordon J. P., Zeiger H. J., Townes C. H.** Molecular microwave oscillator and new hyperfine structure in the microwave spectrum of NH_3. — Phys. Rev., **95**, 282 (1954); The maser — new type of microwave amplifier, frequency standart, and spectrometer.— Phys. Rev. 99, 1264 (1955).
3. **Басов Н. Г., Прохоров А. М.**, Применение молекулярных пучков для радиоспектроскопического изучения вращательных спектров молекул. — ЖЭТФ, т. 27 с. 431 (1954); О возможных методах получения активных молекул для молекулярного генератора.— ЖЭТФ, т. 28, с 249 (1955).
4. **Schawlow A. L., Townes C. H.** Infrared and optical masers,—Phys. Rev., **112**, 1940 (1958).
5. **Maiman T. H.** Stimulated optical radiation in ruby. — Nature, **187**, 493 (1960).
6. **Javan A., Bennett W. B. Jr., Herriott D. R.** Population inversion and continuous optical maser oscillation in gas discharge containing a He-Ne mixture.— Phys. Rev., Letts, **6**, 106 (1961).
7. Лэмб. У. Теория оптических мазеров.— В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика/Пер. с англ.— М.: Мир, 1966, с. 281.
8. **Laures P.** Variation of the 6328 Å gas laser output power with mirror transmission.— Phys. Letts, **10**, 61 (1964).

Дополнительная литература

9*. **Фабрикант В. А., Вудынский М. М., Бутаева Ф. А.** Способ усиления электромагнитных излучений. А. С. 123209 (СССР).— Опубл. в БИ, 1959, № 20, с. 29.
10*. **Дунская И. М.** Возникновение квантовой электроники.— М.: Наука, 1974.
11*. **Файн В. М., Ханин Я. И.** Условие самовозбуждения лазера. — ЖЭТФ, 1961, **41**, с. 1498.
12*. **Davis L. W.** Semiclassical treatment of the optical masers.— Proc. IRE, **51**, 76 (1963)

К главе 10

1. **Maiman T. H.** Stimulated optical radiation in ruby masers. — Nature, **187**, 493 (1960).
2. **Maiman T. H.** Optical and microwave — optical experiments in ruby.— Phys. Rev., Letts, **4**, 564 (1960).
3. **Cronemeyer D. C.** Optical absorption characteristics of pink ruby.—J. Opt. Soc. Am. **56**, 1703 (1966).
4. **Schawlow A. L.** Fine structure and properties of chromium fluorescence.— In: Advances in Quantum Electronics. J. R. Singer. ed. Columbia University Press, N. Y. 1961, p. 53, (имеется перевод) в кн.: Лазеры.— М.: ИЛ, 1963, с. 51).

5. **Yariv A.** Energy and power considerations in injection and optically pumped lasers.— Proc. IEEE, **51**, 1723 (1963).
6. **Geusic J. E., Marcos H. M., Van Uitert L. G.** Laser oscillations in Nd-doped yttrium aluminum, yttrium gallium and gadolinium garnets.— Appl. Phys. Letts, **4**, 182 (1964).
7. **Kushida T., Marcos H. M., Geusic J. E.** Laser transition cross section and fluorescence branshing ratio for Nd^{3+} in yttrium alluminum garnet.— Phys. Rev., **167**, 1289 (1968)
8. **Snitzer E., Young C. G.** Glass lasers.— In: Lasers. v. 2, A. K. Levine, ed. Marcel Dekker, Inc., N. Y., 1968, p. 191.
9. **Javan A., Bennett W. R., Jr., Herriott D. R.** Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a He — Ne mixture.— Phys. Rev. Letts, **6**, 106 (1961).
10. **White A. D., Rigden J. D.** Simultaneous gas maser action in the visible and infrared.— Proc. IRE, **50**, 2366 (1962).
11. **Bennett W. R.** Gaseous optical masers.— Appl. Opt., Suppl. 1, Optical Masers, 1962, p. 24. (Имеется перевод: Беннет А. В. Газовые лазеры; Хивенс О. Лазеры на твердых веществах. — М.: Мир. 1964.
12. **Patel C. K. N.** Interpretation of CO_2 optical maser experiments.— Phys. Rev. Letts, **12**, 588 (1964); Continuous-wave laser action on vibrational rotational transitions of CO_2. — Phys. Rev., **136**, A 1187 (1964); also LeGay F., Le Gay-Sommaire N. — «Compt. Rendu., **260**, 3339 (1964).
13. **Herzberg G. H.** Spectra of diatomic molecules. Van Nostrand, Princeton, N. Y., 1963.
14. **Patel C. K. N.** High power CO_2 lasers.— Sci. Am., **219**, 22 (1968).
15. **Taylor R. L., Bitterman S.** Survey of vibrational and relaxation data for processes important in CO_2 — N_2 laser system.— Rev. Mod. Phys., **41**, 26 (1969).
16. **Басов Н. Г., Игошин В. И., Маркин Е. П., Ораевский А. Н.** Динамика химических лазеров.— В кн.: Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова.— М.: Сов. радио, 1971, № 2, с. 3.
17. **Abrams R. L., Bridges W. B.** Characteristics of sealed-off waveguide CO_2 lasers.— IEEE. J. QE-9, 940 (1973).
18. **Beaulieu J. A.** High peak power gas lasers.— Proc. IEEE, **59**, 667 (1971).
19. **Hall R. N., Fenner G. E., Kingsley. J. D., Soltys T. J. Carlson R. O.** Coherent light emission from GaAs junctions, — Phys. Rev. Letts, **9**, 366 (1962).
20. **Nathan M. I., Dumke W. P., Burns G., Dills F. H., Lasher G.** Stimulated emission of radiation from GaAs p — n-junctions.— Appl. Phys. Letts, **1**, 62, (1962).
21. **Quist T. M., Keyes R. J., Krag W. E., Lax B., Me Whorter A. L., Rediker R. H., Zeiger H. J.** Semiconductor maser of GaAs. — Appl. Phys. Letts, **1**, 91 (1962).
22. **Dumke W. F.** Interband transitions and maser action. — Phys. Rev., **127** 1559 (1962).
23. **Kittel C.** Introduction to solid state physics, 3d ed., Wiley, N. Y., **1966**. (Имеется перевод второго издания: Киттель Ч. Введение в физику твердого тела.— М.: Физматгиз, 1963).
24. **Smith R. A.** Wave mechanics of crystalline solids. Chapman and Hall, London, 1961.
25. **Bernard M. G., Duraffourg G.** Laser conditions in semiconductors.— Phys. Status Solidi, **1**, 699 (1961).
26. **Stern F.** Semiconductor lasers: theory. — In: Laser Handbook, Arecchi F. T. and Schulz-Du Bois E. O., eds, North-Holland Pud. Co., Amsterdam, 1972, v. B, p. 425.
27. **Konnerth K., Lanza C.** Delay between current pulse and light emission of a gallium arsenide injection laser.— Appl. Phys. Letts, **4**, 120 (1964).
28. **Nelson D. F., Gershenzon M., Ashkin A., D'asaro A., Sarace J. C.** Band—filling model for GaAs injection luminescence.— Appl. Phys. Letts, **2** 182 (1963).

29. **Archer R. J. Leite R. C. C., Yariv A., Porto S. P. S., Whelan J. M.** Electron-hole and electron-impurity band tunneling in GaAs luminescent junctions.— Phys. Rev. Letts., **10**, 483 (1963).
30. **Halperin B. I. Lax M.** Impurity-band tails in the high-density limit in minimum counting methods.— Phys. Rev., **148** 722 (1966),
31. **Nathan M. I.** Electroluminescence and photoluminescence of GaAs at 77°K. — Phys. Rev., **132**, 1482 (1963).
32. **Yariv A., Leite R. C. C.** Dielectric-waveguide mode of light propagation in $p - n$ junctions. — Appl. Phys. Letts., **2**, 55 (1963); also in: Quantum electronics III, ed. by P. Grivet and N. Bloembergen. Columbia University Press, N. Y., 1964, p. 1873.
33. **Anderson W. W.** Mode confinement in junction lasers.— IEEE J., **QE-1**, 228 (1965).
34. **Stern F.** in: Radiative Recombinations in Semiconductors, Proc. 7th Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Academic Press, N. Y. and Dunod, Paris, 1964, p. 165,
35. **Алферов Ж. И., Андреев В. М., Корольков В. И., Портной Е. Л., Третьяков Д. Н.** Инжекционные свойства гетеропереходов n $Al_xGa_{1-x}As$ — — p GaAs — ФТП, **2**, 1016 (1968).
36. **Hayashi J., Panish M. B. Foy P. W.** A low-threshold room rempèrature injection laser.— IEEE J., QE-5, 211 (1969).
37. **Kressel H., Nelson H.** Close confinement gallium arsenide $p - n$ junction laser with reduced optical loss at room temperature. — RCA Review, **30**, 106 (1969).
38. **Hayashi I., Panish M. B., Rinehart F. K.** GaAs — Ga_{1-x} Al_xAs double heterostructure injection lasers. — J. Appl. Phys., **42**, 1929 (1971); **Hayashi I., Panish M. B., Foy P. W., Sumski S.** Junction lasers, which operate continuously at room temperature.— Appl. Phys. Letts, **17**, 109 (1970).
39. **Weiser K., Levitt R. S.** Radiative recombinations from indium phosphide in $p - n$-junctions.— Bull. Am. Phys. Soc. 8, 29 (1963).
40. **Melngailis I.** Masers action in InAs diodes.— Appl. Phys. Letts., **2**, 176 (1963).
41. **Melngailis I., Rediker R. H.** Properties of InAs lasers. — J. Appl. Phys., **37**, 899 (1966)
42. **Phelan R. J. Calawa A. R., Rediker R. H., Keyes R. J., Lax B.** Infrared InSb laser in hihg magnetic fields.— Appl. Phys. Letts, **3**, 143 (1963).
43. **Butler J. F., Calawa A. R., Phelan R. J., Jr., Strauss A. J. Rediker R. H.** PbSe diode laser.— Sol. St. Commun., **2**, 303 (1964).
44. **Butler J. F., Calawa A. R., Phelan R. J. Jr., Harman T. C., Strauss A. J., Rediker R. H.** PbTe diode laser.— Appl. Phys. Letts, **5**, 75 (1964).
45. **Holnyak N. Jr; Bevacqua S. F.** Coherent (visible) light emission from Ga (As_{1-x} P_x) junctions.— Appl. Phys. Letts., **1**, 82 (1962).
46. **Melngailis I., Strauss A. J., Rediker R. H.** Semiconductor diode masers of (In_xGa_{1-x}) As. — Proc. IEEE, **51**, 1154 (1963).
47. **Alexander F. B., Bird V. R., Carpenter D. R., Manley G. W., Mc Dermott P. S., Peloke J. R., Quinn H. F., Riley R. J., Yetter L. R.** Spontaneous and stimulated infrared emission from indium phosphide arsenide diodes. — Appl. Phys. Letts, **4**, 13 (1964).
48. **Calawa A. R., Melngailis I.** Infrared radiation from GaSb diodes.— Bull. Am. Phys. Soc., 8, 29 (1963).
49. **Butler J. F., Harman T. C.** Long wavelength infrared Pb_{1-x} Sn_xTe diode lasers.— Appl. Phys. Letts, **12**, 347 (1968).
50. **Stockman D. L., Mallory W. R., Tittel K. F.** Stimulated emission in aromatic organic compounds.— Proc. IEEE, **52**, 318 (1964).
51. **Sorokin P. P. Lankard J. R.** Stimulated emission observed from an organic dye, chloraluminum phtalocyanine.— IBM J. Res. Develop., **10**, 162 (1966).
52. **Schafer F. P., Schmidt W., Volze J.** Organic dye solution laser.— Appl. Phys. Letts, 9, 306 (1966).
53. **Snavely B. B.** Flachlamp-excited dye laser.—Proc. IEEE, **57**, 1374 (1969).

54. **Peterson O. G., Tuccio S. A., Snavely B. B.** CW operation of an organic dye laser.— Appl. Phys. Letts., 17, 266 (1970).
55. **Soffer B. H., McFarland B. B.** Continuously tunable, narrow band organic dye lasers.— Appl. Phys. Letts, 10, 266 (1967).
56. **Dienes A., Ippen E. P., Shank C. V.** High-efficiency tunable CW dye laser.— IEEEJ., QE-8, 388 (1972)

Дополнительная литература

57*. **Пантел Р., Путхоф Г.** Основы квантовой электроники.— М.: Мир, 1972.
58*. Басов Н. Г., Вул Б. М., Попов Ю. М. Квантовомеханические полупроводниковые генераторы и усилители электромагнитных колебаний.— — ЖЭТФ, т. 37, с. 587 (1959).
59*. Басов Н. Г., Крохин О. Н., Попов Ю. М. Получение состояний с отрицательной температурой в p — n—переходах вырожденных полупроводников.- ЖЭТФ, т. 40, с. 1879 (1961).
60*. Дунская И. М. Возникновение квантовой электроники.— М.: Наука, 1974.
61*. **Богданкевич О. В., Дарзнек С. А., Елисеев П. Г.** Полупроводниковые лазеры.— М.: Наука, 1976.
62*. **Ривлин Л. А.** Динамика излучения полупроводниковых квантовых генераторов.— М.: Сов. радио, 1976.
63*. Лазеры на красителях: Пер. с англ./Под ред. Ф. Г. Шефера.— М.: Мир, 1976.

К главе 11

1. **Hellwarth R. W.** Control of fluorescent pulsations. — In: Advances in Quantum Electronics. Ed. by J. R. Singer. Columbia University Press. N. Y 1961, p. 334.
2. **McClung E. J., Hellwarth R. W.** Giant optical pulsations from ruby — J. Appl. Phys., 33, 828 (1962).
3. **Hellwarth R. W.** Q-modulation of lasers.— In: Lasers, v. I, ed. by A. K. Levine. Dekker, Inc., N. Y., 1966, p. 253.
4. **Wagner W. G., Lenguel B. A.** Evolution of the giant pulse in a laser. — J. Appl. Phys., 34, 2042 (1963).
5. **Mocker H., Collins R. J.** Mode competition and self-locking effects in a Q-switched ruby laser.— Appl. Phys. Letts., 7, 270 (1965).
6. **Yariv A.** Internal modulation in multimode laser oscillators. J. Appl. Phys. 36, 388 (1965).
7. **DiDomenico M. Jr.** Small signal analysis of internal modulation of lasers.— J. Appl. Phys., 35, 2870 (1964).
8. **Hargrove L. E., Fork R. L., Pollack M. A.** Locking of He-Ne laser modes induced by sinchronous intracavity modulation.— Appl. Phys. Letts. 5, 4 (1964).
9. **Fork R. L., Herriott D. R., Kogelnik H.** A scanning spherical mirror interferometer for spectral analysis of laser radiation. — Appl. Opt. 3, 1471 (1964).
10. **DeMaria A. J., Glenn W. H., Brienza M. J., Mack M. E.** Picosecond laser pulses.— Pros. IEEE, 57, 2 (1969).
11. **De Maria A. J.** Mode locking.— Electronics, 1968, Sept. 16, p. 112; Smith P. W. Mode locking of lasers.— Proc. IEEE, 58, 1342 (1970).
12. **Teng T. C. Gerlach R., Pao Y. H.** Mode locking of a 6118 Å laser by use of an Ne discharge cell.— IEEE J., QE—9, 784 (1973).
13. **McDuff O. P., Harris S. E.** Nonlinear theory of the internally loss modulated laser.— IEEE J., QE-3, 101 (1967).
14. **McDuff O. P., Harris S. E.** Theory of FM laser oscillation.— IEEE J., QE-1, 245 (1965).

15. **Siegman A. E., Kuizenga D. J.** Simple analytic expressions for AM and FM mode locked pulses in homogeneous lasers.—Appl. Phys. Lett. **14**, 181 (1969).
16. **Kuizenga D J., Siegman A. E.** FM and AM mode locking of the homogeneous laser.— IEEE J. **QE-6**, 694 (1970).
17. **Cutler C. C.** The regenerative pulse generator.— Proc. IRE, **43**, 140 (1955).
18. **Smith P. W., Bridges T. J., Burkhardt E. G.** Mode locked high pressure CO_2 laser — Appl. Phys. Letts., **21**, 470 (1972).
19. **Бирнбаум Дж.** Оптические квантовые генераторы: Пер. с англ.,—М.; Сов. радио, 1967;
Evtuhov V. Pulsed ruby lasers.— In: Lasers, Ed. by A. K. Levine, N. Y. M. Dekker, Inc., 1966, p. 76; **Dunsmuir R. J.** Theory of relaxation oscillation of optical masers. — J. Electr. Control, **10**, 453 (1961). **Statz H., DeMars G.**— In: Quantum Electr. N. Y., Columbia University Press, 1960, p. 530.
20. **Johnson L. F.** in: Lasers. Ed by A. K. Levine. (N. Y. M. Dekker, Inc., 1966), p. 174.
21. **Casperson L. Yariv A.** The time behaviour and spectra of relaxation oscillation in a high gain laser.— IEEE J., **QE-8**, 69 (1972).
22. **Gürs K., Muller R.** Internal modulation of optical masers.— Phys. Letts, **5**, 179 (1963).
23. **Kiefer J. E., Nussmeier T. A., Goodwyn F. E.** Intracavity CdTe modulators for CO; lasers.— IEEE J. **QE-8**, 173 (1972).
24. **Yariv A., Nussmeier T., Kiefer J. E.** Frequency response of intracavity laser coupling modulation.— IEEE J. **QE-9**, 594 (1973).
25. **DeMaria A. J., Stetser D. A., Heynau H.** Self mode-locking of lasers with saturable absorbers.— Appl. Phys. Letts, 8, 174 (1966).
26. **Schwarz S. E., Tan T. Y.** Wave interactions in saturable absorbers.— Appl. Phys. Letts., **10**, 4 (1967).
27. **Garmire E. M., Yariv A.** Laser mode-locking with saturable absorbers. — IEEE J., **QE-3**, 222 (1967).
28. **Cirkel H. J., Schafer F. P.** Passive non-reciprocal element for travelling wave ring lasers. — Optics Commun., **5**, 183 (1972).

Дополнительная литература

29. **Von der Linde D.** Mode locked lasers and ultrashort light pulses.— Appl. Phys., 2, 281 (1973).
30*. **Микаэлян А. Л., Тер-Микаелян М. Л., Турков Ю. Г.** Оптические генераторы на твердом теле.-М.: Сов. радио, 1967.
31.*. **Ханин Я. И.** Квантовая радиофизика: т.2 Динамика квантовых генераторов.— М.: Сов. радио, 1975.
32. * **Пилипович В. А., Ковалев А. А.** Оптические квантовые генераторы с просветляющимися фильтрами.— Минск; Наука и техника, 1975.
33*. **Tang C. L., Statz H., DeMars G.** Spectral output and spiking behavior of solid-state lasers.— J. Appl. Phys., **34**, 2289 (1963).
34*. **Лившиц Б. Л., Цикунов В. Н.** Спектральные свойства индуцированного излучения в широком интервале накачек.— ЖЭТФ, т. **49**, с. 1843 (1965).
35.* **Ананьев Ю. А., Седов Б. М.** Спектральные и временные характеристики стимулированного излучения. — ЖЭТФ, т. **48**, с. 782 (1965).
36.* **Haus H. A.** Theory of mode locking with a slow saturable absorber.— IEEE. J., **QE-11**, 736 (1975).
37*. **New G. H. C.** Pulse evolution in mode-locked quasi-continuous lasers.— IEEE J., **QE-10**, 115 (1974).
38*. **P. A. Khandokhin, Ya. I. Khanin, I. I. Matorin.** An approximate theory of a dye laser with a saturable absorber.— Opt. Commun., **27**, 111 (1978).

К главе 12

1. **Goldreich P., Kelley D. A.** Astrophysical masers 1: source, size and saturation.— Astrophys. J., **174**, 517 (1972).
2. **Litvak M. M.** Linewidths of a Gaussian broadband signal in a saturated two-level system.— Phys. Rev., **A-2**, 2107 (1970).
3. **Yariv A., Leite R. C. C.** Supperadiant narrowing in fluorescence radiation of inverted populations.— J. Appl. Phys., **34**, 3410 (1963).
4. **Casperson L. W., Yariv A.** Spectral narrowing in high gain lasers.— IEEE J. **QE-8**, 80 (1972).
5. **Shaklee K. L., Leheny R. F.** Direct determination of optical gain in semiconductor crystals.— Appl. Phys. Letts., **18**, 475 (1971)
6. **Casperson L. W.** Modes and spectra in high gain lasers. — Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1971.
7. **Maeda H., Yariv A.** Narrowing and rebroadening of amplified spontaneous emission in high gain laser media.— Phys. Letts, **43A**, 383 (1973).

К главе 13

1. **Schawlow L., Townes C. H.** — Phys. Rev., **112**, 1940 (1958). **Townes C. H.** in: Advances in quantum electronics, J. R. Singer, ed. (Columbia University Press, N. Y., 1961).
2. **Kogelnik H., Yariv A.,** Noise and schemes for its reduction in laser amplifiers.— Proc. IEEE, **52**, 165 (1964).
3. **Paananen R. A.** Noise measurement in an He-Ne laser amplifiers.— Appl. Phys., Lett., **4**, 149 (1964).
4. **Klüver J. W.** Laser amplifier noise at 3,5 microns in helium-xenon.— J. Appl. Phys., **37**, 2987 (1966).
5. **Yariv A.** Introduction to optical Electronics. Holt. Rinehart and Winston, N. Y., 1971, p. 278.
6. **Gordon E. I.** Optical maser oscillators and noise.— Bell Syst. Techn J., **43**, 507, (1964).
7. **Grivet P. A., Blaquiere A.** Optical masers. Polytechnic Press, N. Y., 1963, p. 69.
8. **Jaseja T. J., Javan A., Townes C. H.** Frequency stability of He — Ne masers and measurements of length.— Phys. Rev. Letts, **10**, 165, (1963).
9. **Егоров Ю. П.** Измерение естественной ширины линии излучения газового ОКГ со связанными типами колебаний — Письма в ЖЭТФ, т. **8**, с. 525 (1968).
10. **Hinkley E. D., Freed C.** Direct observation of the Lorentzian lineshape as limited by quantum phase noise in a laser above threshold.— Phys. Rev. Letts, **23**, 277 (1969).
11. **Yariv A., Caton W.** Frequency, intensity and field fluctuations in laser oscillators. — IEEE. J. **QE-10**, 509 (1974).
12. **Caughey T. K.** Response of Van der Pol's oscillator to random excitation.— — ASME J. of Appl. Mechanics, **81**, 345 (1959).
13. **Mannes K. R., Siegman A. E.** Observations of quantum phase fluctuations in infrared gas lasers.— Phys. Rev., **4**, 4 373 (1971).
14. **Rowe H. E.** Signals and noise in communication systems. D. Van Nostrand Company, Princeton, 1965, p. 118.
15. **Scully M.** Quantum theory of optical maser.—In: Phys. of Ouant. Electr. P. Kelly ed., Mc Graw-Hill, N. Y., 1966, p. 759.
16. **Freed C., Haus H. A.** Photoelectron statistics produced by a laser operating below and above the threshold of oscillation. — IEEE J. **QE-2**, 190 (1966),

Дополнительная литература

17. **Scully M., Lamb W. E., Jr.** Theory of an optical maser. — Phys. Rev., **134**, A1429 (1964).
18. **Freed C., Haus H. A.** Photoelectron statistics produced by a laser operating below the threshold of oscillation.— Phys. Rev. Letts, **15**, 943 (1965).

87

19. **Haken H.** A nonlinear theory of laser noise and coherence. — J. Phys., **181**, 96 (1964).
20. **Haken H.** A nonlinear theory of laser noise and coherence. — J. Phys. **182**, 346 (1965).
21. **Armstrong J. A., Smith A. W.** Intensity fluctuations in GaAs lasers.— Phys. Rev., **140**, A 155 (1965).
22. **Lax M., Louisell W. H.** Quantum Fokker — Planck solution for laser noise.— IEEE J., **QE-3**, 47 (1967).
23. **Haken H.** and collaborators. Light and matter.— In: Handbuch der Physik— Berlin, Springer-Verlag, 1970.

К главе 14

1. **Най Дж.** Физические свойства кристаллов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1967.
2. **Yariv A.** Introduction to optical electronics.— Holt., Rinehart and Winston, N. Y., 1971.
3. **Kaminow I. P., Turner E.** Linear electrooptic materials. Chemical Rubber Co.-Handbook of Lasers. Cleveland, 1971, ch. 15; Landolt-Borenstein Numerical data «Functional Relationships in Science and Technology», Hellwege K. H., Ed. Group III: Crustal and Solid-State Physics, v. 2, Electrooptic Constants. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
4. **Yariv A., Mead C. A. Parker J. V.** GaAs as an electrooptic modulator at at 10,6 μ. — IEEE J., **QE-2**, 243 (1966).
5. **Kiejer J., Yariv A.** Electrooptic characteristics of CdTe at 3, 39 and 10,6μ.— — Appl. Phys. Letts, **15**, 26 (1969). **Tada K., Aoki M.** Linear electrooptic effest of ZnTe at 10,6 μ.— Jap. J. Appl. Phys., **10**, 998 (1971).
6. **Namba S.** Electrooptical effect of Zincblende.— J. Opt. Soc. Am., **51**, 76 (1961).
7. **Peters L. C.** Gigacycle bandwidth coherent light traveling-wave phase modulators.— Proc. IEEE, **51**, 147 (1963).
8. **Rigrod W. W. Kaminow I. P.** Wide-band microwave light modulation. — Proc. IEEE, 51, 137 (1963),
9. **Kaminow I. P., Lin J.** Propagation characteristics of partially loaded two-conductor transmission lines for broadband light modulators.— Proc. IEEE, **51**, 132 (1963).
10. **White R. W., Enderby C. E.** Electro-optical modulators employing intermittent interaction.— Proc. IEEE, **51**, 214 (1963).
11. **Fowler V. J., Schlafer J.** A survey of laser beam deflection techniques.— Proc. IEEE, **54**, 1437 (1966).
12. **Ninomiya Y.** Ultrahigh resolving electrooptic prism array light deflectors.— IEEE J., **QE-9**, 791 (1973).
13. **Kittel C.** Introduction to Solid-State Physics, 4th ed., Wiley, N. Y., 1971. (Имеется перевод второго издания: Киттель Ч. Введение в физику твердого тела.— М.: Физматгиз, 1963).
14. **Brillouin L.** Diffusion de la lumiere rayons X par un corps transparent homogene.— Ann. Physique, **17**, 88 (1922).
15. **Debye P., Sears F. W.** On the scattering of light by supersonic waves.— Proc. Nat. Acad. Sci. U. S., **18**, 409 (1932).
16. **Dransfeld K.** Kilomegacycle ultrasonics.— Sci. Am., **208**, 60 (1963).
17. **Adler R.** Interaction between light and sound.— IEEE Spectrum, **4**, № 5, 42 (1967),
18. **Борн М. Вольф. Э.** Основы оптики.— М. Наука, 1973.
19. **Dixon R. W.** Photoelastic properties of selected materials and their relevance for applications to acoustic light modulators and scanners.— J. Appl. Phys., **38**, 5149 (1967).
20. **Quate C. F., Wilkinson C. D. W., Winslow D. K.** Interactions of light and microwave sound.— Proc. IEEE, **53**, 1604 (1965), **Cohen M. G., Gordon E. I.**, Acoustic beam probing using optical frequencies.— Bell syst. Techn. J., **44**, 693 (1965).

21. Cummings H. Z., Knable N. Single sideband modulation of coherent light by Bragg reflection from acoustical waves.— Proc. IEEE, **51**, 1246 (1963).
22. **Harris S. E., Nieh S. T. K., Winslow D. K.** Electronically tunable acousto-optic filter.— Appl. Phys. Letts. **15**, 35 (1969).
23. **Harris S. E., Nieh S. T. K., Feigelson R.** $CaMoO_4$ electronically tunable optical filter.— Appl. Phys. Letts, **17**, 223 (1970).
24. **Pinnow D. A., Van Uitert L. G., Warner A. W., Bonner W. A.** $PbMoO_4$: A melt grown crystal with a high figure of merit for acoustooptic device applications.— Appl. Phys. Letts, **15**, 83 (1969).

Дополнительная литература

25*. **Катыс Г. П., Кравцов Н. В., Чирков, Л. Е., Коновалов М. М.** Модуляция и отклонение оптического излучения.— М. : Наука, 1967.
26.* **Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.** Методы модуляции и сканирования света.— М.: Наука, 1970.

К главе 15

1. **Feynman R. P., Vernon F. L., Jr., Hellwarth R. W.** Geometrical representation of the Schrodinger equation for solving maser problems.— J. Appl. Phys., **28**, 49 (1957).
2. **Dicke R. H.** Coherence in spontaneous radiation processes.— Phys. Rev., **93**, 99 (1954).
3. **Bloembergen N., Pound R. V.** Radiation damping in magnetic resonance experiments.— Phys. Rev., **95**, 8 (1954).
4. **Feher G., Gordon J., Buehler E., Gere E., Thurmond C.** Spontaneous emission of radiation from an electron spin system.— Phys. Rev., **109**, 221 (1958).
5. **Yariv A.** Spontaneous emission from an inverted spin system. — J. Appl. Phys., **31**, 740 (1960).
6. **Herman I. P., MacGillivray J. C., Skribanowitz N., Feld M. S.** Self-induced emission in optically pumped HF gas: The rise and fall of the superradiant state. — Proc. vail conference on laser spectroscopy, 1973. N. Y., Plenum Press, 1974.
7. **Hahn E. L.** Spin echoes.— Phys. Rev., **80**, 580 (1950).
8. **Brewer. R. G., Shoemaker R. L.** Photon echoes and optical nutation in molecules.— Phys. Rev., **27**, 632 (1971).
9. **Kurnit N. A., Abella I. D., Hartman S. R.** Observation of a photon echo.— Phys. Rev. Letts. **13**, 567 (1964).
10. **Abella I. D., L Kurnit N. A., Hartman S. R.** Photon echoes. — Phys. Rev., **141**, 391 (1966).
11. **McCall S. L., Hahn E. L.** Self-induced transparency by pulsed coherent light.— Phys. Rev. Letts, **18**, 908, (1967).
12. **McCall S. L. Hahn E. L.** Pulse-area pulse-energy description of a traveling-wave laser amplifier.— Phys. Rev., **A2**, 861 (1970).
13. **Arecchi F. T., Courtens E., Gilmore R., Thomas H.** Fundamental and applied laser physics.— Proc. Esfahan Symposium. Eds. by Feld M. S., Kurnit N. A., Javan. A. N. Y., Wiley, 1973.
14. **Slusher R. E.** Self-induced transparency.— Progress in Optics, Ed. by Wolf E., v. XII., North Holland, 1973.

Дополнительная литература

15*. **Полуэктов И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С.** Когерентные эффекты при распространении ультракоротких импульсов света в резонансных средах. Ч.I. — Квантовая электроника, **1**, 757 (1974); ч. II.— Квантовая электроника, **1**, 1309 (1974).
16*. **Крюков П. Г. Летохов В. С.** Распространение импульса света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде.— УФН, **99**, 169 (1969).

17*. **Ораевский А. Н.** Радиационное эхо.— УФН, **91**, 181 (1967).
18*. **Самарцев В. В.** Световое эхо как метод спектроскопии кристаллов.— Ж. прикл. спектр., **30**, 581 (1979).

К главе 16

1. **Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W. and Weinreich G.** Generation of optical harmonics.— Phys. Rev. Letts, 7, 118, (1961).
2. **Най Дж.** Физические свойства кристаллов; Пер. с англ. — М.; Мир, 1967.
3. **Kleinman D. A.** Nonlinear dielectric polarization in optical media.— Phys. Rev., **126**, 1977 (1962).
4. **Garret C. G. B. and Robinson F. N. H.** Miller's phenomenological rule for computing nonlinear susceptibilities. — IEEE J., **QE-2**, 328 (1966).
5. **Garret C. G. B.** Nonlinear optics, anharmonic oscillators and pyroelectricity. — IEEE J., **QE-4**, 70 (1968).
6. **Miller R. C.** Optical second harmonic generation in piczoelectric crystals. — Appl. Phys. Letts, 5, 17 (1964).
7. **Maker P. D., Terhune R. W., Nisenhoff M. and Savage C. M.** Effects of dispersion and focusing on the production of optical harmonics.— Phys. Rev. Letts, 8, 21 (1962),
8. **Giordmaine J. A.** Mixing of light beams in crystals.— Phys. Rev. Letts, 8, 19 (1962).
9. **Zernike F., Jr.** Refractive indices of ammonium dihydrogen phosphate and potassium dihydrogen phosphate between 2000 Å and 1,5 μ.— J. Opt. Soc. Am. **54**, 1215 (1964).
10. **Ashkin A., Boyd G. D. and Dziedzic J. M.** Observation of continuous second harmonic generation with gas lasers.— Phys. Rev. Letts, **11**, 14 (1963).
11. **Kleinman D. A., Ashkin A. and Boyd G. D.** Second harmonic generation of light by focused laser beams.— Phys. Rev., **145**, 338 (1966).
12. **Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J. and Persham P. S.** Interactions between light waves in a nonlinear dielectric.— Phys. Rev., 127, 1918 (1962).
13. **Geusic J. E., Levinstein H. J., Singh S., Smith R. G. and Van Uitert L. G.** Continuous 0,53 μ solid-state source using $Ba_2Na\,Nb_5O_{15}$.— IEEE J., **QE-4**, 352 (1968).
14. **Patel C. K. N.** Efficient phase-matched harmonic generation in tellurium with a CO_2-laser at 10, 6 μ.,— Phys. Rev. Letts, **15**, 1027 (1965).
15. **Caldwell R. W., Fan H. Y.** Optical properties of tellurium and selenium. — Phys. Rev., **114**, 664 (1959).

Дополнительная литература

16. **Бломберген Н.** Нелинейная оптика: Пер. с англ.— М.: Мир, 1966.
17. **Levine B. F.** Magnitude and dispersion of Kleinman's forbidden nonlinear coefficients.— IEEE J., **QE-9**, 1946 (1973).
18. **Levine B. F. and Bethea C. G.** Nonlinear susceptibility of GaP.— Appl. Phys. Letts, 20, 272 (1972).
19. **Kildal H. and Mikkelsen J. C.** The nonlinear optical coefficient, phase matching and optical damage in $AgGaSe_2$.— Optics Comm., **9**, 315 (1973).
20. **Miles R. B. and Harris S. E.** Optical third harmonic generation in alkali metal vapors.— IEEE J., **QE-9**, 470 (1973).
21. **Hodgson R. T., Sorokin P. P., and Wynne J. J.** Tunable coherent vacuum ultraviolet generation in atomic vapors.— Phys. Rev. Letts, **32**, 343 (1974).
22.* **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** Проблемы нелинейной оптики.— М.: ВИНИТИ; 1964.
23*. **Цернике Ф., Мидвинтер Дж.** Прикладная нелинейная оптика: Пер. с англ.— М; Мир, 1976.

К главе 17

1. **Giordmaine J. A. and Miller R. C.** Tunable coherent parametric oscillation in $LiNbO_3$ at optical frequencies.— Phys. Rev. Letts., **14**, 973 (1965).

2. **Ахманов С. А., Ковригин А. И., Пискарскас А. С., Фадеев В. В., Хохлов Р. В.** Наблюдение параметрического усиления в оптическом диапазоне. — Письма в ЖЭТФ, 2, 300 (1965).
Ахманов С. А., Ковригин А. И., Колосов В. А., Пискарскас А. С., Фадеев В. В. и Хохлов Р. В. Перестраиваемый параметрический генератор света на кристалле КДР.— Письма в ЖЭТФ, 3, 372 (1966).
3. **Wang C. C. and Racette G. W.** Measurement of parametric gain accompanying optical difference frequency generation.— Appl. Phys. Letts., **6**, 169, (1965).
4. **Uenohara M.** Low noise amplification.— Handbuch der Physik (Springer-Verlag, Berlin), **23**, 81.
5. **Ярив А.** Квантовая электроника и нелинейная оптика: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1973.
6. **Manley J. M., and Rowe H. E.** General energy relations in nonlinear reactances. — Proc. IRE, **47**, 2115 (1959).
7. **Falk J., and Murray J. E.** Single cavity nonlinear parametric oscillators.— Appl. Phys. Letts., **14**, 245 (1969).
8. **Harris S. E.** Tunable optical parametric oscillators. — Proc. IEEE, **57**, 2096 (1969).
9. **Bjorkholm J. E.** Efficient optical parametric oscillation using doubly and singly resonant cavities. — Appl. Phys. Letts, **13**, 53 (1968).
10. **Yariv A. and Louisell W. H.** Theory of the optical parametric oscillator. — IEEE J., **QE-2**, 418. (1966).
11. **Magde D., Mahr H.** Study in ammonium dihydrogen phosphate of spontaneous parametric interaction tunable from 4400 to 16000 Å.— Phys. Rev. Letts., **18**, 905 (1967).
12. **Davydov A. A., Kulevskii L. A., Prokhorov A. M., Savel' ev A. D., Smirnov V. V. and Shirkov A. V.** A tunable infrared parametric oscillator in a CdSe crystal.— Optics Comm., 9, 234 (1973).
Herbst R. L. and Byer R. L. Efficient parametric mixing in CdSe.— Appl. Phys. Letts, **19**, 527 (1971).
Herbst R. L. and Byer R. L. Singly resonant CdSe infrared parametric oscillator. — Appl. Phys. Letts, **21**, 189 (1972).
13. **Louisell W. H., Yariv A. and Siegman A. E.** Quantum fluctuations and noise in parametric processes.— Phys. Rev., **124**, 1646 (1961.)
14. **Люиселл У.** Излучение и шумы в квантовой электронике.— М.; Наука, 1972.
15. **Johnson F. M., and Durado J. A.** Frequency up-conversion.— Laser Focus, **3**, 31 (1967).
16. **Midwinter J. E. and Warner J.** Up-conversion of near infrared to visible radiation in lithium-meta-niobate.— J. Appl. Phys., **38**, 519 (1967).
17. **Warner J.** Photomultiplier detection of 10,6 μ radiation using optical up-conversion in proustite.— Appl. Phys. Letts. **12**, 222 (1968).
18. **Hulme K. F., Jones O., Davies P. H. and Hobden M. V.** Sinthetic proustite (Ag_3AsS_3): A new material for optical mixing. — Appl. Phys. Lett, **10**, 133 (1967).
19. **Gurski T. R.** High quantum efficiency infrared up-conversion. — Appl. Phys. Lett., 23, 273 (1973).
20. **Harris S. E., Oshman M. K. and Byer R. L.** Observation of tunable optical parametric fluorescence.— Phys. Rev., Letts, **18**, 732 (1967).
21. **Byer R. L. and Harris S. E.** Power and bandwidth spontaneous parametric emission.— Phys. Rev., **168**, 1064 (1968).
22. **Giallorenzi T. G. and Tang C. L.** Quantum theory of spontaneous parametric scattering of intense light.— Phys. Rev., **166**, 225 (1968).
23. **Pearson J. E., Ganiel U. and Yariv A.** Observations of parametric fluorescence and oscillation in the infrared. — Appl. Optics, **12**, 1165 (1973).
24. **Пирс Дж.** Лампа бегущей волны.— М.: Сов. радио, 1952.
25. **Люиселл У.** Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963.

26. **Kogelnik H.** and Shank C. V. Coupled wave theory of distributed feedback lasers.— J. Appl. Phys. **43**, 2328 (1972).
27. **Harris S. E.** Proposed backward wave oscillation in the infrared. — Appl. Phys. Letts, **9**, 114 (1966).

Дополнительная литература

28*. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.,** Проблемы нелинейной оптики. — М:. ВИНИТИ, 1964.
29*. **Цернике Ф., Мидвиндер Дж.** Прикладная нелинейная оптика: Пер. с англ. — М.: Мир. 1976.
30*. **Сущик М. М., Фортус В. М., Фрейдман Г. И.** Параметрическое усиление и генерация света.— Изв. вузов СССР. Радиофизика, **13**, 631 (1970).

К главе 18

1. **Herzberg G.** Molecular speactra and molecular structure (Van Nostrand, Princeton, N. J., 1961).
2. **Брандмюллер И., Мозер** Г. Введение в спектроскопию комбинационного рассеяния света: Пер. с англ.— М., Мир, 1964.
3. **Shen Y. R. and Bloembergen N.** Theory of stimulated Brillouin and Raman scattering.— Phys. Rev., **137**, A1787 (1965).
4. **Placzek G.** Handbuch der Radiologie VI (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1934) Teil II, p. 205. English Translation — Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley, Calif.
5. **Leite R. C. C. and Porto S. P. S.** Continuous photoelectric recording of the Raman effect in liquids excited by the He — Ne red laser. — J. Opt. Soc. Am., **54**, 981 (1964).
6. **Eckhardt G.** Selection of Raman laser materials.— J. Quant. Elect., **2**, 1 (1966).
7. **Eckhardt G., Hellwarth R. W., McClung F. J., Schwarz S. E., Weiner D. and Woodbury E. J.** Stimulated Raman scattering from organic liquids.— Phys Rev. Letts, **9**, 455 (1962).
8. **Hellwarth R. W.** Theory of stimulated Raman scattering. — Phys. Rev., **130**, 1850 (1963).
9. **Clements W. R. L., and Stoicheff B. P.** Raman linewidths for stimulated threshold and gain calculations. — Appl. Phys. Letts, **12**, 246 (1968).
10. **Kato Y. and Takuma H.** Experimental study on the wavelength dependence of the Raman scattering cross section.— J. Chem. Phys. **54**, 5398 (1971).
11. **Fenner W. R., Hyatt H. A., Kellman J. M. and Porto S. P. S.** Raman cross sections of some simple gases.— J. Opt. Soc., **63**, 73 (1973).
12. **Kaiser W. and Maier M.** Stimulated Rayleigh, Brillouin, and Raman spectroscopy.— Laser Handbook (N. Holland Pub. Co. Amsterdam, 1972), p. 1077.
12a. **Sparks M.** Stimulated Raman and Brillouin scattering: parametric instability explanation of anomalies.— Phys. Rev. Letts, **32**, 450 (1974).
13. **Terhune R. W.** Nonlinear optics. — Bull. Am. Phys. Soc., 8, 359 (1969).
14. **Chiao R. Y., Garmite E. and Townes C. H.** Self-trapping of optical beams.— Phys. Rev. Letts, **13**, 479 (1964).
15. **Kelly P. L.** Self-focusing of optical beams.— Phys. Rev. Letts, **15**, 1005 (1965).
16. **Аскарьян Г. А.** Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы. — ЖЭТФ, **42**, 1567 (1962).
17. **Таланов В. И.** О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах.— Изв. вузов СССР. Радиофизика, 7, 564 (1964).
18. **Akhmanow C. A. Khokholov R. V. and Sukhorukov A. P.** Self-focusing, self-defocusing and self-modulation of laser beams.— Laser Handbook, p. 1151.
19. **Brillouin L.** Diffusion de la lumiere et des rayons par un corps transparent homogene.— Ann. Phys. **17**, 88 (1922).

20. **Chiao R. Y. Townes C. H., and Stoisheff B. P.** Stimulated Brillouin scattering and coherent generation of intense hypersonic waves.— Phis. Sev. Letts., **12**, 592 (1964).
21. **Pomerantz M.** Temperature dependence of microwave phonon attenuation. — Phys. Rev., **139**, 501 (1965).
22. **Bommel H. E. and Dransfeld K.** Attenuation of hypersonic waves in quartz.— Phys. Rev. Letts, **2**, 298 (1959).
23. **Wilson R. A., Show H. J. and Winston P. K.** Measurement of microwave acoustic attenuation in sapphire and rutile using nicker-film transducers. — J. Appl. Phys., **36**, 3269 (1965).
24. **Chiao R. Y.** Brillouin scattering and coherent phonon generation. — Ph. D. Thesis, M. I. T. (1965).
25. **Yariv A.** Quantum theory for the interaction of light and hypersound. IEEE J., **QE-1**, 28 (1965).
26. **Ярив А.** Квантовая электроника и нелинейная оптика: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1973.
27. **Armstrong J. A., Bloembergen N., Dusuing J. and Pershan P. S.** Interactions between light waves in nonlinear media.— Phys. Rev., **127**, 1918 (1962) (Имеется перевод в кн.; Бломберген Н. Нелинейная оптика.—М.: Мир, 1966).
28. **Lallemand P. and Bloembergen N.** Self-focusing of laser beams and stimulated Raman gains in liquids.— Phys. Rev. Letts., **15**, 1010 (1965). (Имеется перевод в кн: Действие лазерного излучения.— М., Мир. 1968).
29. **Guiliano C. R. and Marburger J. H.** Observations of moving selffoci in sapphire.— Phys. Rev., Letts, **27**, 905 (1971).
30. **Bjorkholm J. E. avd Ashkin A.** CW self-focusing and self-trapping of light in sodium vapor.— Phys. Rev., **32**, 129 (1974).

Дополнительная литература

31. **Von der Linde D., Laubereau L. and Kaiser W.** Molecular vibrations in liquids; direct measurement of the molecular dephasing time; determination of the shape of picosecond light pulses. — Phys. Rev., Letts, **26**, 954 (1971.)
32. **Mooradian S. A.** Raman spectroscopy of solids. — Laser Handbook, v. 2 (N. Holland Publ., Co., Amsterdam, 1972) p. 1409.
33*. **Шуберт М., Вильгельми Б.** Введение в нелинейную оптику: Пер. с нем.— М.: Мир, 1973.
34. **Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г., Якубович Е. И.** Резонансные взаимодействия света с веществом.— М.; Наука, 1977.
35. **Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** Нелинейная теория плазмы—В сб. Вопросы теории плазмы, вып. 7.— М.: Атомиздат, 1973.
36. **Eimerl D.** Enhanced stimulated Raman scatteving does not exist.— Phys. Rev. Letts., **40**, 934 (1978).
37. **Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.** Накапливающиеся нелинейные оптические эффекты в поле накачки с широким частотным спектром.— Письма в ЖЭТФ, **13**, 724 (1971).
38. **Пасманик Г. А., Сандлер М. С.** Нелинейные оптические эффекты в поле накачки с диффундирующей фазой.— Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова.— М.: Сов. радио, 1973, № 3, с. 136.
39. **Зубарев И. Г., Миронов А. Б., Михайлов С. И.** Влияние немонохроматичности накачки на усиление монохроматического стоксова излучения. — Письма в ЖЭТФ, **23**, 697 (1976); Влияние пространственной и временной некогерентности накачки на усиление стоксова сигнала.— Квантовая электроника, **4**, 1155 (1977).

К главе 19

1. **Yariv A., Leite R. C. C.** Dielectric waveguide mode of light propagation on p — n junctions.— Appl. Phys. Letts, **2**, 55 (1963).
2. **Osterberg H., Smith L. W.** Transmission of optical energy along surfaces.— J. Opt. Soc. Amer., **54**, 1073 (1964).

3. **Hall D., Yariv A., Garmire E.** Optical guiding and electrooptic modulation in GaAs epitaxial layers. — Opt. Comm., 1, 403 (1970).
4. **Shubert R., Harris J. H.** Optical surface waves on thin films and their application to integrated data processors.— IEEE Trans. (1968 Symp. Issue), MTT-16, p. 1048—1054 (1968).
5. **Miller S. E.** Integrated optics, an introduction. — Bell. Syst. Tech. J., 48, 2059 (1969).
6. **Goell J. E.,** A circular harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides. — Bell Syst. Tech. J., 47, 2133 (1968).
7. **Marcatili E. A. J.** Dielectric rectangular waveguide and directional couplers for integrated optics. — Bell Syst. Tech. J., 48, 2071 (1969).
8. **Collins R. E.** Field theory of guided waves (McGraw-Hill, N. Y. 1960), p. 470.
9. **Yariv A.** Introduction to optical electronics (Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1971), p. 46.
10. **Hammer J. M., Channin D. J., Daffy M. T.** High speed electrooptic grating modulators. — RCA Technical Report, unpublished.
11. **Tien P. K., Ulrich R., Martin R. J.** Modes of propagating light in thin deposited semiconductor films. — Appl. Phys., Letts, 14, 291 (1969).
12. **Yariv A.** Coupled mode theory for guided wave optics. — IEEE J., QE-9, 919 (1973).
13. **Kuhn L., Dakss M. L., Heidrich P. F., Scott B. A.** Deflection of optical guided waves by a surface acoustic wave. — Appl. Phys. Letts, 17, 265 (1970).
14. **Dixon R. W.** The photoelastic properties of selected materials and their relewance to acoustic light modulators and scanners. — J. Appl. Phys., 38, 5149 (1967).
15. **Stoll H., Yariv A.** Coupled mode analysis of periodic dielectric waveguides. — Opt. Comm. 8, 5 (1973).
16. **Flanders D. C., Kogelnik H., Schmidt R. V., Shank C. V.** Grating filters for thin film optical waveguides.— Appl. Phys. Letts., 24, 194 (1974).
17. **Kogelnik H., Shank C. V.** Coupled wave theory of distributed feedback lasers. — J. Appl. Phys., 43, 2328 (1972).
18. **Nakamura M., Yariv A., Yen H. W., Somekh S., Garvin H. L.** Optically pumped GaAs surface laser with corrugation feedback. — Appl. Phys. Letts., 22, 515 (1973).
19. **Nakamura M., Yen H. W., Yariv A., Garmire E., Somekh S., Garvin H. L.** Laser oscillation in epitaxial GaAs waveguides with corrugation feedback.— Appl. Phys. Letts., 23, 224 (1973).
20. **Tien P. K., Martin R.J., Blank S. L., Wemple S. H., Varnerin L. J.** Optical waveguides in single crystal garnet films.—Appl. Phys. Letts., 21, 207 (1972).
21. **Tabor W. J.** Magnetooptic materials.— In: Laser Handbook (Arecchi F. T. and Schulz-Dulois E. O., Eds. Amsterdam. The Netherlands: North-Holland, 1972).
22. **Marcatili E. A. J., Schmeltzer R. A.** Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers.— Bell Syst. Tech. J., 43, 1783 (1974).
23. **Steffen H., Kneubuhl F. K.** Dielectric tube resonators for infrared and submillimeter wave lasers. — Phys. Letts, 27A, 612 (1968).
24. **Smith P. W.** A waveguide gas laser.—Appl. Phys. Letts, 19, 132 (1971).
25. **Bridges T. J., Burkhardt E. G., Smith P. W.** CO_2 waveguide lasers. — Appl. Phys. Letts, 20, 403 (1972).
26. **Abrams R. L., Bridges W. B.** Characteristics of sealed-off CO_2 waveguide lasers. — IEEE J., QE-9, 940 (1973).
27. **Hall D. B. Yeh C.,** Leaky waves in heteroepitaxial films. — J. Appl. Phys., 44, 2271 (1973).

28. Integrated Optics,, D. Marcuse, ed (IEEE Press, N. Y., 1972).
29. Tien P. K. Light waves in thin films and integrated optics. — Appl. Optics, **10**, 2395 (1971).
30*. **Введение в** интегральную оптику/Под ред. М. Барноски: Пер. с англ. ред. Т. А. Шмаонова.— М.: Мир, 1977.

К приложению 1

1. Таунс Ч., Шавлов А. Радиоспектроскопия: Пер. с англ.— М.; ИЛ, 1959.

К приложению 2

1. Karplus R., Schwinger J. A note on saturation in microwave spectroscopy.— Phys. Rev., **73**, 1020 (1948).
2. Tang C. L., Higher order coherent Raman effects.— Phys. Rev., **134A**, 1166 (1964).
3. Armstrong J. A. et al. Interaction between light waves in a nonlinear dielectric. — Phys. Rev., 127, 1918 (1962).

К приложению 3

1. Messiah A. Quantum mechanics. II, N. Y., Interscience, p. 724 (1962).
2. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J. and Pershan P. S. Interaction between light waves in a nonlinear dielectric.— Phys. Rev., **127**, 1918 (1962). (Имеется перевод в кн.: Бломберген Н. Нелинейная оптика. — М.: Мир., 1966).
3. Miles R. B. and Harris S. E. Optical third-harmonic generation in alkali metal vapors.— IEEE J., QE-9, 470 (1973).
4. Abrams R. L., Yariv A., Yeh P. A. Stark induced three-wave mixing in molecular gases, Pt. I: Theory, — IEEE J., **QE-13**, 79, (1977).
5. Kaiser and Garrett C. G. B. Two-photon excitation in CaF_2 : Eu^{2+}. —Phys. Rew. Letts, 7, 229 (1961).
6. Yatsiv S., Rokni M., Barak S. Enhanced and stimulated multiphoton processes in free atoms. — IEEE J., **QE-4**, 900 (1968).

К приложению 4

1. Maker P. D. and Terhune R. W. Study of optical effects due to an induced polarization third or der in the electronic field strength. — Phys. Rev., 137, A801 (1965).
2. Бломберген Н. Нелинейная оптика.— М.; «Мир», 1966.
3. Harris S. E. Proposed backward wave oscillation in the infrared. — Appl. Phys. Letts, 9, 114 (1966).
4. Зельдович Б. Я., Поповичев В. И., Рагульский В. В., Файзуллов Ф. С. О связи между волновыми фронтами отраженного и возбуждающего света при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна.— Письма в ЖЭТФ, 15, 160 (1972).
5. Yariv A. Compensation for atmospheric degradation of optical beam transmission by nonlinear optical mixing. — Opt. Comm., 21, 49, (1977).
6. Hellwarth R. Generation of time-reversed wave fronts by non-linear refraction.— J. Opt. Soc. Am., 67, 1, (1977).
7*. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах/Под ред. В. И. Беспалова.— Горький: Ин-т прикладной физики АН СССР, 1979.

1. **Ривлин Л. А.** Динамика излучения полупроводниковых квантовых генераторов.— М: Сов. радио, 1976.
2. **Винокуров Г. Н., Галактионова Н. М., Егорова В. Ф., Мак А. А., Садов Б. М., Ханин Я. И.** О пичковой структуре излучения твердотельных лазеров.— ЖЭТФ, **60**, 489 (1971).
3. **Ханин Я. И.** Квантовая радиофизика. В 2-х т. Динамика квантовых генераторов.— М.: Сов. радио, 1975.
4. **Голяев, Ю. Д., Лантратов С. В.** Пичковые режимы генерации в лазерах на гранате с неодимом.— Квантовая электроника, 1, 2197 (1974).
5. **Tang C. L., Statz H., De Mars G.** Spectral output and spiking behavior of solid-state lasers.— J. Appl. Phys., **34**, 2289 (1963).
6. **Statz H., Tang C. L.** Multimode oscillations in solid-state lasers.— J. Appl. Phys., **35**, 1377 (1964).
7. **Кирсанов Б. П., Леонтович А. М., Можаровский А. М.** О пульсациях излучения в многомодовых твердотельных лазерах.— Квантовая электроника, 1, 2211 (1974).
8. **Izatt J. R., Mitchell R. C., Daw H. A.** Thermal dependence of ruby laser emission.— J. Appl. Phys., **37**, 1558 (1966).
9. **Анохов С. П., Кравченко В. И., Ханин Я. И., Хижняк А. И.** Некоторые вопросы динамики излучения твердотельных свип-лазеров.— Квантовая электроника, 3, 20 (1976).
10. **Лившиц Б. Л., Назаров В. П., Сидоренко Л. К., Турсунов А. Г. Цикунов В. Н.** Особенности временного режима генерации лазера с движущимся кристаллом рубина.— Письмо в ЖЭТФ, 3, 279 (1966).
11. **Danielmeyer H. G, Nilsen W. G.** Spontaneous single-frequency output from a spatially homogeneous Nd: YAG laser.— Appl. Phys. Letts., **16**, 124 (1970).
12. **Фолин К. Г., Анциферов В. В.** Кинетика генерации, спектр и направленность излучения ОКГ на рубине с пространственно однородной инверсией населенности.— ЖЭТФ, 55, 122 (1968)
13. **Danielmeyer H. G., Turner E. H.** Electrooptic elimination of spatial hole burning in lasers.— Appl. Phys., Letts., 17, 519 (1970).
14. **Анциферов В. В., Гайнер А. В., Комаров К. П., Фолин К. Г.** Пространственная неоднородность инверсии и незатухающие пульсации в твердотельных лазерах.— Квантовая электроника, 2, 591 (1975).
15. **Желанов Б. Л., Смирнов В. С., Федеев А. П.** О неустойчивости однонаправленного излучения в кольцевом лазере.— Оптика и спектроскопия, 28, 744 (1970).
16. **Морозов В. Н.** О генерации на бегущих волнах.— ФТТ, 8, 2256 (1966).
17. **Ефанова И. П., Ларионцев Е. Г.** Взаимодействие встречных волн в кольцевом лазере на твердом теле.— ЖЭТФ, 55, 1532 (1968).
18. **Клочан Е. Л., Корниенко Л. С., Кравцов Н. В., Ларионцев Е. Г., Шелаев А. Н.** Режимы генерации вращающегося кольцевого лазера на твердом теле.— ЖЭТФ, 65, 1344 (1973).
19. **Мак А. А., Устюгов В. И.** Самопроизвольная одночастотная генерация кольцевого твердотельного лазера.— Письма в ЖЭТФ, 18, 253 (1973).
20. **Клочан Е. Л., Корниенко Л. С., Кравцов Н. В., Ларионцев Е. Г., Шелаев А. Н.** Режимы генерации кольцевого ОКГ на твердом теле.— Письма в ЖЭТФ, 17, 405 (1973).
21. **Ghiner A. V., Komarov K. P., Folin K. G.** Dynamical theory of undamped spiking in solid-state lasers.— Opt. Communs., 19, 350 (1976).
22. **Гуревич Г. Л., Ингель Л. Х., Ханин Я. И.** Влияние нелинейной линзы на устойчивость стационарной генерации лазера. — В кн.: Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова, 1972, № 3, с. 45.
23. **Levenson M. D.** Feasibility of measuring the nonlinear index of refraction by third-order frequency mixing.— IEEE J. **QE-10**, 110 (1974).
24. **Snitzer E., Woodcock R.** Saturable absorption of color centers in Nd^{3+} and Nd^{3+} — Yb^{3+} laser glass.— IEEE J., **QE-2**, 627 (1966).

25. **Бонч-Бруевич А. М.; Потапов С. Е.; Ханин Я. И.** Насыщающееся поглощение на длине волны 1,06 мкм в стекле.— Оптика и спектроскопия, **28**, 203 (1970).
26. **Беспалов В. И.; Якубович Е. И.** О периодической автомодуляции излучения и возможности генерации «гигантских» импульсов в трехуровневом ОКГ с неоднородно подсвеченным рабочим веществом.— Изв.вузов СССР. Радиофизика, 8, 909 (1965).
27. **Аллахвердян Р. Г., Морозов В. Н., Ораевский А. Н., Сучков А. Ф.** Влияние нелинейности показателя преломления на динамику излучения полупроводниковых квантовых генераторов. Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова, 1971, № 3, с. 45.
28. **Jeppesen M. A.** Some optical, thermo-optical, and pieroortical properties of synthetic sapphire.— J. Opt. Soc., Am., 48, 629 (1958).
29. **Каминский А. А.** Лазерные кристаллы.— М.: Наука, 1975.

Автокорреляционная функция 232
Акустическая постоянная затухания 392
Акустооптическая эффективность материала 280
Акустооптические материалы, таблица 281
Алюмоиттриевый гранат, YAG:Nd^{3+} 146
Ангармонический осциллятор 322
Арсенид галлия, GaAs 169, 253, 264
— —, спектр рекомбинационного излучения 171
— —, сужение спектра 220

Бернара-Дюрафурга условие инверсии 167
Блоха уравнение 105, 108
Больцмана распределение 304, 115, 158
Бриллюэна зона 35
Брэгговское рассеяние света в двулучепреломляющих кристаллах 284
— —, коллинеарное 285

Вероятность заселенности уровня 295
— квантового перехода 29, 164, 441
— спонтанного перехода 111
— индуцированного перехода 112
Волновод гофрированный 413
— диэлектрический 78, 402
— —, дисперсия 406
— —, распространение TE и TM волн 401
— линзовый биериодический 62
— периодический 409
— —, запрещенная зона (частот) 415
Волновая функция 9, 288
— — гармонического осциллятора 19
— —, ортонормальность 13
Восприимчивость 45
— атомная 106
— комбинационная 384
— нелинейная 451
Вращающаяся система координат 292
Выжигание провала на контуре спектральной линии 122
Вырожденный полупроводник 163
— p—n-переход 170

Гайзенберга представление 354
Гамильтона уравнения 55
Гамильтониан 10, 288, 353
— акустического поля 40
— взаимодействия 27, 353, 372
— гармонического осциллятора 23
— двухуровневой системы 103
— лазера 244
— нелинейного взаимодействия полей 321, 353
— электромагнитного поля 55
Генерация второй гармоники света в Ba_2NaNb_5 339
— — — — в кварце 329
— — — — в KDP 333
— — — — в теллуре 340
Генерация света на разностной частоте 360
— — на суммарной частоте 357
— — при четырехфотонном взаимодействии 452
Гетероструктура двойная 174
Гигантский импульс 183, 249
— — излучения рубинового лазера 187
Гюйгенса принцип 87, 98

Двулучепреломление 258, 331
Дебая-Сирса дифракция 286
Дефлектор 271
Дисперсия групповой скорости в среде с квадратичным профилем показателя преломления 78
Дифракционная решетка 180
— эффективность материала 280
Дифференциальная поляризуемость 372
Диэлектрической проницаемости тензор 46
Допустимый интервал между импульсами в диспергирующей среде 79

Закон ABCД 72, 125
Запаздывание электрооптическое 257
Затягивание частоты генерации 129
Золотое правило 29
пл-импульсы 309

Инверсии центр 17, 249
Интегральная оптика 401

Канонически сопряженные величины 15
Квантовый выход 144
— — внешний 176
— — внутренний 172
Когерентное распространение импульса в усиливающей среде 316
Комбинационное рассеяние в кварце 329
— — в жидком азоте 376
— — в сероуглероде, CS_2 378
— — двухфотонное 450
— —, сдвиг частоты 370
— —, сечение 377
Крамерса—Кронига соотношения 107
Кристалл $CaMoO_4$ 285
— CdTe, 253, 264
— CuCl 264
— GaAs 169, 253, 264
— InAs 231, 234
— KH_2PO_4 (KDP) 253, 272, 333
— $LiNbO_3$ 231
— $LiTaO_3$ 231
Кристаллы органические 179

Лазер газовый 153
— — высокого давления 159, 203
— на p—n-переходе 168
— на гетеропереходах 173
— —, локализация поля излучения 174
Лазер, пороговая инверсия 127
—, спектр шумов 237
—, условие генерации 125, 172
—, частота генерации 128
—, эквивалентная схема 227
Лучи: обыкновенный и необыкновенный 51, 331
— параксиальные 60
Лучевые матрицы 61

Магнитный резонанс 104, 108
Максвелла распределение по скоростям 117
— уравнения 42, 52, 68, 130, 193, 196, 327, 396
Мандельштама—Бриллюэна рассеяние 33, 387
— — —, вынужденное, порог 393
Матрица унитарная 24
— эрмитова 24
Метастабильные уровни 151
Модулятор бегущей волны 269
— пленочный на арсениде галлия 425
Модуляция добротности (потерь) резонатора 196, 201
— — — активная и пассивная 188
— — — кинематическая
— — — температурная
— параметров лазера медленная
— — — резонансная
— фазовая компенсируемая
Моды акустические 35, 41
— электромагнитные 52, 56, 86, 111, 130, 138, 170
— — волнового пучка 76
— поперечные 89, 95
— продольные 94, 191

Насыщающая интенсивность 119, 121
— —, зависимость от давления 160
Насыщающийся поглотитель 188
Насыщение 107
— усиления 118, 220
Нелинейная оптика 318
— —, волновые уравнения 327, 335, 342
— —, гамильтониан взаимодействия 321, 353
— —, коэффициенты 324
Нелинейная поляризация 319
Неодимовое стекло 149
Неопределенности принцип 14

Оператор импульса 9
Операторы рождения и уничтожения 22
— — — фононов 40
— — — фотонов 55, 373, 354
— электромагнитного поля 56
— эрмитовы 10
Оптимальная связь в лазерах 135
Оптическая индикатриса 49
— накачка 141
Отклонение света звуком 281
— — электрооптическое 271

Параметрическая неустойчивость 379
Параметрический генератор света двухрезонаторный 347
— — — на ниобате лития 347
— — — однорезонаторный 348
Параметрическое взаимодействие мод
Паули принцип 161
Передаточная функция модулирующей ячейки 201
— — усиливающей среды 200
Пичковая генерация
— — лазеров на 206
— —, условия возбуждения
Площадь импульса 307
Поглощение двухфотонное 445
Пойнтинга теорема 44
Показатель поглощения 109, 143, 165
Показатель преломления теллура, таблица 340
Полуволновое напряжение 258
Полупроводник 161
—, вырожденный 163, 170
—, приведенная эффективная масса 165
—, поглощение 163
—, рекомбинационное излучение 172
—, теория 161
—, усиление 166
—, энергетические зоны 162
—, эффективная масса 162
Прецессия в атомных системах 299
Пуассона распределение 368
Пульсации интенсивности излучения лазера (см. пичковая генерация)

Резонатор оптический 56, 60, 110, 85
— —, время жизни фотона 96
— —, диаграмма устойчивости 92
— —, дифракционные потери 97
— —, добротность 96
— —, интервал между поперечными модами 95
— — — — продольными модами 94, 181
— —, конфигурация зеркал 87
— — конфокальный 90, 95
— — с симметричными зеркалами 89
Релаксационные колебания в лазере на $CaWO_4 : Nd^{3+}$ 206
— — — на Xe 208
Релаксационные времена 104
Родамин 6G 178
Рубин, $Al_2O_3 : Cr^{3+}$ 113, 142

Самофокусировка света в CS_2 399
— — как механизм пичковой генерации
Сверхлюминесценция 212
—, сужение спектра 219
Свет, корпускулярная природа 225
Свипирование несущей частоты импульса 201
— частоты генерации лазера
Свип-лазеры
Свободная генерация
Сечение комбинационного рассеяния 374
— поглощения 143, 178, 210
Синхронизация мод при модуляции потерь 196
— — при фазовой модуляции 203
Скоростные уравнения 133
След (шпур) матрицы 32
Спектр колебаний цепочки атомов 35
— случайной силы 235
— флуктуаций интенсивности 239
— — поля 239
— — частоты 237
Спектральная плотность 233
Спектроскопия комбинационного рассеяния 369
Статистика фотонов 246
Стокса теорема 53, 321
Счет фотонов 247
Сужение спектра при усилении спонтанного излучения 215

Теорема площадей 305
Триплетные состояния 177

Ультракороткие импульсы света 192, 301
Усиление в среде с инверсией населенностей 113
Условие параметрической генерации 346

Уширение спектральных линий из-за столкновений в газах 159
— — — доплеровское 117, 119, 158
— — — неоднородное 30, 117, 119, 190, 218, 300
— — — однородное 30, 116, 119, 199, 212
Уширение спектральных линий при насыщении 107

Фазовый синхронизм 276, 330, 343, 359, 424
— — неколлинеарный 349
Фейнмана диаграммы 438, 439
Ферми—Дирака распределение 162
Ферми квазиуровни 166
Форма линии гауссова 118
— — лоренцева 106
— — рекомбинационного излучения 171
Фотоупругие материалы, таблица 281
Фотоупругости тензор 273
Френеля параметр 97
— уравнение 48

Центр инверсии 249
Цинковая обманка 266

Шварца неравенство 15
Шум тепловой 227, 236
—, пространственная фильтрация 223

Электрооптические кристаллы, таблица 255
Электрооптический затвор 188
— тензор 251
— эффект 249
— — в кубических кристаллах 264
— — в KDP 251
— — линейный 249
Электрооптическое запаздывание 257
Эллипсоид показателей преломления 49, 249, 264, 273
— —, главные оси 49, 250
— —, нормальные поверхности 52
Эренфеста теорема 11
Эрмита полиномы 19, 77

Оглавление

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие автора к русскому переводу 6
Предисловие автора ко второму изданию 7

Глава 1. **Основные постулаты и теоремы квантовой механики** . 9
1.1. Уравнение Шредингера 9
1.2. Уравнение Шредингера, не содержащее времени 11
1.3. Гайзенберговские уравнения движения 15

Глава 2. **Пример решения уравнения Шредингера** 16
2.1. Четность 16
2.2. Гармонический осциллятор 17

Глава 3. **Матричная формулировка квантовой механики** . . . 23
3.1. Некоторые основные свойства матриц 23
3.2. Матричное представление операторов. 24
3.3. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому представлению 25
3.4. Определение собственных функций и собственных значений оператора матричным методом. 26
3.5. Переходы в системе под влиянием возмущений. Ширина спектральной линии 26
3.6. Матрица плотности 31
3.7. Среднее по ансамблю 32
3.8. Эволюция матрицы плотности во времени 32

Глава 4. **Колебания решетки и их квантование** 33
4.1. Колебания однородной линии 33
4.2. Волны в цепочке из одинаковых атомов 34
4.3. Цепочка из атомов двух сортов 36
4.4. Решеточные суммы 38
4.5. Квантование акустической ветви колебаний решетки [3—5]. . . 39

Глава 5. **Электромагнитные поля и их квантование** 42
5.1. Перенос энергии электромагнитного поля, ее сохранение и поглощение 43
5.2. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах 45
5.3. Эллипсоид показателя преломления 49
5.4. Распространение электромагнитных волн в одноосных кристаллах. 51
5.5. Разложение электромагнитного поля по модам резонатора . . 52
5.6. Квантование поля 54
5.7. Плотность состояний и излучение абсолютно черного тела . . 57

Глава 6. **Распространение оптических пучков в однородных и линзоподобных средах** 59
6.1. Линзовый волновод 60
6.2. Волновод, образованный одинаковыми линзами 64
6.3. Ход лучей между зеркалами 64
6.4. Лучи в линзоподобной среде 65
6.5. Волновое уравнение для среды с квадратичным профилем показателя преломления 68
6.6. Гауссов пучок в однородной среде 70

6.7. Гауссов пучок в линзоподобной среде. Закон ABCD 72
6.8. Гауссов пучок в линзовом волноводе 76
6.9. Волновые пучки высших порядков в однородной среде 76
6.10. Волновые пучки высших порядков в среде с квадратичным профилем показателя преломления 77
6.11. Распространение пучков в среде с квадратичным профилем усиления 79
6.12. Эллиптические гауссовы пучки 80

Глава 7. **Оптические резонаторы** 85
7.1. Резонаторы со сферическими зеркалами 86
7.2. Критерий устойчивости мод. Самосогласованный метод нахождения мод резонатора 91
7.3. Резонансные частоты 94
7.4. Потери в оптических резонаторах 96
7.5. Неустойчивые оптические резонаторы 98

Глава 8. **Взаимодействие излучения с атомными системами** . . 102
8.1. Вывод выражения для восприимчивости методом матрицы плотности 102
8.2. Физическое проявление восприимчивости $\chi(\omega)$ 108
8.3. Спонтанные и индуцированные переходы 110
8.4. Показатель усиления 113
8.5. Нахождение вероятностей индуцированных и спонтанных переходов по Эйнштейну 114
8.6. Однородное и неоднородное уширение 116
8.7. Насыщение усиления в системах с однородным и неоднородным уширением 118

Глава 9. **Лазер. Режим генерации** 124
9.1. Условие генерации 125
9.2. Лазер в режиме генерации 130
9.3. Выходная мощность лазера 133

Глава 10. **Некоторые распространенные типы лазеров** 140
10.1. Эффективность накачки и коэффициент полезного действия лазеров 141
10.2. Лазер на рубине 141
10.3. Лазер на кристалле YAG : Nd^{3+} 146
10.4. Лазер на нердимовом стекле 149
10.5. Гелий-неоновый лазер 151
10.6. Лазер на углекислом газе 154
10.7. Полупроводниковые лазеры 160
10.8. Лазеры на органических красителях 176

Глава 11. **Модуляция добротности и синхронизация мод в лазерах** 182
11.1. Модуляция добротности 182
11.2. Синхронизация мод лазера с неоднородно-уширенной линией усиления [6—8] 190
11.3. Синхронизация мод лазера с однородно-уширенной линией усиления 199
11.4. Релаксационные колебания в лазерах 204
11.5. Пассивная синхронизация мод 209

Глава 12. **Усиление сигналов и спонтанного излучения в активной среде** 211
12.1. Спектр спонтанного излучения 212
12.2. Режим насыщения 215

Глава 13. **Шумы в лазерных усилителях и генераторах** . . . 221
13.1. Шумы в лазерных усилителях 221
13.2. Шумы спонтанного излучения в лазерных генераторах . . . 227
13.3. Модель лазера по Ван дер Полю 232
13.4. Квантовое рассмотрение шумов в лазерах 243

Глава 14. **Модуляция света** 249
14.1. Электрооптический эффект 249
14.2. Электрооптическая разность хода лучей 257
14.3. Амплитудная электрооптическая модуляция 258
14.4. Фазовая модуляция света 262
14.5. Поперечная схема электрооптической модуляции. 263
14.6. Высокочастотная модуляция 267
14.7. Электрооптическое отклонение луча 271
14.8. Фотоупругость 273
14.9. Брэгговская дифракция света на акустических волнах 275
14.10. Отклонение света звуком 281
14.11. Брэгговское рассеяние в кристаллах с естественным двулучепреломлением 284

Глава 15. **Когерентное взаимодействие излучения со средой** . . . 287
15.1. Векторная модель взаимодействия поля излучения с двухуровневой системой [1] 288
15.2. Сверхизлучение 296
15.3. Фотонное эхо 298
15.4. Самоиндуцированная прозрачность 301

Глава 16. **Введение в нелинейную оптику. Генерация второй гармоники** 318
16.1. Тензор нелинейной восприимчивости 319
16.2. Клейнмановские соотношения симметрии 321
16.3. Физическая природа нелинейных коэффициентов 322
16.4. Нелинейное взаимодействие электромагнитных полей 327
16.5. Генерация второй гармоники света 329
16.6. Генерация второй гармоники в условиях истощения накачки 335
16.7. Генерация второй гармоники в гауссовом пучке 337
16.8. Внутрирезонаторная генерация второй гармоники 338

Глава 17. **Параметрические усиления, генерация и флуоресценция** 342
17.1. Уравнения, описывающие процесс параметрического усиления 342
17.2. Параметрическая генерация 343
17.3. Насыщение и выходная мощность параметрического генератора 350
17.4. Перестройка частоты параметрического генератора 351
17.5. Квантовый подход к параметрическим взаимодействиям 353
17.6. Преобразование частоты вверх 357
17.7. Спонтанная параметрическая флуоресценция 362
17.8. Параметрическое усиление и генерация встречных волн [27] . 366

Глава 18. **Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) и вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ)** . . . 369
18.1. Квантовое описание комбинационного рассеяния 372
18.2. Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) [7] 375
18.3. Стоксова генерация и неустойчивость процесса ВКР 379
18.4. Макроскопическая теория ВКР 381
18.5. Антистоксово рассеяние 385
18.6. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ) 387
18.7. Самофокусировка света 394

Глава 19. Распространение, модуляция и генерирование излучения в оптических диэлектрических волноводах 401
19.1. Моды диэлектрических волноводов 402
19.2. Моды плоского волновода 405
19.3. Связь между волноводными модами 408
19.4. Периодический волновод 409
19.5. Метод связанных волн [19,5] 413
19.6. Лазер с распределенной обратной связью 416
19.7. Электрооптическая модуляция и связь мод в диэлектрических волноводах 422
19.8. Моды «возмущенного» волновода. Магнитооптическая связь 425
19.9. Волноводы с утечкой 429

Приложение 1.

Спонтанное время жизни для колебательно-вращательного перехода линейной молекулы 433

Приложение 2

Квантовый вывод нелинейных оптических констант 435

Приложение 3

Применение операторов временной эволюции и фейнмановских диаграм в нелинейной оптике 439
1. Введение 439
2. Сложение частот 445
3. Двухфотонное поглощение 445
4. Комбинационное (рамановское) рассеяние 447

Приложение 4.

Обращение волнового фронта с усилением отраженной волны и генерация при вырожденном четырехволновом взаимодействии . . . 450
Дополнение титульного редактора к русскому переводу второго издания книги 455
Список рекомендуемой литературы по квантовой механике 463
Список литературы 463
Предметный указатель 482

ИБ № 469

АМНОН ЯРИВ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

Издание второе под редакцией **Я. И. Ханина**

Редакторы В. М. Ларионова, Л. В. Голованова
Художественный редактор А. Н. Алтунин
Технический редактор Г. З. Кузнецова
Корректоры Л. А. Максимова, З. Г. Галушкина

Сдано в набор 16.02.79. Подписано в печать 18.01.80.
Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая
Объем 30,5 усл. п. л. 30,9 уч.-изд. л. Тираж 8 000 экз. Заказ 875
Цена 2 р. 70 к.
Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 4 «Союзполиграфпрома»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 129041, Б. Переяславская, 46